MAT 147 - CÁLCULO II - FEA-USP - 2º SEMESTRE de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A VERSÃO DE DINI DO TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

A descoberta do teorema da função Implícita é geralmente atribuída a A. L. Cauchy (1789-1857). Porém, a primeira formulação deste resultado para um sistema com várias equações e variáveis deve-se ao italiano Ulisse Dini (1845-1918). Em sua prova Dini (1870) usou indução e a não degenerescência do determinante jacobiano. Na Itália, o Teorema da Função Implícita é atribuído a Dini, cuja versão não garante a unicidade local da solução.

Notações. Indiquemos

$$\begin{cases} x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \\ y' = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}, \\ y = (y_1; y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots, y_m) = (x; y) = (x; y_1; y'). \end{cases}$$

Teorema. Consideremos m funções $F_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$, com $i = 1, \ldots, m$, de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ contendo o ponto $(a; b)$ e tais que

$$F_1(a; b) = 0, \ldots, F_m(a; b) = 0.$$

Suponhamos que é não nulo o determinante da matriz

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a; b) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a; b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a; b) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a; b) \end{bmatrix}.$$

Então, existem m funções $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ definidas em uma vizinhança aberta de a que satisfazem, para cada x nesta vizinhança,

$$\begin{cases} F_1[x; y_1(x), \ldots, y_m(x)] = 0, \\ \qquad\vdots \\ F_m[x; y_1(x), \ldots, y_m(x)] = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1(a) = b_1, \\ \quad\vdots \\ y_m(a) = b_m. \end{cases}$$

Prova. Seja I_m a matriz identidade de ordem m.

- Pela regra da cadeia as funções

$$\mathcal{F}_i(x;z) = F_i[x; b + J^{-1}(z-b)], \text{ onde } i = 1,\dots,m,$$

satisfazem $\left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial z_j}(a;b)\right]_{m\times m} = JJ^{-1} = I_m$. Podemos então supor $J = I_m$.

- A seguir, argumentemos por indução.

  Se $m = 1$, sabemos que a afirmação é válida. Suponhamos a afirmação válida para $m-1$. Dado um sistema com m equações e m variáveis dependentes, como acima, consideremos a primeira das equações

$$F_1(x;y_1;y') = 0 \text{ e a condição } F_1(a;b_1;b') = 0.$$

Como $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a;b_1;b') = 1$, segue que existe uma função $y_1 = \varphi(x;y')$ definida numa vizinhança de $(a;b')$ tal que para $(x;y')$ nesta vizinhança temos

$$F_1[x;\varphi(x;y');y'] = 0 \quad \text{e } \varphi(a;b') = b_1.$$

Substituindo a função φ nas equações seguintes obtemos o sistema, com $m-1$ equações e $m-1$ variáveis dependentes,

$$\mathcal{S}: \begin{cases} F_2[x;\varphi(x;y_2,\dots,y_m);y_2,\dots,y_m] = 0, \\ \qquad\vdots \\ F_m[x;\varphi(x;y_2,\dots,y_m);y_2,\dots,y_m] = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_2[a;\varphi(a;b');b'] = 0, \\ \qquad\vdots \\ F_m[a;\varphi(a;b');b'] = 0. \end{cases}$$

Derivando as equações em $\mathcal{S}$ obtemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(a;b)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a;b') + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b) = 0 + \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b), \quad \text{onde } 2 \le i,j \le m.$$

É claro que $\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b)\right]_{2\le i,j\le m} = I_{m-1}$. Por hipótese de indução existem funções $y_2(x),\dots,y_m(x)$ definidas numa vizinhança de a tais que

$$F_i\big[x;\varphi\big(x;y_2(x),\dots,y_m(x)\big),y_2(x),\dots,y_m(x)\big] = 0, \text{ para cada } i = 2,\dots,m,$$

e satisfazendo $y_2(a) = b_2,\dots,y_m(a) = b_n$. Também temos

$$F_1\big[x;\varphi\big(x;y_2(x),\dots,y_m(x)\big);y_2(x),\dots,y_m(x)\big] = 0.$$

Definindo $y_1(x) = \varphi\big(x;y_2(x),\dots,y_m(x)\big)$ encerramos a prova ■

REFERÊNCIAS

1. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 2, 5ª ed., Editora LTC.
2. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, 1996.
3. Krantz, S. G., and Parks, H. R., *The Implicit Function Theorem - history, theory and applications*, Birkhäuser, 2002.
4. Lima, Elon, *Curso de Análise*, Vol 2, 11ª ed., IMPA.
5. Simmons, G., *Cálculo Com Geometria Analítica*, Vol 2, 1ª ed., Makron Books.