MAT 103 - Complementos de Matemática para Contabilidade- FEAUSP
Semestre 2 de 2015
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

# CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS. CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO, CONCAVIDADES E PONTOS DE INFLEXÃO, ASSSÍNTOTAS E CONDIÇÕES PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS

**Definições.** *Consideremos uma função* $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *e* $A$ *um subconjunto não vazio do domínio de* $f$.

- $f$ *é* **estritamente crescente** *em* $A$ *se* $\forall\ s, t \in A$ *temos* $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$.
- $f$ *é* **estritamente decrescente** *em* $A$ *se* $\forall\ s, t \in A$ *temos* $s < t \Rightarrow f(s) > f(t)$
- $f$ *é* **crescente** *em* $A$ *se* $\forall\ s, t \in A$ *temos* $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$
- $f$ *é* **decrescente** *em* $A$ *se* $\forall\ s, t \in A$ *temos* $s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$.

**Observação.** Na definição acima, se $A = \mathrm{Dom}(f)$ dizemos apenas que $f$ é, respectivamente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente ou crescente ou decrescente.

**Teorema 1.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e, derivável em* $(a, b)$.

*(i) Se* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* $f$ *é estritamente crescente.*

*(ii) Se* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* $f$ *é estritamente decrescente.*

**Prova.**

(i) Dados $s, t \in [a, b]$, com $s > t$, pelo TVM existe $c \in (t, s)$ tal que

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(c) > 0 \implies f(s) - f(t) > 0 \implies f(s) > f(t)\ .$$

(ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ♣

Se a função $f$ é derivável em $p$, a equação da **reta tangente** em $(p, f(p))$ ao gráfico de $f$ é:

$$T : y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad T : y = f(p) + f'(p)(x - p) \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Abusando a notação a reta tangente $T$ em $(p, f(p))$ é o gráfico da **função afim** $T$,

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p) \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

**Observação.** Mudando a notação, temos que

$$P_1(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é um polinômio de grau 1 (um) na variável real $x$, denominado **polinômio de Taylor de ordem 1 de $f$ no ponto** $p$.

**Definição.** *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ tem* **concavidade para cima** *no intervalo aberto $I$ se*

$$f(x) > T(x) \, ,$$

*qualquer que seja a reta tangente $T$ em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.*

**Definição.** *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ tem* **concavidade para baixo** *no intervalo aberto $I$ se*

$$f(x) < T(x) \, ,$$

*qualquer que seja a reta tangente $T$ em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.*

**Definição.** *Dada $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ contínua em $p$, $p$ é* **ponto de inflexão** *de $f$ se existir um intervalo $(a, b) \subset Dom(f)$ tal que $f$ tem concavidades de nomes contrários em $(a, p)$ e em $(p, b)$.*

**Definição.** *Seja $p$ um ponto de inflexão de $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$.*

- *Se $f'(p) = 0$, então $p$ é* **ponto de inflexão horizontal** *de $f$.*
- *Se $f'(p) \neq 0$, então $p$ é* **ponto de inflexão oblíquo** *de $f$.*

**Teorema 2.** *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável.*

*(i) Se $f''(x) > 0$ em $(a,b)$ então $f$ tem a concavidade para cima em $(a,b)$.*

*(ii) Se $f''(x) < 0$ em $(a,b)$ então $f$ tem a concavidade para baixo em $(a,b)$.*

**Prova.**

(i) Seja $p \in (a,b)$ e consideremos

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x-p),\ \ x \in (a,b),$$

e a diferença,

$$\varphi(x) = f(x) - T(x)\,, x \in (a,b)\ .$$

Como $\varphi'' = f'' > 0$ então $\varphi'$ é crescente, sendo que $\varphi'(p) = f'(p) - f'(p) = 0$. Desta forma temos, $\varphi'(x) > 0$ se $x > p$ e $\varphi'(x) < 0$ se $x < p$ e portanto

$\varphi$ é estrita/e crescente em $[p,b)$ e estrita/e decrescente em $(a,p]$ e $\varphi(p) = 0$.

Consequentemente,

$$x > p \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(p) = 0 \ \text{ e (analogamente) } \ x < p \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(p) = 0\ .$$

Logo, se $x \neq p$ temos $\varphi(x) = f(x) - T(x) > 0$ e assim, $f(x) > T(x)$.

(ii) Basta trocar $f$ por $-f$ e aplicar o item (i) ♣

**Uma interpretação para o Teorema 2.**

Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre $(a,b)$, as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de $f$ são tais que suas inclinações (coeficientes angulares) aumentam com o transcorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se $f'' < 0$ ♣

**Notação.**

$$C^2\Big((a,b)\Big) = \Big\{f : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ tais que } f\,, f' \text{ e } f'' \text{ são contínuas}\Big\}.$$

**Proposição 1. (Uma condição necessária para que um ponto seja de inflexão).** *Se $f \in C^2\Big((a,b)\Big)$ e $p$ é ponto de inflexão de $f$ então $f''(p) = 0$.*

**Prova.**

> Se $f''(p) \neq 0$ então, devido à continuidade de $f''$, existe um subintervalo $(c,d)$ contido em $(a,b)$ e contendo $p$ tal que $f''(x) > 0$ para $x \in (c,d)$ e portanto $p$ não é ponto de inflexão $\lightning$

**Exemplo 1.** A função $f(x) = x^3$ tem em $p = 0$ um ponto de inflexão horizontal (verifique).

**Exemplo 2.** A derivada segunda em um ponto $p$ nula, $f''(p) = 0$, não garante que o ponto seja de inflexão, como mostra o caso da função $f \equiv 1$ e das funções $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, em $p = 0$.

**Exemplo 3.** A hipótese $f''$ contínua é necessária na Proposição 1, como mostra a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2\,, & \text{se } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Pois, verifique, $p = 0$ é ponto de inflexão de $f$ mas não existe $f''(0)$ (sendo $f'(0) = 0$) ■

**Definição.** Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. A reta $y = mx + n$ é uma **assíntota** para $f$ se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0\,.$$

Se $m = 0$ temos uma **assíntota horizontal** e se $m \neq 0$ temos uma **assíntota oblíqua**.

**Observação.** Valem definições análogas para $x \to -\infty$.

**Observações.** Se $f$ é uma função racional da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,, \quad \text{com } p \text{ e } q \text{ polinômios}\,,\ m \text{ o grau de } p \text{ e } n \text{ o grau de } q,$$

consideremos a diferença $m - n$, o grau de $p$ menos o grau de $q$. Temos,

- Se $m - n \leq 1$ então $f$ admite assíntota.
- Se $m - n = 0$ ou $m - n = 1$, basta dividir os polinômios para determinar a assíntota.
- Se $m - n < 0$ (grau de $q$ maior que grau de $p$), $y = 0$ (o eixo $Ox$) é uma assíntota.

**Condição necessária para a existência da assíntota.** Notemos que

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - n] = 0 \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - mx - n}{x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m\ .$$

Assim, se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \notin \mathbb{R}$$

então a função $f$ não tem assíntota para $x \to +\infty$.

**Um método para determinar a existência de uma assíntota de $f$ para $x \to +\infty$.** Verificada a condição de existência acima computamos o limite,

$$n = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]\ .$$

Se tal limite é um número real, vemos facilmente que $y = mx + n$ é uma tal assíntota de $f$.

**Definições.** *Sejam* $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *uma função,* $A \subset Dom(f)$ *e* $p \in A$.

- $f(p)$ *é o* **valor máximo** *de* $f$ *em* $A$*, ou* $p$ *é* **um ponto de máximo** *de* $f$ *em* $A$ *se*
$$f(p) \geq f(x)\,, \ \forall x \in A\ .$$

- $f(p)$ *é o* **valor mínimo** *de* $f$ *em* $A$*, ou* $p$ *é* **um ponto de mínimo** *de* $f$ *em* $A$ *se*
$$f(p) \leq f(x)\,, \ \forall x \in A\ .$$

- $f(p)$ *é o* **valor máximo global** *de* $f$*, ou* $p$ *é um* **ponto de máximo global** *de* $f$*, se para todo* $x \in Dom(f)$*,* $f(p) \geq f(x)$.

- $f(p)$ *é o* **valor mínimo global** *de* $f$*, ou* $p$ *é um* **ponto de mínimo global** *de* $f$*, se para todo* $x \in Dom(f)$*,* $f(p) \leq f(x)$.

- $p$ *é* **ponto de máximo local** *de* $f$ *se existir* $r > 0$ *tal que*
$$f(p) \geq f(x)\,, \quad \forall x \in (p-r, p+r) \cap Dom(f)\ .$$

- $p$ *é* **ponto de mínimo local** *de* $f$ *se existir* $r > 0$ *tal que*
$$f(p) \leq f(x)\,, \quad \forall x \in (p-r, p+r) \cap Dom(f)\ .$$

- *os pontos de máximo e minimo, globais e locais, de uma função são ditos* **extremantes globais** *e* **extremantes locais**, *respectivamente.*

- *se* $f'(p) = 0$*,* $p$ *é um* **ponto crítico** *ou* **ponto estacionário**.

- *Os valores máximo e mínimo globais são também chamados* **máximo e mínimo absolutos** *e os pontos de máximo e mínimo globais são também chamados de* **pontos de máximo e mínimo absolutos**.

- *Os valores de máximo e mínimo de* $f$ *em* $A$ *são também ditos* **valores de máximo e mínimo de** $f$ **relativos/restritos a** $A$ *e os pontos de máximo e mínimo de* $f$ *em* $A$ *são também ditos* **pontos de máximo e mínimo de** $f$ **relativos/restritos a** $A$.

**Teorema 3 (Condição Necessária para Máximos e Mínimos).** *Consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(a,b)$. Se $x_0 \in (a,b)$ é ponto de máximo ou mínimo, local, de $f$ então $f'(x_0) = 0$.*

**Prova.**

Trocando $f$ por $-f$ se necessário, podemos supor $x_0$ um ponto de mínimo local. Assim, se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in (a,b)$ temos $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$ e

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0\,, \text{ se } h > 0\,, \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0\,, \text{ se } h < 0\,.$$

Logo, como $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ e então $f'(x_0) = 0$ ♣

**Teorema 4 (Condição Suficiente para Máximo e Mínimo Locais).** *Seja $f \in C^2\big((a,b)\big)$ e $p \in (a,b)$ um ponto crítico de $f$. Então,*

*(i)* $f'(p) = 0$ *e* $f''(p) > 0 \implies$ *$p$ é um ponto de mínimo local.*

*(ii)* $f'(p) = 0$ *e* $f''(p) < 0 \implies$ *$p$ é um ponto de máximo local.*

**Prova.**

(i) Devido à continuidade de $f''$ existe um intervalo $(c,d)$ contendo $p$ no qual $f'' > 0$ . Então, no intervalo $(c,d)$, $f'$ é crescente sendo que $f'(p) = 0$. Logo, no intervalo $(c,p)$ temos $f' < 0$ e $f$ estritamente decrescente em $(c,p]$ e no intervalo $(p,c)$ temos $f' > 0$ e $f$ estritamente crescente. Portanto, $f(p)$ é ponto de mínimo no intervalo $(c,d)$

(ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ♣