OS NÚMEROS COMPLEXOS CONSTRUÍDOS GEOMETRICAMENTE
ZOOMS E ROTAÇÕES
FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS
Ano 2018-2019

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

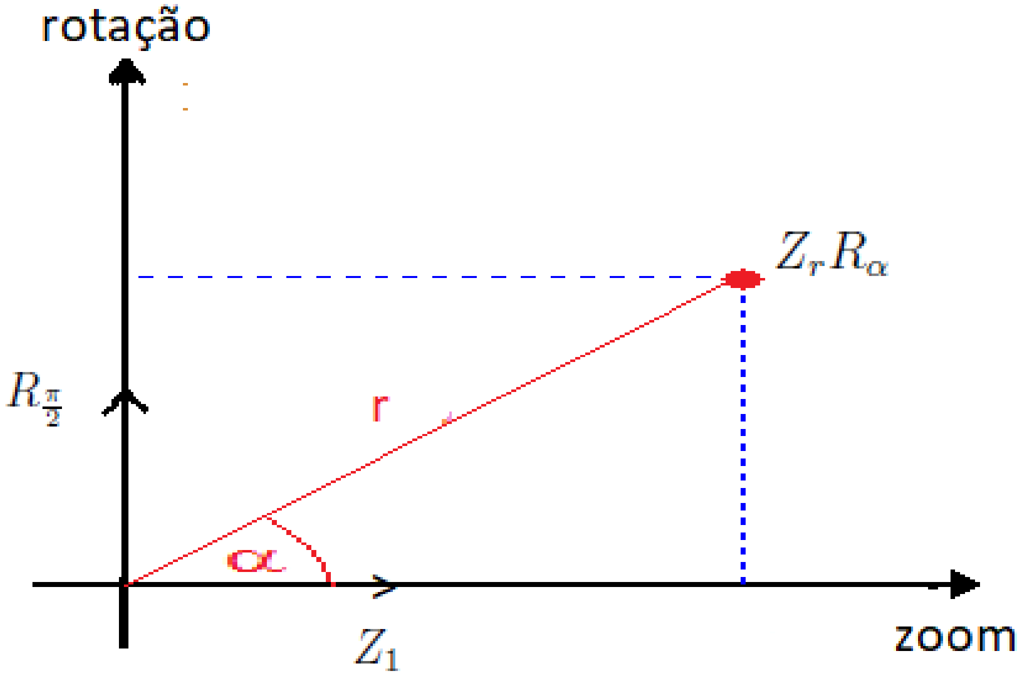

Figura 1: Ilustração à primeira construção geométrica de $\mathbb{C}$.

Capítulo 1

CONSTRUÇÃO DIRETA DE $\mathbb{C}$

1.1 Rotações, Zooms e Composições

A palavra inglesa *zoom* significa aproximar ou ampliar (uma imagem).

Vista como função, um zoom (isto é, uma contração ou uma dilatação) é também dita uma homotetia. Consideremos o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e neste um ponto arbitrário $P = (x, y)$. Também consideramos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e a base canônica $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ fixada. Então, o par ordenado (x, y) indica também as coordenadas do vetor posição $v = \overrightarrow{OP}$, este representado pelo segmento orientado com ponto inicial a origem $O = (0, 0)$ do sistema de coordenadas cartesiano Oxy e extremidade final $P = (x, y)$, em relação à base canônica.

Um zoom de razão $r > 0$ é a aplicação do plano cartesiano para o plano cartesiano (ou do plano vetorial para o plano vetorial) e definida por, respectivamente,

$$(x, y) \mapsto (rx, ry) \text{ ou } v \mapsto rv.$$

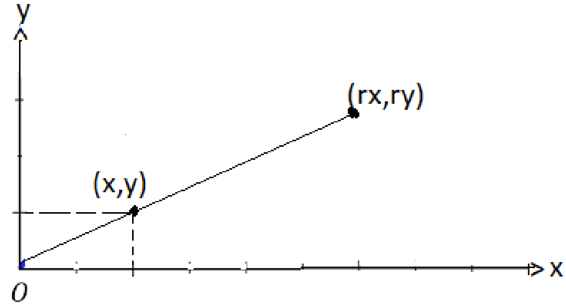

Figura 1.1: O zoom $Z_r(x, y) = (rx, ry)$.

Uma rotação do ponto (x, y) em torno da origem e por um ângulo θ, medido no sentido anti-horário e a partir do eixo Ox, é o ponto denotado $R_\theta(x, y)$. Uma rotação do vetor v é o vetor $R_\theta v$. As operações abaixo são análogas para vetores. Indiquemos a operação de composição entre funções pelo símbolo "$\circ$".

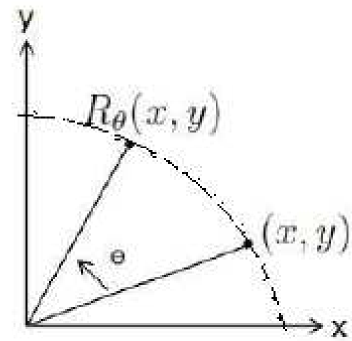

Figura 1.2: A rotação R_θ.

Seja $\mathcal{A}^*$ o conjunto (de Argand) das composições entre uma rotação e um zoom. Valem as propriedades abaixo (analogamente para vetores).

- Rotacionar (x, y) em torno da origem por um ângulo θ [encontrando $R_\theta(x, y)$] e a seguir por um ângulo φ [encontrando $R_\varphi(R_\theta(x, y))$], tem o mesmo efeito que rotacionar em torno da origem primeiro pelo ângulo φ [encontrando $R_\varphi(x, y)$] e a seguir pelo ângulo θ [encontrando $R_\theta(R_\varphi(x, y))$]. Isto é, temos

$$R_\varphi \circ R_\theta = R_\theta \circ R_\varphi.$$

- Um zoom de razão $r > 0$ comuta com um zoom de razão $\rho > 0$. Isto é,

$$Z_r \circ Z_\rho = Z_\rho \circ Z_r.$$

- O resultado final de rotacionar (x, y) em torno da origem por um ângulo θ [encontrando $R_\theta(x, y)$] e depois dilatar $R_\theta(x, y)$ por um zoom de razão r é o mesmo que dilatar (x, y) pelo zoom de razão r [encontrando (rx, ry)] e depois rotacionar (rx, ry) em torno da origem pelo ângulo θ. Isto é,

$$Z_r \circ R_\theta = R_\theta \circ Z_r.$$

Isto mostra que a operação composição definida em $\mathcal{A}^*$ é comutativa.

- Se $\theta = 0$ então temos $R_0(x, y) = (x, y)$ ou $R_0 v = v$ que é a identidade

$$I(x, y) = (x, y) \text{ ou } Iv = v.$$

Ainda mais, se $r = 1$ obtemos o zoom

$$(x, y) \mapsto (1x, 1y) = (x, y) \quad \text{ou} \quad v \mapsto 1v = v$$

que é a identidade $I(x, y) = (x, y)$ ou $Iv = v$. Segue então mais duas propriedades.

- Elemento neutro. O operador identidade I é o elemento neutro para o conjunto $\mathcal{A}^*$ munido da operação composição. De fato, temos

$$\begin{cases} I \circ R_\theta = R_\theta \circ I = R_\theta \text{ para toda rotação } R_\theta \\ I \circ Z_r = Z_r \circ I = Z_r \text{ para todo zoom } Z_r. \end{cases}$$

- Elemento inverso. Todo elemento do conjunto $\mathcal{A}^*$ tem um elemento inverso. De fato, para todo ângulo θ e para toda razão $r > 0$ valem

$$R_{2\pi-\theta} \circ R_\theta = R_\theta \circ R_{2\pi-\theta} = I, R_{-\theta} \circ R_\theta = I \text{ e } Z_r \circ Z_{\frac{1}{r}} = I,$$

Vejamos mais um propriedade.

- Associatividade. A associatividade da composição segue da seguinte observação de caráter geral. Dadas três funções $f : X \to X$, $g : X \to X$ e $h : X \to X$, onde X é um conjunto fixado arbitrário, então temos

$$\begin{aligned} [f \circ (g \circ h)](x) &= f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big(g(h(x))\big) = (f \circ g)(h(x)) \\ &= [(f \circ g) \circ h](x), \text{ para todo } x \in X. \end{aligned}$$

  Donde segue $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Como o conjunto $\mathcal{A}^*$ com operação composição $\circ$ possui as quatro propriedades citadas (comutativa, associativa, elemento neutro e elemento inverso), dizemos que $(\mathcal{A}^*, \circ)$ é um grupo (comutativo). Valem ainda as propriedades abaixo.

- Unicidade da representação. Dados $r > 0$, $\rho > 0$, e ângulos α e β medidos no sentido anti-horário, então temos

$$Z_r R_\alpha = Z_\rho R_\beta \iff \begin{cases} r = \rho \\ \alpha - \beta \text{ é um múltiplo de } 2\pi. \end{cases}$$

- Consideremos a reflexão $(-I)v = -v$, um zoom Z_r e uma rotação R_θ. Então,

$$\begin{cases} -I = R_\pi = IR_\pi = Z_1 R_\pi \in \mathcal{A} \\ Z_r = Z_r R_0 \in \mathcal{A} \\ R_\theta = Z_1 R_\theta \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

1.2 Adição de Rotações

Consideremos um vetor v no plano. Representemos v no plano cartesiano pelo segmento orientado com extremidade inicial O, a origem no plano cartesiano.

Seja a o segmento orientado (vetor) obtido pela rotação de v pelo ângulo α medido no sentido anti-horário.

Seja b o segmento orientado (vetor) obtido pela rotação de v pelo ângulo β medido no sentido anti-horário.

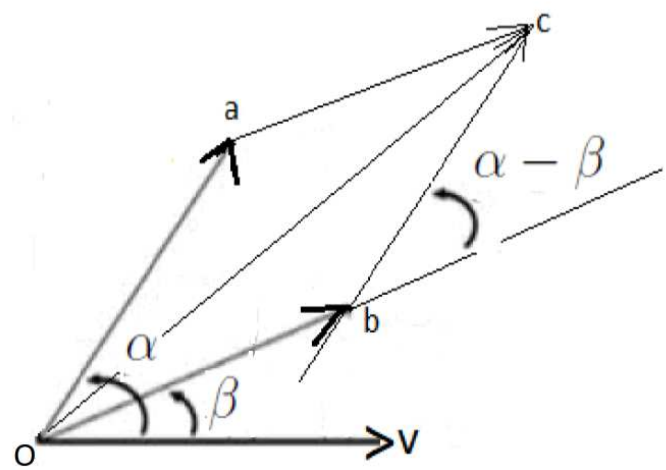

Figura 1.3: Ilustração para $c = a + b$, com vetor $a = R_\alpha v$ e vetor $b = R_\beta v$.

Os vetores a e b tem mesmo comprimento, iguais ao de v, e o paralelogramo determinado por a e b tem os quatro lados de igual comprimento.

A diagonal c divide o paralelogramo em dois triângulos isósceles e ec é paralelo à bissetriz do ângulo determinado por a e b. O ângulo formado por c e v é então

$$\beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Sejam $|a|$, $|b|$ e $|c|$, os comprimentos de a, b e c. A lei dos cossenos garante

$$\begin{aligned} |c|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\,|b|\,\cos[\pi - (\alpha - \beta)] \\ &= 2|v|^2 + 2|v|^2 \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Donde segue $|c| = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha - \beta)}|v|$ e portanto

$$R_\alpha v + R_\beta v = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha - \beta)} R_{\frac{\alpha+\beta}{2}} v.$$

Concluímos então que

$$\boxed{R_\alpha + R_\beta = Z_r \circ R_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \text{ com } r = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha - \beta)}.}$$

1.3 Rotações, Zooms e a Adição. O Corpo $\mathcal{A}$.

É evidente que para a soma de dois zooms, temos (com $r > 0$ e $\rho > 0$)

$$(Z_r + Z_\rho)v = Z_{r+\rho}v.$$

Logo, a soma de zooms é um zoom. Vimos na seção 2 que a soma de duas rotações é a composta de um zoom e uma rotação. Consideremos agora dois zooms, Z_r e Z_ρ, rotações R_α e R_β, e um segmento orientado v com início na origem O do plano cartesiano. Sejam os vetores $a = rR_\alpha v$, $b = \rho R_\beta v$ e $c = a + b$. Vide figura.

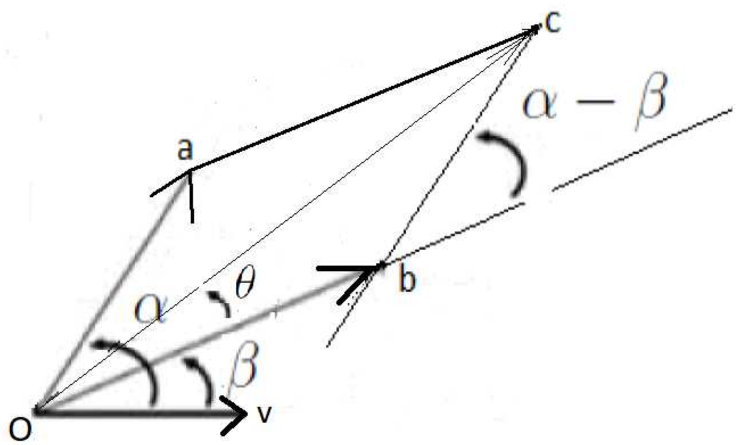

Figura 1.4: O vetor $c = a + b$, onde $a = rR_\alpha v$ e $b = \rho R_\beta v$.

O comprimento de c satisfaz $|c|^2 = r^2|v|^2 + \rho^2|v|^2 + 2r|v|\rho|v|\cos(\alpha - \beta)$. Logo,

$$|c| = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\alpha - \beta)}\,|v|.$$

Seja θ o ângulo entre b e c. Pela lei dos senos obtemos

$$\frac{\sin\theta}{r|v|} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{|c|} = \frac{\sin(\alpha - \beta - \theta)}{\rho|v|} \quad \text{e}$$

$$\boxed{Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta = Z_\lambda R_{\beta+\theta}, \ \text{onde} \begin{cases} \lambda = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\alpha - \beta)} \\ \text{e} \\ \frac{\sin\theta}{r} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha-\beta-\theta)}{\rho}. \end{cases}}$$

Estrutura de corpo. Seja 0 o operador nulo em $\mathbb{R}^2$. Então $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \cup \{0\}$ com as operações $\circ$ e $+$ forma um corpo (valem as propriedades comutativa, associativa e distributiva e também a existência de neutros, opostos e inversos). Cheque.

1.4 Espaço Linear $\mathcal{A}$. Base: Zoom Z_1 e Giro $R_{\frac{\pi}{2}}$

Terminologia. Um espaço vetorial é também dito um espaço linear. Uma rotação é também dita um giro.

Consideremos um zoom Z_r, com $r > 0$. Dado um real $\lambda > 0$, a identidade

$$\lambda(rx, ry) = (\lambda rx, \lambda ry), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mostra que $\lambda Z_r = Z_{\lambda r}$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Se $\lambda = 0$, é óbvio que $\lambda Z_r = 0$ pertence a $\mathcal{A}$. Se $\lambda < 0$, a identidade

$$\lambda(rx, ry) = (-\lambda r)(-x, -y)$$

mostra que $\lambda Z_r = Z_{-\lambda r} R_\pi$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Consideremos agora uma rotação (ou giro) R_θ, com θ medido no sentido anti-horário. Dado $\lambda > 0$ é claro que

$$\lambda R_\theta v = Z_\lambda R_\theta v, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^2.$$

Donde segue que $\lambda R_\theta = Z_\lambda R_\theta$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Se $\lambda = 0$, é óbvio que $\lambda R_\theta = 0$ pertence a $\mathcal{A}$. No caso $\lambda < 0$, as identidades

$$\lambda R_\theta v = -\lambda \left(-R_\theta v\right) = -\lambda \left(R_\pi R_\theta v\right) = Z_{-\lambda} R_{\pi+\theta} v$$

mostram que $\lambda R_\theta = Z_{-\lambda} R_{\pi+\theta}$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Resumindo, dado um arbitrário $Z_r R_\theta$ e um real arbitrário λ, temos que $\lambda Z_r R_\theta$ pertence a $\mathcal{A}$. Dizemos então que $\mathcal{A}$ é fechado para a multiplicação por escalar.

Logo, $\mathcal{A}$ é fechado para a adição (pois $\mathcal{A}$ é um corpo) e para a multiplicação por escalar. Isto mostra que $\mathcal{A}$ é um sub-espaço vetorial do espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ é um espaço vetorial}}.$$

A seguir, determinemos uma base para o espaço vetorial $\mathcal{A}$.

Sejam $r > 0$ e um ângulo α no sentido anti-horário. Mostremos que a aplicação $Z_r R_\alpha$ é uma combinação linear de Z_1 e $R_{\frac{\pi}{2}}$.

Consideremos um segmento orientado v em $\mathbb{R}^2$ com ponto inicial O, a origem de $\mathbb{R}^2$, e a reta que contém v e está orientada no sentido de v. Consideremos a reta que contém o segmento orientado $R_{\frac{\pi}{2}}v$ e orientada no sentido de $R_{\frac{\pi}{2}}v$.

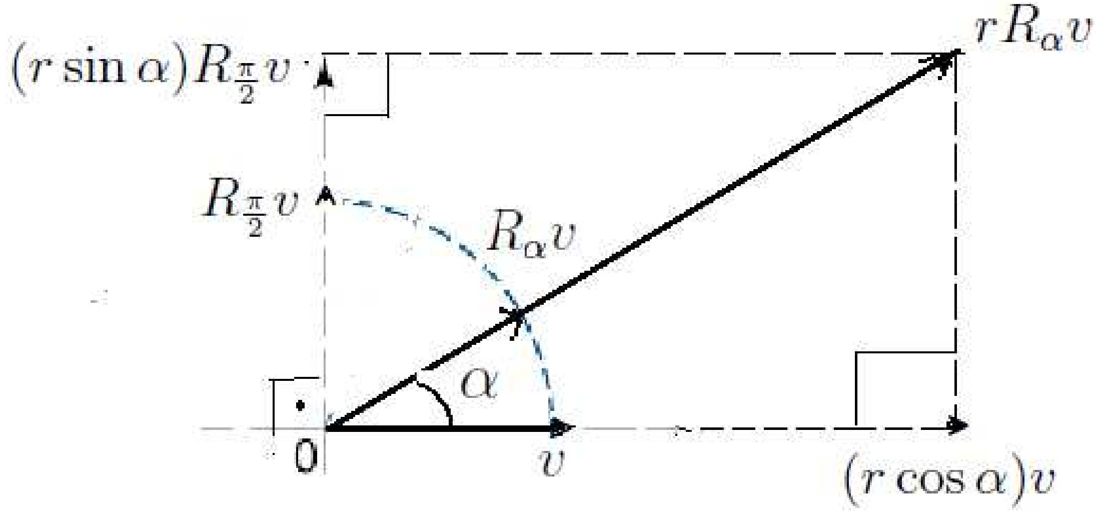

Figura 1.5: A decomposição $Z_r R_\alpha v = rR_\alpha v = (r\cos\alpha)v + (r\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}v$.

A projeção do segmento $rR_\alpha v$ sobre a reta que contém v (vide figura imediatamente acima) é o segmento orientado $(r\cos\alpha)v$. Analogamente, a projeção de $rR_\alpha v$ sobre a reta que contém o segmento $R_{\frac{\pi}{2}}v$ é o sgmento orientado

$$(r\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}v.$$

Segue então

$$rR_\alpha v = (r\cos\alpha)v + (r\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}v.$$

Isto é, com I o operador identidade,

$$rR_\alpha = (r\cos\alpha)I + (r\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}.$$

Como $Z_1 = I$, encontramos então

$$\boxed{Z_r R_\alpha = (r\cos\alpha) Z_1 + (r\sin\alpha) R_{\frac{\pi}{2}}.}$$

Vide figura abaixo.

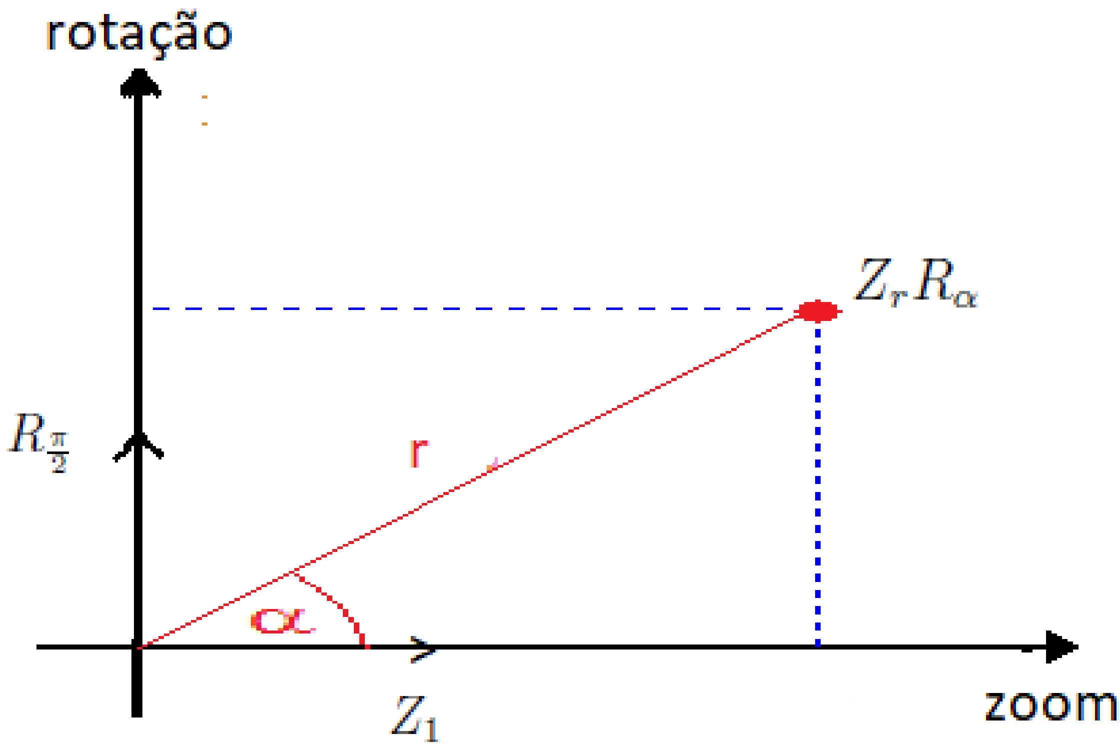

Figura 1.6: Ilustração à primeira construção geométrica de $\mathbb{C}$.

Até o momento vimos que Z_1 e $R_{\frac{\pi}{2}}$ geram $\mathcal{A}$.

Suponhamos agora que temos

$$\lambda Z_1 + \mu R_{\frac{\pi}{2}} = 0, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mu \in \mathbb{R}.$$

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, com v não nulo, temos então

$$\mu R_{\frac{\pi}{2}} v = -\lambda v.$$

Segue então que $\mu R_{\frac{\pi}{2}} v$ e λv são paralelos. Mas, $\mu R_{\frac{\pi}{2}} v$ e λv são também ortonais. Portanto, são ambos nulos e concluímos que $\lambda = \mu = 0$.

Portanto, o zoom $Z_1 = I$ e a rotação $R_{\frac{\pi}{2}}$ são LI e formam uma base de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{O conjunto } \left\{I, R_{\frac{\pi}{2}}\right\} \text{ é uma base do espaço vetorial } \mathcal{A}.}$$

1.5 Distributividade da Multiplicação Escalar em Relação ao Produto em $\mathcal{A}$

Sejam dois números reais, λ e μ, e dois elementos, S e T, pertencentes a $\mathcal{A}$. Isto é, S e T são ambos uma composição de um zoom com uma rotação. Pela seção anterior podemos multiplicar elementos de $\mathcal{A}$ por números reais.

Por definição, dadas duas funções quaisquer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, temos $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g$. Então, é óbvio a propriedade

$$\lambda(ST) = (\lambda S)T.$$

A seguir, com tal propriedade e a comutatividade do produto em $\mathcal{A}$, encontramos

$$\begin{aligned} \lambda(ST) &= \lambda(TS) \\ &= (\lambda T)S \\ &= S(\lambda T). \end{aligned}$$

Resumindo, no conjunto $\mathcal{A}$ e com as operações até aqui definidas, vale a propriedade distributiva da multiplicação por um escalar real em relação ao produto. Isto é,

$$\boxed{\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},\ S \in \mathcal{A} \text{ e } T \in \mathcal{A}.}$$

Então, escrevemos λST para $\lambda(ST)$ e para $(\lambda S)T$ e mesmo para $S(\lambda T)$.

Por propriedades gerais para funções do plano no plano, valem também

$$\boxed{(\lambda\mu)T = \lambda(\mu T) = \mu(\lambda T), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R} \text{ e } T \in \mathcal{A}.}$$

Então, escrevemos simplesmente $\lambda\mu T$ para $(\lambda\mu)T$, para $\lambda(\mu T)$ e para $\mu(\lambda T)$.

Valem assim as identidades (note que dependentes de "$\lambda\mu$" ou "$\mu\lambda$", em geral)

$$(\lambda\mu)ST = (\mu\lambda)ST = \begin{cases} (\lambda\mu S)T = S(\lambda\mu T) = (\lambda S)(\mu T) \\ (\mu\lambda S)T = S(\mu\lambda T) = (\mu S)(\lambda T). \end{cases}$$

Pelas propriedades acima seguem as identidades (com λ e μ separados, em geral)

$$\lambda(\mu ST) = \lambda[(\mu S)T] = [\lambda(\mu S)]T = (\lambda\mu)(ST) = [(\lambda\mu)S]T.$$

Escrevemos então, simplesmente, $\lambda\mu ST$.

1.6 Fórmulas para $\cos(\alpha+\beta)$ e $\sin(\alpha+\beta)$

Consideremos o zoom Z_1 e rotações R_α e R_β. Sabemos que

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta},\ Z_1 = I \text{ e } R_{\frac{\pi}{2}} R_{\frac{\pi}{2}} = R_\pi = -I.$$

Já mostramos que

$$\begin{aligned} R_\alpha &= (\cos\alpha)Z_1 + (\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}} \\ R_\beta &= (\cos\beta)Z_1 + (\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}} \\ R_{\alpha+\beta} &= [\cos(\alpha+\beta)]Z_1 + [\sin(\alpha+\beta)]R_{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelas propriedades já mostradas encontramos

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \left[(\cos\alpha)Z_1 + (\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}\right]\left[(\cos\beta)Z_1 + (\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}}\right] \\ \\ &= [(\cos\alpha)Z_1][(\cos\beta)Z_1] + [(\cos\alpha)Z_1][(\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}}] \\ &+ [(\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}][(\cos\beta)Z_1] + [(\sin\alpha)R_{\frac{\pi}{2}}][(\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}}] \\ \\ &= (\cos\alpha\cos\beta)Z_1Z_1 + (\cos\alpha\sin\beta)Z_1R_{\frac{\pi}{2}} \\ &+ (\sin\alpha\cos\beta)R_{\frac{\pi}{2}}Z_1 + (\sin\alpha\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}}R_{\frac{\pi}{2}} \\ \\ &= (\cos\alpha\cos\beta)I + (\cos\alpha\sin\beta)R_{\frac{\pi}{2}} \\ &+ (\sin\alpha\cos\beta)R_{\frac{\pi}{2}} + (\sin\alpha\sin\beta)(-I) \\ \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)I + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)R_{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Donde segue

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta. \end{aligned}}$$

1.7 Bijeção Linear entre $\mathcal{A}$ e $\mathbb{R}^2$

Dado um elemento Z_rR_α em $\mathcal{A}$ (portanto $r > 0$ e o ângulo α é medido no sentido anti-horário) e o operador nulo $0 \in \mathcal{A}$, definimos $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ por

$$\boxed{\begin{array}{l}\Phi(Z_rR_\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha),\\ \Phi(0) = (0,0).\end{array}}$$

Esta função está bem definida pois, pela unicidade da representação de elementos de $\mathcal{A}$, a identidade $Z_rR_\alpha = Z_\rho R_\beta$ implica $r = \rho$ e que $\alpha - \beta$ é múltiplo de 2π.

É evidente que Φ é sobrejetora e injetora. Logo, uma bijeção.

Vejamos a linearidade para a multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda > 0$, então $\Phi(\lambda Z_rR_\alpha) = \Phi(Z_{\lambda r}R_\alpha) = (\lambda r\cos\alpha, \lambda r\sin\alpha) = \lambda\Phi(Z_rR_\alpha)$.

Se $\lambda < 0$, temos $\lambda I = (-\lambda)R_\pi$ e portanto

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda Z_rR_\alpha) &= \Phi\big((-\lambda)R_\pi Z_rR_\alpha\big)\\ &= \Phi\big((-\lambda)Z_rR_{\alpha+\pi}\big)\\ &= \Phi(Z_{-\lambda r}R_{\alpha+\pi})\\ &= \big(-\lambda r\cos(\alpha+\pi), -\lambda r\sin(\alpha+\pi)\big)\\ &= \big(\lambda r\cos\alpha, \lambda r\sin\alpha)\big)\\ &= \lambda\Phi(Z_rR_\alpha).\end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, então $\lambda Z_rR_\alpha = 0$ e assim $\Phi(\lambda Z_rR_\alpha) = \Phi(0) = (0,0) = \lambda\Phi(Z_rR_\alpha)$.

A seguir, a linearidade para a soma. Consideremos Z_rR_α e $Z\rho R_\beta$. Vimos que

$$\boxed{Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta = Z_\lambda R_{\beta+\theta}, \text{ onde } \begin{cases}\lambda = \sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\alpha-\beta)}\\ \text{e}\\ \frac{\sin\theta}{r} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha-\beta-\theta)}{\rho}.\end{cases}}$$

Donde então segue

$$\Phi(Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta) = \Phi(Z_\lambda R_{\beta+\theta}) = \big(\lambda\cos(\beta+\theta), \lambda\sin(\beta+\theta)\big).$$

Por outro lado, por definição temos

$$\begin{cases}\Phi(Z_rR_\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)\\ \Phi(Z_\rho R_\beta) = (\rho\cos\beta, \rho\sin\beta).\end{cases}$$

Desta forma, temos $\Phi(Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta) = \Phi(Z_rR_\alpha) + \Phi(Z_\rho R_\beta)$ se e somente se

$$\begin{cases} \lambda\cos(\beta+\theta) = r\cos\alpha + \rho\cos\beta \\ \lambda\sin(\beta+\theta) = r\sin\alpha + \rho\sin\ \beta. \end{cases}$$

Tal sistema pode ser escrito no formato matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda\cos(\beta+\theta) \\ \lambda\sin(\beta+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz 2×2 acima é

$$\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta - \alpha).$$

Portanto, ocorre $\Phi(Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta) = \Phi(Z_rR_\alpha) + \Phi(Z_\rho R_\beta)$ se e somente se

$$\frac{1}{\sin(\beta-\alpha)} \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\cos(\beta+\theta) \\ \lambda\sin(\beta+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Isto é, vale a desejada linearidade para a soma se e somente se

$$\begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sin(\beta-\alpha)} \begin{pmatrix} \sin\beta\cos(\beta+\theta) - \sin(\beta+\theta)\cos\beta \\ \sin(\beta+\theta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\beta+\theta) \end{pmatrix}.$$

Tal identidade é, por sua vez, equivalente a

$$\begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sin(\beta-\alpha)} \begin{pmatrix} \sin[\beta - (\beta+\theta)] \\ \sin[(\beta+\theta) - \alpha] \end{pmatrix}.$$

Resumindo, vale a linearidade para a soma se e somente se

$$\begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sin(\alpha-\beta)} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin(\alpha-\beta-\theta) \end{pmatrix}$$

ou, escrito de outra forma,

$$\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha-\beta-\theta)}{\rho}.$$

Ora, tais identidades são válidas devido à definição de $Z_rR_\alpha + Z_\rho R_\beta = Z_\lambda R_{\beta+\theta}$.

Resumindo,

$$\boxed{\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ é um isomorfismo de espaços vetoriais.}}$$

1.8 O $\mathbb{R}^2$ ganha Multiplicação dada por $\mathcal{A}$

Utilizemos que $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ é uma bijeção linear e que $\mathcal{A}$ é um corpo.

Consideremos (a,b) e (c,d), ambos no espaço $\mathbb{R}^2$. Definimos então o seguinte produto (não confundir com o produto vetorial, definido no espaço tridimensional)

$$\boxed{(a,b) \times (c,d) = \Phi\Big(\Phi^{-1}(a,b)\Phi^{-1}(c,d)\Big).}$$

Explicitemos este produto. Considerando o zoom $Z_1 = I$, onde I é o operador identidade, e as rotações R_0 e $R_{\frac{\pi}{2}}$, observemos que

$$\begin{cases} \Phi(I) = \Phi(Z_1) = \Phi(Z_1 R_0) = (1\cos 0, 1\sin 0) = (1,0) \\ \\ \Phi\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right) = \Phi\left(Z_1 R_{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(1\cos\frac{\pi}{2}, 1\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0,1). \end{cases}$$

Ainda,

$$\begin{cases} aI + bR_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{A} \\ \\ cI + dR_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{A} \\ \\ \Phi\left(aI + bR_{\frac{\pi}{2}}\right) = \Phi(aI) + \Phi\left(bR_{\frac{\pi}{2}}\right) = a\Phi(I) + b\Phi\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right) = (a,0) + (0,b) = (a,b) \\ \\ \Phi\left(cI + dR_{\frac{\pi}{2}}\right) = (c,d). \end{cases}$$

Ainda mais, temos $I \circ I = II = I \circ I = I^2 = I$ e, pela propriedades já provadas,

$$\begin{cases} (aI)(cI) = (ac)I^2 = acI \\ \\ (aI)\left(dR_{\frac{\pi}{2}}\right) = adIR_{\frac{\pi}{2}} = adR_{\frac{\pi}{2}} \\ \\ (bR_{\frac{\pi}{2}})(cI) = bcR_{\frac{\pi}{2}}I = bcR_{\frac{\pi}{2}} \\ \\ R_{\frac{\pi}{2}}R_{\frac{\pi}{2}} = R_\pi = -I \\ \\ \left(bR_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(dR_{\frac{\pi}{2}}\right) = bdR_{\frac{\pi}{2}}R_{\frac{\pi}{2}} = bdR_\pi = bd(-I) = -bdI. \end{cases}$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned}
(a,b)\times(c,d) &= \Phi\Big[\Phi^{-1}(a,b)\Phi^{-1}(c,d)\Big]\\
&= \Phi\Big[\left(aI+bR_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(cI+dR_{\frac{\pi}{2}}\right)\Big]\\
&= \Phi\Big[(aI)(cI)+(aI)\left(dR_{\frac{\pi}{2}}\right)+\left(bR_{\frac{\pi}{2}}\right)(cI)+\left(bR_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(dR_{\frac{\pi}{2}}\right)\Big]\\
&= \Phi\left(acI+adR_{\frac{\pi}{2}}+bcR_{\frac{\pi}{2}}-bdI\right)\\
&= \Phi\left[(ac-bd)I+(ad+bc)R_{\frac{\pi}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Então, pela expressão já encontrada para Φ (para elementos escritos como combinação linear da base $\{I, R_{\frac{\pi}{2}}\}$ do espaço $\mathcal{A}$) encontramos

$$(a,b)\times(c,d)=\Phi\left((ac-bd)I+(ad+bc)R_{\frac{\pi}{2}}\right)=(ac-bd,ad+bc).$$

Segue então a fórmula de multiplicação

$$\boxed{(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).}$$

Destaquemos que a rotação $R_{\frac{\pi}{2}}$ é uma raiz quadrada do oposto ao elemento neutro da multiplicação em $\mathcal{A}$ (i.e., uma raiz quadrada da reflexão). Temos então

$$\boxed{\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2=-I.}$$

A seguir, utilizamos Φ para introduzir algumas identificações. Já vimos que

$$\Phi(I)=(1,0), \Phi\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)=(0,1) \text{ e } \left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2=-I.$$

Identifiquemos então

$$(1,0)\equiv I\equiv 1,\ i\equiv R_{\frac{\pi}{2}}\equiv(0,1) \text{ e } i^2\equiv -I\equiv -1.$$

Assim, podemos escrever $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$ como $a+bi$ e então a regra de multiplicação para $(a,b)\times(c,d)$ no formato bem conhecido

$$\boxed{(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.}$$

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é então o espaço $\mathbb{R}^2$ munido das operações adição, indicada $+$, e pela multiplicação, indicada $\times$ (ou mesmo suprimida quando subentendida), entre seus elementos. Escrevemos então,

$$\boxed{\mathbb{C}=(\mathbb{R}^2,+,\times).}$$

1.9 Isometria entre Espaços Normados $\mathcal{A}$ e $\mathbb{R}^2$

Introduzamos uma norma em $\mathcal{A}$. Definamos a função $|\cdot| : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ por

$$|Z_r R_\theta| = r \text{ e } |0| = 0.$$

Provemos que tal função é uma norma. Primeiro, é óbvio que a função $|\cdot|$ só assume valores em $[0, \infty)$ e somente se anula no operador nulo $0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Segundo, dado $\lambda > 0$ temos

$$|\lambda Z_r R_\theta| = |Z_\lambda Z_r R_\theta| = |Z_{\lambda r} R_\theta| = \lambda r = \lambda |Z_r R_\theta| = |\lambda|\,|Z_r R_\theta|.$$

Dado $\lambda < 0$ temos

$$\begin{aligned}|\lambda Z_r R_\theta| &= |(-1)(-\lambda) Z_r R_\theta| = |(-1) Z_{-\lambda r} R_\theta| = |R_\pi Z_{-\lambda r} R_\theta| = |Z_{-\lambda r} R_{\pi+\theta}| = -\lambda r \\ &= |\lambda|\,|Z_r R_\theta|.\end{aligned}$$

Dado $\lambda = 0$, então é claro que $\lambda Z_r R_\theta = 0$ e que $|\lambda Z_r R_\theta| = 0 = |\lambda|$.

Terceiro, mostremos a desigualdade triangular. Sejam $Z_r R_\alpha$ e $Z_\rho R_\beta$, ambos em $\mathcal{A}$. Sabemos que

$$Z_r R_\alpha + Z_\rho R_\beta = Z_\lambda R_{\beta+\theta},$$

com $\lambda = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\alpha - \beta)}$ e θ tal que (não usaremos condições em θ)

$$\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\lambda} = \frac{\sin(\alpha-\beta-\theta)}{\rho}.$$

Pela definição da função $|\cdot|$ temos então

$$\begin{aligned}|Z_r R_\alpha + Z_\rho R_\beta| &= |Z_\lambda R_{\beta+\theta}| \\ &= |\lambda| \\ &= \lambda \\ &= \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\alpha-\beta)} \\ &\leq \sqrt{(r+\rho)^2} \\ &= r + \rho \\ &= |Z_r R_\alpha| + |Z_\rho R_\beta|.\end{aligned}$$

Está então provado que $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ é um espaço vetorial normado.

Atenção. Indicamos a norma em $\mathbb{R}^2$ também por $|\cdot|$. Ainda mais, também a função módulo de um número real é indicada pelo símbolo $|\cdot|$. O contexto aponta qual a função módulo que está sendo empregada.

Agora, consideremos o isomorfimo linear (isto é, uma bijeção linear entre dois espaços vetoriais) já estudado na seção imediatamente anterior,

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

definido por

$$\Phi(Z_r R_\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Temos então

$$\begin{aligned} |\Phi(Z_r R_\alpha)| &= |(r\cos\alpha, r\sin\alpha)| \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha} \\ &= r \\ &= |Z_r R_\alpha|. \end{aligned}$$

É evidente que $|\Phi(0)| = |(0,0)| = 0 \in \mathbb{R}$.

Está então provado que Φ é uma isometria linear e bijetora entre o espaço vetorial normado $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ e o espaço vetorial normado $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$.

Capítulo 2

CONSTRUÇÃO DE $\mathbb{C}$, VIA COORDENADAS E MATRIZES

2.1 Rotações em Coordenadas

Fixemos um ângulo θ (medido no sentido anti-horário) e um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determinemos as coordenadas do ponto $R_\theta(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de duas formas distintas.

Primeira forma (vetorial).

Consideremos (x, y) como um elemento do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ [o vetor posição de extremidade inicial a origem $O = (0, 0)$ e por extremidade final o ponto (x, y)]. Escrevamos

$$(x, y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$

Pela definição de soma vetorial, o vetor (x, y) indica a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos $x\overrightarrow{i}$ e $y\overrightarrow{j}$. Girando todo o triângulo por θ, no sentido anti-horário, vemos que o vetor $R_\theta(x, y)$ indica a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos dados por

$$\begin{cases} R_\theta(x\overrightarrow{i}) \\ \text{e} \\ R_\theta(y\overrightarrow{j}). \end{cases}$$

É fácil ver que

$$R_\theta(x\overrightarrow{i}) = xR_\theta(\overrightarrow{i}) \quad \text{e} \quad R_\theta(y\overrightarrow{j}) = yR_\theta(\overrightarrow{j}).$$

Determinemos os vetores $R_\theta(\overrightarrow{i})$ e $R_\theta(\overrightarrow{j})$. Vide abaixo a circunferência centrada na origem.

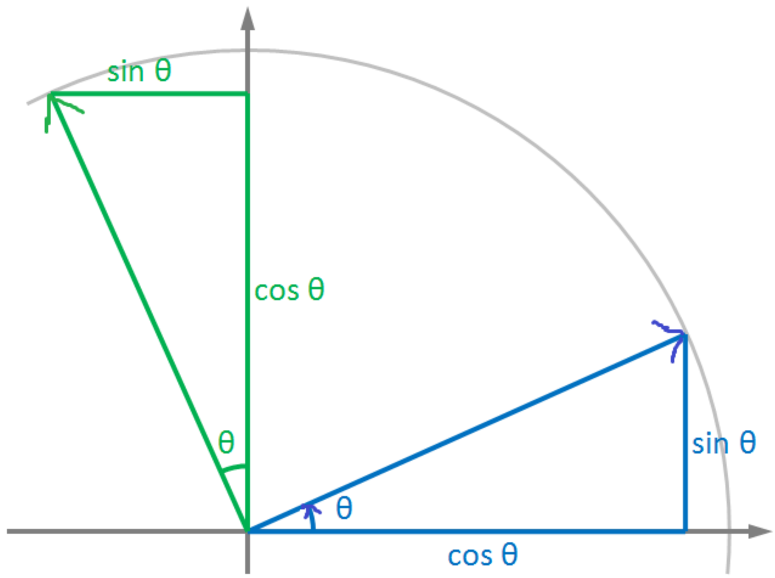

Figura 2.1: Rotação dos vetores canônicos $(1,0)$ e $(0,1)$.

Temos então

$$\begin{cases} R_\theta(\overrightarrow{i}) = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} \\ \text{e} \\ R_\theta(\overrightarrow{j}) = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}. \end{cases}$$

Donde segue

$$\begin{aligned} R_\theta(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) &= xR_\theta(\overrightarrow{i}) + yR_\theta(\overrightarrow{j}) \\ &= x(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}) + y(-\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\overrightarrow{i} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\overrightarrow{j}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\clubsuit$$

Segunda forma (plano cartesiano). Consideremos $P = (x, y)$ como um elemento do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ no usual sistema de coordenadas cartesianas Oxy. Girando os eixos x e y por uma ângulo θ no sentido anti-horário, obtemos os respectivos eixos u e v. Vide figura abaixo.

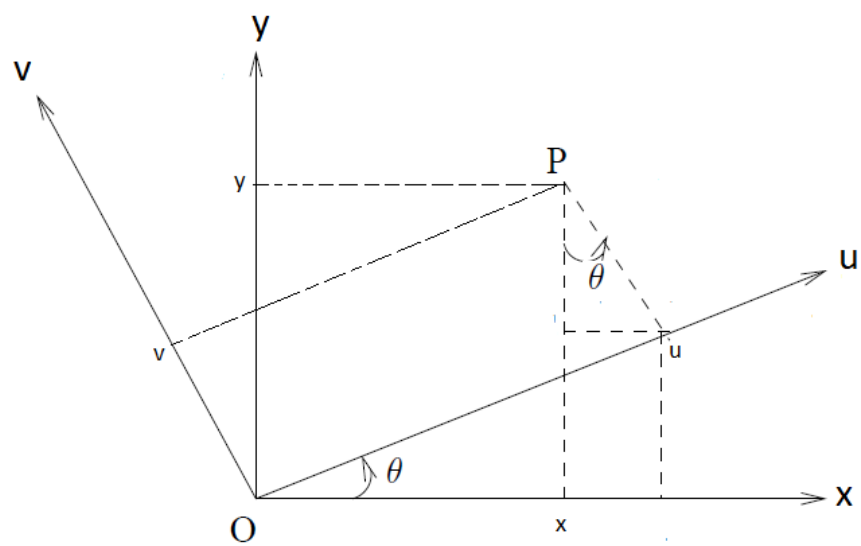

Figura 2.2: Rotação dos vetores canônicos $(1, 0) = \vec{i}$ e $(0, 1) = \vec{j}$.

Por esta figura vemos que as coordenadas x e y do ponto P satisfazem

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta\,\clubsuit \end{cases}$$

2.2 Matriz de Rotação e Matriz de Zoom

Podemos então escrever $(u, v) = R_\theta(x, y)$ na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, um zoom de razão r pode ser escrito como

$$Z_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim podemos identificar

$$R_\theta \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z_r \equiv \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

2.3 Matriz da Composição de: Rotação com Zoom

Observemos que toda rotação tem a forma matricial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 = 1.$$

Ainda, a matriz da composição de uma rotação com um zoom tem a forma

$$\begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

e tem também a forma

$$r \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz da composição de uma rotação e de um zoom tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Mostremos que toda matriz desta última forma acima efetivamente representa a composição de uma rotação e de uma homotetia de razão $r \geq 0$. O caso $\alpha = \beta = 0$ é evidente. Suponhamos $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Então encontramos

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que a matriz M é efetivamente a matriz da composição do zoom de razão

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

e de uma rotação por um ângulo θ, onde

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

2.4 Soma de Composições de Rotações e Zooms. Forma Matricial.

Consideremos uma aplicação que seja a composição de uma rotação e um zoom e uma outra aplicação que também é a composição de uma rotação e um zoom. Podemos escrevê-las como

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Então, pelo que já mostramos até aqui, a soma matricial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

efetivamente define a composição de uma rotação e um zoom (de razão $r \geq 0$).

2.5 Soma de Elementos do Conjunto $\mathcal{A}$

Seja $\mathcal{A}$ (o conjunto de Argand) a união de $\mathcal{A}^*$ com a transformação nula $0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Chamemos tal aplicação nula de um zoom de razão $r = 0$.

Utilizemos livremente a identificação entre transformações lineares e matrizes.

As propriedades para soma de matrizes se transferem para a soma de elementos de $\mathcal{A}$. Assim, a soma definida em $\mathcal{A}$ satisfaz as seguintes propriedades.

- Comutativa.
- Associativa. [$A + (B + C) = (A + B) + C$ com A, B e C matrizes em $\mathcal{A}$.]
- Elemento neutro. [A matriz nula de tamanho 2×2.]
- Elemento oposto. [É trivial verificar. Cheque.]
- Distributiva à direita. Isto é, se A, B e C são matrizes em $\mathcal{A}$ então

$$A(B + C) = AB + AC.$$

- Distributiva à esquerda. Isto é, se A, B e C são matrizes em $\mathcal{A}$ então

$$(A + B)C = AC + BC.$$

2.6 Identificando o Conjunto $\mathcal{A}$

Vimos até aqui que o conjunto $\mathcal{A}$ (das rotações e dos zooms de razão $r \geq 0$) satisfaz muitas das propriedades de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Já vimos que todo elemento de $\mathcal{A}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Escrevamos

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

e então

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizemos as notações

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então encontramos

$$Z = aI + bJ.$$

A seguir, observemos que

$$JJ = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

Para finalizar, utilizemos as notações

$$\begin{cases} Z = z, \\ I = 1, \\ J = i. \end{cases}$$

Donde então concluímos que

$$z = a.1 + bi = a + bi, \text{ com } i^2 = -1.$$

Chamamos $\mathcal{A}$ de **conjunto dos números complexos** e utilizamos a notação

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathbb{C}} \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

REFERÊNCIAS

(1) Argand, J. R., "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse", *Annales de Mathemátiques Pures et Appliquées*, tome (5) (1814-1815), pp. 197–209.

(2) Douady, Adrien, "Complex Numbers (Nombres Complexes). Video Available at `https://www.youtube.com/embed/T-c8hvMXENo?ecver=2`

(3) Oliveira, O. R. B., "Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) - e a representação dos números complexos", *Palestra, IME-USP 2016*. Disponível em `https://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf`.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil