O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA:
UMA PROVA DIRETA E ELEMENTAR

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Vide "The Fundamental Theorem of Algebra: an elementary and direct proof",
Mathematical Intelligencer 33 no. 2 (2011) 1-2.
www.springerlink.com: http://www.springerlink.com/content/l1847265q2311325/

Nesta demonstração do TFA utilizaremos a existência das raízes quadradas de um número real positivo arbitrário. Notemos que as raízes quadradas complexas de

$$z^2 = a + ib\,,\ \text{com } a \text{ e } b \text{ reais,}$$

são dadas por

$$\pm z = \sqrt{\tfrac{a}{2} + \tfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \ + \ i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\tfrac{a}{2} + \tfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,$$

com

$$\mathrm{sgn}(b) = \frac{b}{|b|},\quad \text{se } b \neq 0 \text{ e } \mathrm{sgn}(0) = 1.$$

Assim, podemos extrair todas as raízes 2^j-ésimas de um número complexo dado.

Utilizamos também, sem demonstração, que os polinômios complexos são funções contínuas e também o teorema que segue.

Teorema (Weierstrass). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, com D um disco compacto (fechado e limitado) no plano. Então, f assume um valor mínimo no disco D.*

Teorema Fundamental da Álgebra. *Consideremos o polinômio não constante*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

com coeficientes complexos. Então, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$P(z_0) = 0.$$

Prova.

É fácil ver que,

$$|P(z)| \;\geq\; |a_n||z|^n - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Logo, $|P(z)| \to +\infty$ se $|z| \to +\infty$. Como P é contínuo, pelo Teorema de Weierstrass a função $|P(z)|$ assume um mínimo em algum $z_0 \in \mathbb{C}$. Podemos supor (é trivial verificar) $z_0 = 0$. Definindo $S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$ segue

$$(1) \qquad |P(z)|^2 - |P(0)|^2 \;\geq\; 0, \;\text{ para quaisquer } r \geq 0 \text{ e } \omega \in S^1.$$

Sendo P não constante, existe o menor $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$P(z) = P(0) + z^k Q(z), \quad \text{com } Q \text{ um polinômio e } Q(0) \neq 0.$$

Substituamos tal expressão para $P(z)$, avaliada em $z = r\omega$, em (1). Obtemos

$$|P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)|^2 - |P(0)|^2 \;=\; 2\mathrm{Re}\Big[\overline{P(0)} r^k \omega^k Q(r\omega)\Big] + r^{2k}|Q(r\omega)|^2 \;\geq\; 0,$$

para todo $r \geq 0$ e para todo $\omega \in S^1$. Donde, dividindo por $r^k > 0$ segue

$$2\mathrm{Re}\Big[\,\overline{P(0)}\omega^k Q(r\omega)\Big] \;+\; r^k|Q(r\omega)|^2 \;\geq 0, \quad \text{para quaiquer } r > 0 \text{e } \omega \in S^1,$$

cujo lado esquerdo é uma função contínua em r, onde $r \in [0, +\infty)$. Impondo $r \to 0^+$ encontramos

$$(2) \qquad 2\mathrm{Re}[\overline{P(0)}Q(0)\omega^k] \geq 0, \;\text{ para todo } \omega \in S^1.$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)}Q(0)$. Fatorando potências de 2 obtemos $k = 2^j m$, m ímpar. Substituindo $\omega = 1$ em (2) temos $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$. Escolhendo ω tal que $\omega^{2^j} = -1$, e então $\omega^k = -1$, obtemos $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$. Donde, $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Escolhendo ω tal que $\omega^{2^j} = i$, obtemos $\omega^k = \pm i$ e $\overline{\omega}^k = \mp i$. Donde, $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$. Logo, $\alpha = 0$ e

$$P(0) = 0 \clubsuit$$