Ano 2019

RAIZ QUADRADA EM $\mathbb{C}$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Consideremos dois números reais a e b. Determinemos os pares (ordenados) (x, y), de números reais, que resolvem o sistema

$$S: \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

[**Curiosidade.** O par (x, y) é solução do sistema acima se e somente se o número complexo $z = x + iy$ é solução da equação polinomial de grau dois

$$z^2 = a + ib,$$

onde i é a unidade imaginária (isto é, $i^2 = -1$).]

- Retornemos ao sistema S. Multiplicando a primeira equação de S por x^2 temos
$$x^4 - x^2y^2 = ax^2.$$
Substituindo $2xy = b$ nesta, obtemos
$$x^4 - \frac{b^2}{4} = ax^2.$$
Donde segue
$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$
Completando quadrado encontramos
$$(2x^2 - a)^2 - a^2 - b^2 = 0.$$
Logo,
$$2x^2 - a = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$
Seguem as alternativas
$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad 2x^2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a| \geq a$, então $a - \sqrt{a^2+b^2} \leq 0$. Assim, obrigatoriamente temos

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Donde concluímos, para x, pelas duas possibilidades

$$\boxed{x = \sqrt{\tfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \text{ ou } \boxed{x = -\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.}$$

Pela primeira equação do sistem S chegamos a

$$y^2 = x^2 - a = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} - a = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Donde concluímos, para y, pelas duas possibilidades

$$\boxed{y = \sqrt{\tfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \text{ ou } \boxed{y = -\sqrt{\tfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.}$$

Apenas duas possibilidades para o par (x, y). Aparentemente temos quatro pares de soluções para o sistema S. Entretanto, isto não procede pois a segunda equação de S,

$$2xy = b,$$

nos mostra o seguinte. Se $b > 0$, então x e y tem mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos). Se $b < 0$ então x e y tem sinais contrários.

◇ O caso $b \neq 0$. Observando que

$$\frac{b}{|b|} = \begin{cases} +1, \text{ se } b > 0 \\ -1, \text{ se } b < 0, \end{cases}$$

concluímos que neste caso as duas soluções de S são

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right), \text{ se } b \neq 0.$$

◇ O caso $b = 0$. Temos então o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Portanto, neste caso obrigatoriamente temos $x = 0$ ou $y = 0$. Separemos em dois subcasos.

O subcaso $a > 0$. Então, $x = 0$ é impossível (de fato, se $x = 0$ temos $y^2 = -a < 0\lightning$). Donde segue $x \neq 0$ e portanto $y = 0$. Logo,

$$x^2 = a \text{ e } x = \pm\sqrt{a}.$$

Donde concluímos que

$$\boxed{(x,y) = \pm(\sqrt{a}, 0).}$$

O subcaso $a < 0$. Então, $y = 0$ é impossível (se $y = 0$, temos $x^2 = a < 0\lightning$). Donde segue $y \neq 0$ e portanto $x = 0$. Logo,

$$y^2 = -a \text{ e } y = \pm\sqrt{-a}.$$

Donde concluímos que

$$\boxed{(x,y) = \pm(0, \sqrt{-a}).}$$

◇ Solução geral. Definamos a função sinal por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então, a solução geral do sistema S é

$$\boxed{(x,y) = \pm\left(\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\tfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) \clubsuit}$$

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil