Ano 2017-2022

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA EDO'S

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1 - CASO BÁSICO (NO PLANO)

Teorema (Existência e Unicidade, Picard). *Seja* $F:\Omega\to\mathbb{R}$*, onde* $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *é um aberto contendo o ponto* (a,b)*, com* $F=F(x,y)$ *e* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *contínuas. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- *(***Enunciado clássico***) Em algum intervalo aberto contendo o ponto* a*, existe uma e somente uma solução para o problema com valor inicial*

$$(PVI)\qquad \begin{cases} y'(x) & = F(x,y(x)),\\ y(a) & = b. \end{cases}$$

- *Existem um aberto contendo o ponto* (a,b) *e um raio* $\rho>0$ *tais que para todo ponto* (α,β) *neste aberto, existe uma e somente uma solução de*

$$\begin{cases} y' = F(x,y),\\ y(\alpha)=\beta \end{cases}$$

definida no intervalo aberto $(\alpha-\rho,\alpha+\rho)$.

- *Dado um compacto* $K\subset\Omega$*, existe um raio* $\rho>0$ *tal que para todo ponto* (α,β) *neste compacto, existe uma e somente uma solução de*

$$\begin{cases} y' = F(x,y)\\ y(\alpha)=\beta \end{cases}\qquad \textit{definida no intervalo } (\alpha-\rho,\alpha+\rho).$$

Prova.

- Primeira afirmação (enunciado clássico). Dividamos a prova desta em três partes: simplificações, existência e unicidade.

◇ Simplificações. Encolhendo Ω, se preciso, pela continuidade de F e de $\frac{\partial F}{\partial y}$ segue que podemos supor estas duas funções limitadas.

Seja Q um quadrado centrado em (a,b) e tal que $Q\subset\Omega$. Podemos supor $(a,b)=(0,0)$ e $Q=[-1,1]\times[-1,1]$, bastando usar uma translação e uma homotetia (dilatação ou contração). Vide verificação ao final desta prova.

Podemos supor $|F|$ e $|\frac{\partial F}{\partial y}|$ majoradas por uma constante $M>1$.

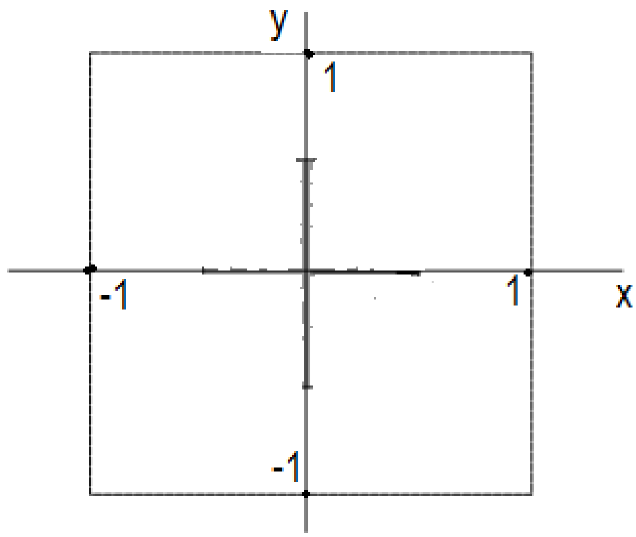


Figura 1: O quadrado $[-1,1] \times [1,1]$ contido em Ω.

$\diamond$ Existência. Tal problema, o PVI, é então equivalente a (cheque)

$$(1) \qquad y(x) = \int_0^x F(t, y(t))\, dt.$$

A idéia (útil em várias áreas) é definirmos a sequência de funções

$$(2) \qquad \begin{cases} y_0(x) = 0 \text{ (função constante)}, \\ y_{n+1}(x) = \int_0^x F(t, y_n(t))\, dt. \end{cases}$$

Pois, se a sequência de funções $y_0, y_1, y_2, \ldots$ convergir uniformemente a uma função $y(x)$, passando (2) ao limite para $n \to \infty$ obtemos (1) e ... bingo!

Provemos tal convergência uniforme. Se $|x| \leq 1/M$ e $|y_n(x)| \leq 1$, então

$$|y_{n+1}(x)| \leq \left| \int_0^x F(t, y_n(t))\, dt \right| \leq M|x| \leq 1, \quad \text{i.e., Imagem}(y_{n+1}) \subset [-1,1].$$

Isto mostra que as funções $y_1, y_2, y_3 \ldots$ estão bem definidas para $|x| \leq 1/M$.

Fixemos r tal que $0 < r < 1/M$ e ponhamos $\lambda = rM$ (logo, $0 < \lambda < 1$).

O conjunto $C\big([-r,r], \mathbb{R}\big)$ das funções contínuas definidas no intervalo $[-r,r]$ e a valores reais é um espaço vetorial. As funções contínuas definidas em compactos assumem máximo, e adotamos em tal espaço a "norma do sup"

$$\|y\| = \sup \Big\{ |y(x)| : x \in [-r,r] \Big\}.$$

Agora, dado $x \in [-r, r]$, pelo teorema do valor médio aplicado a $\frac{\partial F}{\partial y}$ temos

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| = \left| \int_0^x \big[F(t, y_k(t)) - F(t, y_{k-1}(t)) \big] \, dt \right| \leq |x| M \|y_k - y_{k-1}\|.$$

Logo, $\|y_{k+1} - y_k\| \leq \lambda \|y_k - y_{k-1}\|$. Por indução obtemos

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq \lambda^k \|y_1 - y_0\|.$$

Desta forma, supondo $m > n$, pela desigualdade triangular encontramos

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \|y_m - y_{m-1}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \leq (\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda^n) \|y_1 - y_0\|.$$

Donde segue

$$(3) \qquad |y_m(x) - y_n(x)| \leq \lambda^n \frac{\|y_1 - y_0\|}{1 - \lambda}.$$

Já que $0 < \lambda < 1$, a sequência $\big(y_n(x)\big)$ é de Cauchy e converge a um $y(x) \in \mathbb{R}$. Computando o limite em (3) para $m \to \infty$ (notemos que $m > n$) encontramos

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \lambda^n \frac{\|y_1 - y_0\|}{1 - \lambda}.$$

Portanto, a sequência de funções $y_1, y_2, \ldots$ converge uniformemente $y = y(x)$, no intervalo $[-r, r]$. Logo, y é contínua. Então, resultados triviais sobre convergência uniforme e integração aplicados à fórmula

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x F(t, y_n(t)) \, dt$$

garantem (cheque)

$$y(x) = \int_0^x F(t, y(t)) \, dt.$$

Donde, pelo teorema fundamental do cálculo segue

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

- Unicidade. Seja $z = z(x)$ tal que $z'(x) = F(x, z(x))$ em $[-r, r]$ e $z(0) = 0$.

  Aplicando o TVM à função $\frac{\partial F}{\partial y}$ obtemos, para $x \in [-r, r]$,

$$|y(x) - z(x)| = \left| \int_0^x \Big[F\big(t, y(t)\big) - F\big(t, z(t)\big) \Big] \, dt \right| \leq r M \|y - z\|.$$

  Donde segue $\|y - z\| \leq \lambda \|y - z\|$ e a igualdade entre as funções y e z.

  A primeira afirmação (o enunciado clássico) está provada.

- Segunda afirmação. Mantenhamos as simplificações adotadas acima. Dividamos a prova desta afirmação em duas partes: existência e unicidade.

◇ Existência. Sejam

$$\begin{cases} (\alpha,\beta) \text{ um ponto no quadrado aberto } \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \\ \text{o raio } \rho = \frac{1}{2M} < \frac{1}{2}, \\ \text{o espaço vetorial } C([\alpha-\rho,\alpha+\rho],\mathbb{R}) \text{ com a norma do sup } \|\cdot\|. \end{cases}$$

[Alerta sobre abuso de notação. Ao longo da prova desta afirmação, o símbolo $\|\cdot\|$ não é a norma do espaço normado definido na afirmação inicial.]

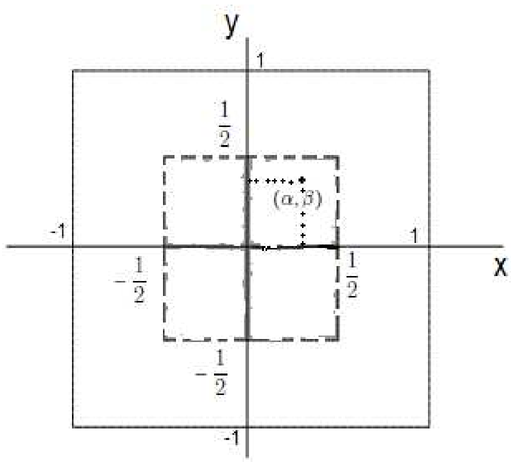


Figura 2: O ponto (α,β) no quadrado aberto $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Definamos, em $[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$, as funções

$$\begin{cases} u_0(x) = \beta \text{ (função constante)}, \\ u_{n+1}(x) = \beta + \int_\alpha^x F(t,u_n(t))\,dt. \end{cases}$$

Tal sequência é bem definida. De fato, se

$$|x-\alpha| \le \rho \quad \text{e} \quad |u_n(x)-\beta| \le \frac{1}{2}$$

então $(x,u_n(x))$ está no quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ - verifique - e temos

$$|u_{n+1}(x)-\beta| = \left|\int_\alpha^x F(t,u_n(t))dt\right| \le |x-\alpha|M \le \frac{1}{2}.$$

A seguir, o TVM aplicado a $\frac{\partial F}{\partial y}$ garante

$$|u_{n+1}(x)-u_n(x)| = \left|\int_\alpha^x [F(t,u_n(t)) - F(t,u_{n-1}(t))]dt\right| \le |x-\alpha|M\|u_n-u_{n-1}\|.$$

Donde segue

$$\|u_{n+1}-u_n\| \le \frac{1}{2}\|u_n-u_{n-1}\| \ \text{ e por indução } \ \|u_{n+1}-u_n\| \le \frac{1}{2^n}\|u_1-u_0\|.$$

Para $m>n$, a desigualdade triangular garante

$$|u_m(x)-u_n(x)| \le \|u_m-u_{m-1}\|+\cdots+\|u_{n+1}-u_n\| \le \left(\frac{1}{2^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\|u_1-u_0\|.$$

Assim,

$$|u_m(x)-u_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}\|u_1-u_0\|.$$

Isto mostra que a sequência $\big(u_m(x)\big)$ é de Cauchy e converge a um $u(x)\in\mathbb{R}$. O limite da desigualdade imediatamente acima para $m\to\infty$ é

$$|u(x)-u_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}\|u_1-u_0\|.$$

Logo, $u_0,u_1,u_2,\ldots$ converge uniformemente a u, no intervalo $[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$. Resultados sobre convergência uniforme e integração aplicados a

$$u_{n+1}(x)=\beta+\int_\alpha^x F(t,u_n(t))\,dt$$

garantem

$$u(x)=\beta+\int_\alpha^x F(t,u(t))\,dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo segue

$$u'(x)=F(x,u(x)) \ \text{ para todo } x\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho], \ \text{ com } u(\alpha)=\beta.$$

- ⋄ **Unicidade.** Seja $v=v(x)$ com $v'(x)=F(x,v(x))$ em $[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$ e $v(\alpha)=\beta$.

  Aplicando o TVM à função $\frac{\partial F}{\partial y}$ obtemos, para $x\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$,

$$|u(x)-v(x)| = \left|\int_\alpha^x \Big[F\big(t,u(t)\big)-F\big(t,v(t)\big)\Big]\,dt\right| \le |x-\alpha|M\|u-v\|.$$

  Donde segue $\|u-v\|\le\frac{1}{2}\|u-v\|$ e a igualdade entre as funções u e v.

  A segunda afirmação está provada.

- **Terceira afirmação.** Segue trivialmente da segunda afirmação (cheque).

  A prova do teorema está completa♣

Simplificações. As simplificações adotadas na prova acima são permitidas.

Prova.

Seja $G : [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$, com $\delta > 0$, contínua e $\frac{\partial G}{\partial y}$ também contínua. Consideremos o problema com valor inicial

$$(4) \qquad \begin{cases} v'(u) = G\big(u, v(u)\big) \\ v(a) = b. \end{cases}$$

Definamos então a função

$$F(x,y) = G(a+\delta x, b+\delta y), \quad \text{com } (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1],$$

e consideremos o problema com valor inicial

$$(5) \qquad \begin{cases} y'(x) = F\big(x, y(x)\big) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mostremos que

$$v = v(u) \text{ é solução de (4) se e só se } y(x) = \frac{v(a+\delta x) - b}{\delta} \text{ é solução de (5).}$$

◇ Se $v(u)$ é solução de (4), então $y(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} y'(x) = v'(a+\delta x) &= G\big(a+\delta x, v(a+\delta x)\big) \\ &= G\big(a+\delta x, b + v(a+\delta x) - b\big) \\ &= G\big(a+\delta x, b+\delta y(x)\big) \\ &= F\big(x, y(x)\big). \end{aligned}$$

◇ Se $y = y(x)$ é solução de (5), então

$$v(u) = \delta y\left(\frac{u-a}{\delta}\right) + b$$

satisfaz $v(a) = 0 + b = b$ e

$$\begin{aligned} v'(u) = y'\left(\frac{u-a}{\delta}\right) &= F\left(\frac{u-a}{\delta}, y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G\left(a+u-a, b+\delta y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G\big(u, v(u)\big) \clubsuit \end{aligned}$$

1.1 - SOLUÇÃO E INTERVALO MAXIMAIS

Definições. Consideremos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e na forma normal $y' = F(x,y)$.

- Uma solução da equação é uma função $y : I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo não degenerado (aberto ou não), que satisfaz $y'(x) = F(x, y(x))$ para todo $x \in I$.
- Se $y = y(x)$ é solução da equação, então $x \mapsto (x, y(x))$ é uma curva solução.

Teorema (Solução maximal). *Mantenhamos as notações e as hipóteses no Teorema de Existência e Unicidade para edo's (Picard). Vale o que segue.*

(1) Se as funções $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$, onde I_1 e I_2 são intervalos abertos contendo o ponto a, são ambas soluções de

$$PVI \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(a) = b, \end{cases}$$

então temos $y_1 = y_2$ na intersecção $I_1 \cap I_2$.

(2) Toda solução do PVI é estendível a um mesmo intervalo maximal *(máximo domínio conexo da solução). Tal intervalo é aberto e denotado*

$$(\omega_-, \omega_+).$$

(3) A solução do PVI no intervalo maximal é única (e dita solução maximal*).*

(4) Seja $\mathcal{Y} : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ tal solução maximal. A curva solução maximal *$(x, \mathcal{Y}(x))$ tende à fronteira $\partial\Omega$ se $x \to \omega_+$. Isto é, dado um compacto $K \subset \Omega$ existe $\tau > 0$ tal que temos $(x, \mathcal{Y}(x)) \in \Omega \setminus K$ para todo $x \in [\omega_+ - \tau, \omega_+)$. Escrevemos então*

$$(x, \mathcal{Y}(x)) \xrightarrow{x \to \omega_+} \partial\Omega.$$

Analogamente, se $x \to \omega_-$.

[Subentendendo que $x \to \omega_+$ pela esquerda e $x \to \omega_-$ pela direita.]

Valem afirmações análogas nos casos $\omega_- = -\infty$ e $\omega_+ = +\infty$..

Prova. Baseada em Doering & Lopes [6, pp. 390–392] e Figueiredo & Neves [7, pp. 56–60], com leves alterações.

Notemos que $I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto contendo a.

(1) Seja $O = \{x \in I_1 \cap I_2 : y_1(x) = y_2(x)\} \subset I_1 \cap I_2$.

Temos $O \neq \varnothing$ pois $a \in O$. As funções y_1 e y_2 são deriváveis e então contínuas. Logo, O é fechado em $I_1 \cap I_2$.

Dado $\alpha \in O$, seja $\beta = y_1(\alpha) = y_2(\alpha)$. Pelo teorema de Picard, existe um intervalo aberto I_3 contendo α (podemos supor $I_3 \subset I_1 \cap I_2$) tal que

$$\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

tem solução única. Donde então segue $y_1 = y_2$ em I_3.

Portanto temos $I_3 \subset O$ e O é aberto.

Assim, O é não vazio, aberto e fechado em $I_1 \cap I_2$. Como $I_1 \cap I_2$ é um intervalo, e então conexo, concluímos

$$O = I_1 \cap I_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2 \text{ em } I_1 \cap I_2.$$

(2) Consideremos todas as soluções $y_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}$, onde I_λ é um intervalo aberto contendo o ponto a, do problema original

$$PVI \quad \begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(a) = b. \end{cases}$$

A união $\bigcup I_\lambda$ é um aberto e um intervalo (cheque). Escrevamos

$$\bigcup I_\lambda = (\omega_-, \omega_+).$$

Por (1) segue que está bem definida a função

$$\mathcal{Y} : (\omega_-, \omega_+) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } \mathcal{Y}(x) = y_\lambda(x) \text{ se } x \in I_\lambda.$$

É claro que a função $\mathcal{Y}$ é uma solução do PVI considerado.

Vejamos que (ω_-, ω_+) é o maior intervalo em que há uma solução do PVI. Suponhamos, por contradição, que J é um intervalo (arbitrário) contendo propriamente (ω_-, ω_+) e que existe uma solução $\varphi : J \to \mathbb{R}$ do PVI.

Por (1) podemos destacar

$$\boxed{\varphi(x) = \mathcal{Y}(x) \text{ para todo } x \in (\omega_-, \omega_+)}.$$

Podemos então supor sem perda de generalidade que $\omega^+ \in J$ e

$$\boxed{J = (\omega_-, \omega_+].}$$

Como temos $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ para todo $x \in (\omega_-, \omega_+]$, concluímos que

$$\boxed{(\omega_+, \varphi(\omega_+)) \in \Omega.}$$

Pelo teorema de Picard, existe uma única função ψ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi'(x) = F(x, \psi(x)) \\ \psi(\omega_+) = \varphi(\omega_+) \end{cases}$$

em algum intervalo aberto $(\omega_+ - r, \omega_+ + r)$, onde $r > 0$.

Definamos

$$\boxed{\mathcal{Z}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ se } x \in (\omega_-, \omega_+], \\ \psi(x) \text{ se } x \in [\omega_+, \omega_+ + r). \end{cases}}$$

É claro que $\mathcal{Z}$ está bem definida $[\varphi(\omega_+) = \psi(\omega_+)]$ e é contínua em ω_+.

Temos também

$$\begin{cases} \mathcal{Z}'(x) = F(x, \mathcal{Z}(x)) \text{ se } x \in (\omega_-, \omega_+) \\ \mathcal{Z}'(x) = F(x, \mathcal{Z}(x)) \text{ se } x \in (\omega_+, \omega_+ + r). \end{cases}$$

A derivada $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ mostra que φ é de classe C^1 em $(\omega_-, \omega_+]$. Analogamente, ψ é de classe C^1 em $[\omega_+, \omega_+ + r)$.

As derivadas laterais à esquerda e à direita de $\mathcal{Z}$ em ω^+ são, respectivamente,

$$\varphi'(\omega_+) = F(\omega_+, \varphi(\omega_+)) \quad \text{e} \quad \psi'(\omega_+) = F(\omega_+, \psi(\omega_+)).$$

Note-se $\varphi(\omega_+) = \psi(\omega_+)$. Logo, as derivadas laterais de $\mathcal{Z}$ em ω_+ coincidem.

Donde $\mathcal{Z}$ é derivável em ω_+ e $\mathcal{Z}'(\omega_+) = F(\omega_+, \varphi(\omega_+)) = F(\omega_+, \mathcal{Z}(\omega_+))$.

Já destacamos acima que $\varphi = \mathcal{Y}$ em (ω_-, ω_+). Logo, $\mathcal{Z}(a) = \varphi(a) = \mathcal{Y}(a) = b$.

Concluímos então que $\mathcal{Z}$ resolve o problema

$$\begin{cases} \mathcal{Z}'(x) = F(x, \mathcal{Z}(x)) \text{ se } x \in (\omega_-, \omega_+ + r) \\ \mathcal{Z}(a) = b. \end{cases}$$

Obtemos então $(\omega_-, \omega_+ + r) \subset (\omega_-, \omega_+)$ $\lightning$

(3) Segue trivialmente de (1). Cheque.

(4) Dividamos a prova em três casos.

O caso $\omega_+ = +\infty$. Como K é limitado, existe $\tau > 0$ tal que para todo (x, y) em K temos $x < \tau$. Assim, para todo $x \geq \tau$ segue $(x, \mathcal{Y}(x)) \in \Omega \setminus K$.

O caso $\omega_- = -\infty$. Análogo ao caso acima.

O caso ω_- e ω_+ finitos. O teorema de Picard (terceira afirmação) garante um raio $\rho > 0$ tal que para toda condição inicial $(\alpha, \beta) \in K$ existe uma única solução de $y' = F(x, y)$, com $y(\alpha) = \beta$, definida no intervalo $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$.

Fixemos um ponto $(\alpha, \mathcal{Y}(\alpha)) \in K$. Existe uma função φ satisfazendo

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) \text{ em } (\alpha - \rho, \alpha + \rho), \text{ com } \varphi(\alpha) = \mathcal{Y}(\alpha).$$

A primeira afirmação do *teorema solução maximal* garante $\varphi = \mathcal{Y}$ na intersecção $(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \cap (\omega_-, \omega_+) \neq \emptyset$. Assim, podemos estender $\mathcal{Y}$ ao intervalo união $(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \cup (\omega_-, \omega_+)$. Porém, (ω_-, ω_+) é intervalo maximal. Seguem

$$(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \subset (\omega_-, \omega_+), \quad \text{e então} \quad \omega_- \leq \alpha - \rho \ \text{ e } \ \alpha + \rho \leq \omega_+.$$

Estas duas últimas desigualdades implicam

$$\begin{cases} (\alpha, \mathcal{Y}(\alpha)) \notin K \text{ se } \alpha < \omega_- + \rho \\ \text{e} \\ (\alpha, \mathcal{Y}(\alpha)) \notin K \text{ se } \alpha > \omega_+ - \rho \clubsuit \end{cases}$$

1.2 - DEPENDÊNCIA CONTÍNUA

Teorema (Dependência Contínua nos Dados Iniciais). *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto (convexo ou não), com $F = F(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Sejam φ e ψ duas soluções da edo*

$$y' = F(x,y)$$

definidas no intervalo compacto $[a,b]$. Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(a) - \psi(a)|e^{M(x-a)},\ \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Prova.

- Exercício (a hipótese de convexidade é supérflua). Dado K compacto em Ω, existe uma constante $M > 0$ tal que temos $|F(t,x) - F(t,y)| \leq M|x - y|$ se os pares (t,x) e (t,y) pertencem a K. Dica. Prove por contradição.

- Se $\varphi(a) = \psi(a)$, o teorema de Picard garante $\varphi = \psi$ em $[a,b]$ e então a afirmação é evidente. A seguir, consideremos o caso $\varphi(a) \neq \psi(a)$.

- Os gráficos das funções contínuas φ e ψ são compactos em Ω. Seja K o compacto dado pela união destes gráficos. Seja $M > 0$ como no exercício.

- Seja $x \in [a,b]$. Sabemos que
$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x F(t,\varphi(t))dt.$$
Analogamente para ψ. Segue (cheque)
$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq m(x) = |\varphi(a) - \psi(a)| + \int_a^x |F(t,\varphi(t)) - F(t,\psi(t))|dt$$
O teorema fundamental do cálculo e o TVM na segunda variável garantem
$$m'(x) = |F(x,\varphi(x)) - F(x,\psi(x))| \leq M|\varphi(x) - \psi(x)|.$$
Donde segue $m' \leq Mm$. Temos também (pois vale $m > 0$ em todo ponto)
$$\frac{m'}{m} \leq M \text{ em } [a,b].$$
Integrando tal desigualdade em $[a,x]$ encontramos
$$\ln\frac{m(x)}{m(a)} \leq M(x-a) \text{ e } \ m(x) \leq m(a)e^{M(x-a)}.$$
Segue então $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq m(x) \leq m(a)e^{M(x-a)} = |\varphi(a) - \psi(a)|e^{M(x-a)}$ ♣.

2 - SISTEMAS NÃO LINEARES

2.1 - NOTAÇÕES

Escrevendo
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \{(t,x) : t\in\mathbb{R} \text{ e } x\in\mathbb{R}^n\},$$
dizemos que (t,x) é a variável em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Interpretamos t (a primeira variável) por *tempo* e x (a segunda variável) por *posição.* Identificamos $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.

Dado $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, então $|(t,x)|$ indica a norma de (t,x) no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam um intervalo $I\subset\mathbb{R}$ e um aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Dada $F: I\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, escrevamos $F=(F_1,\ldots,F_n)$ com F_j a j-ésima componente da função F.

A função $F: I\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ é de (ou satisfaz uma condição de) Lipschitz na segunda variável se existe uma constante $L>0$ tal que temos
$$|F(t,x)-F(t,y)|\leq L|x-y|, \text{ para quaisquer } t\in I, x\in\Omega \text{ e } y\in\Omega.$$
Dizemos que L é uma constante de Lipschitz para F, na segunda variável.

Uma função $x=x(t): I\to\Omega$ é dita um caminho (ou curva) em Ω.

A integral de um caminho $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ é (se existir) o vetor em $\mathbb{R}^n$ dado, coordenada por coordenada, pelas integrais em $[a,b]$ das n componentes de x.

Um caminho $x: I\to\Omega$ é uma solução do sistema não linear de equações diferenciais de primeira ordem
$$\frac{dx}{dt} = F(t,x),$$
se para todo ponto $t\in I$ temos
$$x'(t) = \big(F_1(t,x(t)),\ldots,F_n(t,x(t))\big) \text{ ou, ainda, } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = F_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \quad\vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = F_n(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)). \end{cases}$$
Alerta. Também indicamos uma sequência de funções por sub-índices. Exemplos: $f_1, f_2, \ldots$ ou mesmo $x_1, x_2, x_3, \ldots$. O contexto deixa claro o sentido empregado.

Dado um ponto $(t_0,x_0)\in I\times\Omega$, procuremos resolver o problema
$$\begin{cases} x' = F(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$
Se o caminho x resolve este problema, então x é uma órbita de F pelo ponto x_0.

2.2 - TEOREMA DE PICARD (SISTEMAS NÃO LINEARES)

Teorema (Existência e Unicidade para Sistemas Não Lineares de EDO's). *Seja $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com $F = F(t,x)$ contínua, limitada e de Lipschitz na segunda variável. Consideremos um ponto $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (**Enunciado clássico, para sistemas**) *Em algum intervalo aberto contendo t_0, existe uma e só uma solução para*
$$(PVI) \qquad \begin{cases} x'(t) & = F(t,x(t)), \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$
- *Existem um aberto contendo o ponto (t_0,x_0) e um raio $\rho > 0$ tais que para todo ponto (α,β) neste aberto, existe uma e só uma solução de*
$$\begin{cases} x' = F(t,x), \\ x(\alpha) = \beta \end{cases}$$
no intervalo $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$.
- *Dado um compacto $K \subset I \times \Omega$, existe um raio $\rho > 0$ tal que para todo ponto (α,β) neste compacto existe uma e somente uma solução de*
$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(\alpha) = \beta \end{cases}$$
no intervalo aberto $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$.

  Se ocorre $K \subset$ interior(K_0), com K_0 compacto em $I \times \Omega$, podemos escolher ρ tal que o gráfico de $x = x(t)$ está contido em K_0 para todo $(\alpha,\beta) \in K$.

Prova.

- Primeira afirmação (enunciado clássico, para sistemas). Dividamos a prova desta em três partes: simplificações, existência e unicidade.

◇ Simplificações. Seja $D(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, a bola unitária fechada (disco unitário) n-dimensional centrada na origem de $\mathbb{R}^n$. Seja Q um cilindro circular reto $(n+1)$-dimensional ao longo do eixo t, compacto, centrado em (t_0,x_0), com altura igual ao dobro do raio da base e satisfazendo $Q \subset I \times \Omega$.

Utilizando uma translação e uma homotetia, podemos supor sem perda de generalidade $(t_0, x_0) = (0,0)$ e $Q = [-1,1] \times D(0,1)$. Cheque.

Podemos supor que a constante de Lipschitz (na segunda variável) L satisfaz $L > 1$ e majora $|F|$.

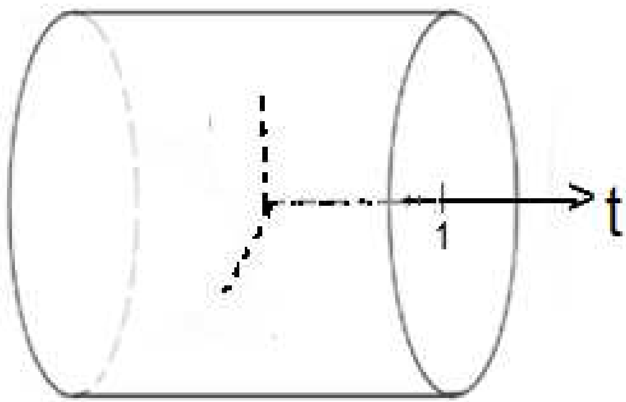


Figura 3: Caso $n = 2$. O cilindro 3-dimensional $[-1,1] \times D(0,1)$ contido em $I \times \Omega$.

- ⋄ Existência. O PVI é equivalente a (cheque)

$$x(t) = \int_0^t F(s, x(s))\, ds.$$

Definamos (informalmente, a princípio) a sequência de caminhos

$$\begin{cases} x_0(t) = 0 \text{ (função constante)}, \\ x_{n+1}(t) = \int_0^t F(s, x_n(s))\, ds. \end{cases}$$

Se $|t| \leq 1/L$ e $|x_n(t)| \leq 1$ obtemos

$$|x_{n+1}(t)| \leq \left| \int_0^t F(s, x_n(s))\, ds \right| \leq L|t| \leq 1.$$

Assim, as funções $x_1, x_2, x_3 \ldots$ estão bem definidas para $|t| \leq 1/L$.

Fixemos r tal que $0 < r < 1/L$ e

$$\boxed{\lambda = rL \ (\text{logo}, 0 < \lambda < 1)}.$$

[Observemos que o gráfico $(t, x_n(t))$, onde $t \in [-r, r]$, está contido no cilindro compacto $[-1,1] \times D(0,1)$, para cada n.]

O conjunto $C\big([-r,r], \mathbb{R}^n\big) = \{x : [-r,r] \to \mathbb{R}^n :\ x \text{ é caminho contínuo}\}$ é um espaço vetorial. Adotamos em tal espaço a "norma do sup"

$$\|x\| = \sup\big\{|x(t)| : t \in [-r,r]\big\}.$$

Dado $t \in [-r, r]$, pela condição de Lipschitz segue

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| = \left| \int_0^t \left[F(s, x_k(s)) - F(s, x_{k-1}(s)) \right] ds \right| \leq |t| L \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Logo, $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda \|x_k - x_{k-1}\|$. Por indução segue

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda^k \|x_1 - x_0\| = \lambda^k \|x_1\|.$$

Seja $m > n$. Pela desigualdade triangular obtemos

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda^n) \|x_1\|.$$

Donde segue

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \lambda^n \frac{\|x_1\|}{1 - \lambda}.$$

Já que $0 < \lambda < 1$, a sequência $\big(x_n(t)\big)$ é de Cauchy e converge a um $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Computando o limite na última desigualdade acima para $m \to \infty$ achamos

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \lambda^n \frac{\|x_1\|}{1 - \lambda}.$$

Logo, a sequência x_n converge uniformemente a $x = x(t)$ em $[-r, r]$. Resultados triviais sobre convergência uniforme e integração aplicados a

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t F(s, x_n(s))\, ds$$

garantem (cheque)

$$x(t) = \int_0^t F(s, x(s))\, ds.$$

Pelo TFC segue $x'(t) = F(t, x(t))$. Evidentemente, $x(0) = 0$.

◇ Unicidade. Seja $z = z(t)$ tal que $z'(t) = F(t, z(t))$ em $[-r, r]$ e $z(0) = 0$.

Seja $t \in [-r, r]$. A condição de Lipschitz vigente para F garante

$$|x(t) - z(t)| = \left| \int_0^t \left[F\big(s, x(s)\big) - F\big(s, z(s)\big) \right] ds \right| \leq r L \|x - z\|.$$

Donde segue $\|x - z\| \leq \lambda \|x - z\|$ e a identidade $x \equiv z$.

A primeira afirmação está provada.

- Segunda afirmação. Mantenhamos as simplificações adotadas acima. Dividamos a prova desta afirmação em duas partes: existência e unicidade.

◇ Existência. Sejam

$$\begin{cases} B\left(0,\frac{1}{2}\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{2}\} \\ (\alpha,\beta) \text{ um ponto no cilindro aberto } \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times B\left(0,\frac{1}{2}\right), \\ \text{o raio } \rho = \frac{1}{2L} < \frac{1}{2}, \\ \text{o espaço vetorial } C([\alpha-\rho,\alpha+\rho],\mathbb{R}^n) \text{ com a norma do sup } \|\cdot\|. \end{cases}$$

[Abuso de notação. Abaixo, $\|\cdot\|$ não é a norma usada na afirmação inicial.]

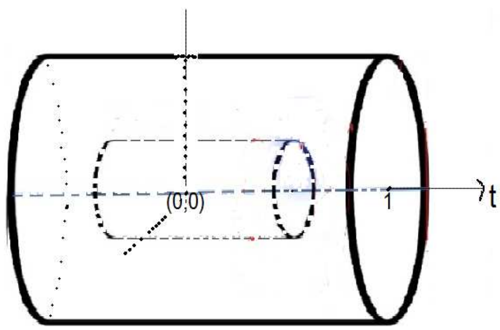


Figura 4: O cilindro $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times B\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e o cilindro $[-1,1] \times D(0,1)$.

Definamos, no intervalo $[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$, os caminhos

$$\begin{cases} u_0(t) = \beta \text{ (função constante)}, \\ u_{n+1}(t) = \beta + \int_\alpha^t F(s,u_n(s))\,ds. \end{cases}$$

Tal sequência é bem definida. De fato, se

$$|t-\alpha| \le \rho \ \text{ e } \ |u_n(t)-\beta| \le \frac{1}{2}$$

então o gráfico $(t,u_n(t))$ está no cilindro $[-1,1]\times D(0,1)$ - cheque - e temos

$$|u_{n+1}(t)-\beta| = \left|\int_\alpha^t F(s,u_n(s))ds\right| \le |t-\alpha|L \le \frac{1}{2}.$$

A condição de Lipschitz na segunda variável assegura

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)| = \left|\int_\alpha^t [F(s,u_n(s))-F(s,u_{n-1}(s))]ds\right| \le |t-\alpha|L\|u_n-u_{n-1}\|.$$

Donde segue

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2}\|u_n - u_{n-1}\| \ \text{ e por indução } \ \|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2^n}\|u_1 - u_0\|.$$

Para $m > n$, a desigualdade triangular garante

$$|u_m(t) - u_n(t)| \leq \|u_m - u_{m-1}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \leq \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)\|u_1 - u_0\|.$$

Assim,

$$|u_m(t) - u_n(t)| \leq \frac{\|u_1 - u_0\|}{2^{n-1}}.$$

Isto mostra que a sequência $\big(u_m(t)\big)$ é de Cauchy e converge a um $u(t) \in \mathbb{R}^n$. O limite da última desigualdade acima para $m \to \infty$ é

$$|u(t) - u_n(t)| \leq \frac{\|u_1 - u_0\|}{2^{n-1}}.$$

Logo, $u_0, u_1, u_2, \ldots$ converge uniformemente a u, no intervalo $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. Resultados sobre convergência uniforme e integração aplicados a

$$u_{n+1}(t) = \beta + \int_\alpha^t F(s, u_n(s))\, ds$$

garantem

$$u(t) = \beta + \int_\alpha^t F(s, u(s))\, ds.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo (coordenada a coordenada) segue

$$u'(t) = F(t, u(t)) \text{ para todo } t \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho], \text{ com } u(\alpha) = \beta.$$

◇ **Unicidade.** Seja $v = v(t)$ com $v'(t) = F(t, v(t))$ em $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ e $v(\alpha) = \beta$.

Pela condição de Lipschitz, para todo $t \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ vale

$$|u(t) - v(t)| = \left| \int_\alpha^t \left[F\big(s, u(s)\big) - F\big(s, v(s)\big)\right] ds \right| \leq |t - \alpha| L \|u - v\|.$$

Donde segue $\|u - v\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|$ e a igualdade entre os caminhos u e v.

A segunda afirmação está provada.

- Terceira afirmação. Dado $(t_0, x_0) \in K$, sejam $V = V(t_0, x_0)$ o aberto e $\rho = \rho_V$ o raio dados pela segunda afirmação.

  A prova da segunda afirmação revela que podemos supor que V é um cilindro aberto [centrado em (t_0, x_0)] com fecho $\overline{V}$ contido em um cilindro aberto $W = W(t_0, x_0)$ de fecho $\overline{W}$ compacto e contido em interior(K_0). Isto é,

$$V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \text{interior}(K_0).$$

  Revela também que dado $(\alpha, \beta) \in V = V(t_0, x_0)$, podemos supor que a solução do problema

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(\alpha) = \beta \end{cases}$$

  definida em $(\alpha - \rho_V, \alpha + \rho_V)$, tem seu gráfico contido no fecho do cilindro $W = W(t_0, x_0)$.

  Consideremos a cobertura

$$K \subset \bigcup V(t_0, x_0),$$

  com a união feita sobre todo $(t_0, x_0) \in K$. Como K é compacto, existe uma sub-cobertura finita e escrevemos $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_N$.

  Sejam $\rho_{V_1}, \ldots, \rho_{V_N}$ os raios já associados a $V_1, \ldots, V_N$. Seja

$$\rho = \min\{\rho_{V_1}, \ldots, \rho_{V_N}\}.$$

  Então, dado um ponto $(\alpha, \beta) \in K$, existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $(\alpha, \beta) \in V_j$. Portanto, a solução do problema $x' = F(t, x)$, sob a condição $x(\alpha) = \beta$, está definida no intervalo $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$. Ainda mais, o gráfico de tal solução satisfaz

$$\{(t, x(t)) : t \in (\alpha - \rho, \alpha + \rho)\} \subset \overline{W_j} \subset \text{interior}(K_0) \subset K_0.$$

  A prova do teorema está completa♣

2.3 - SOLUÇÃO MAXIMAL (SISTEMA NÃO LINEAR)

Definições. Seja $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, com I um intervalo aberto e Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Consideremos a equação $x' = F(t, x)$.

- Uma solução da equação é um caminho $x : J \to \mathbb{R}^n$, com J um intervalo não degenerado, que satisfaz $x'(t) = F(t, x(t))$ para todo $t \in J$.
- Se $x = x(t)$ é solução da equação, então $t \mapsto (t, x(t))$ é uma curva solução.

A prova do teorema a seguir é "idêntica" à prova de seu correspondente apresentado na seção anterior.

Teorema (Solução maximal). *Mantenhamos as notações e as hipóteses no Teorema de Existência e Unicidade para Sistemas. Vale o que segue.*

(1) *Se os caminhos $x_1 : I_1 \to \Omega$ e $x_2 : I_2 \to \Omega$, onde I_1 e I_2 são intervalos abertos contendo o ponto t_0, são ambas soluções de*

$$(PVI) \quad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

então temos $x_1 = x_2$ na intersecção $I_1 \cap I_2$.

(2) *Toda solução do PVI é estendível a um mesmo intervalo maximal, o qual é aberto e indicado*

$$(\omega_-, \omega_+).$$

(3) *A solução do PVI no intervalo maximal é única e dita solução maximal.*

(4) *Seja $X : (\omega_-, \omega_+) \to \Omega$ tal solução maximal. A curva solução maximal $(t, X(t))$ tende à fronteira $\partial(I \times \Omega)$ se $t \to \omega_+$. Isto é, dado um compacto $K \subset I \times \Omega$ existe $\tau > 0$ tal que temos $(t, X(t)) \in (I \times \Omega) \setminus K$ para todo $t \in [\omega_+ - \tau, \omega_+)$. Escrevemos então (subentendendo que $t \to \omega_+$ pela esquerda)*

$$(t, X(t)) \xrightarrow{t \to \omega_+} \partial(I \times \Omega).$$

Analogamente, se $t \to \omega_-$.

Valem afirmações análogas se $\omega_- = -\infty$ ou $\omega_+ = +\infty$.

Prova.

Notemos que $I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto contendo t_0.

(1) Seja $O = \{t \in I_1 \cap I_2 : x_1(t) = x_2(t)\} \subset I_1 \cap I_2$.

Temos $O \neq \varnothing$ pois $t_0 \in O$. Os caminhos x_1 e x_2 são deriváveis e contínuos. Logo, O é fechado em $I_1 \cap I_2$.

Dado $\alpha \in O$, seja $\beta = x_1(\alpha) = x_2(\alpha)$. Pelo teorema de Picard, existe um intervalo aberto I_3 contendo α (podemos supor $I_3 \subset I_1 \cap I_2$) tal que

$$\begin{cases} x' = F(t, x(t)) \\ x(\alpha) = \beta \end{cases}$$

tem solução única. Donde $x_1 = x_2$ em I_3. Assim temos $I_3 \subset O$ e O é aberto.

Logo, O é não vazio, aberto e fechado em $I_1 \cap I_2$. Como $I_1 \cap I_2$ é um intervalo, e então conexo, concluímos

$$O = I_1 \cap I_2 \ \text{ e } \ x_1 = x_2 \text{ em } I_1 \cap I_2.$$

(2) Consideremos todas as soluções $x_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}^n$, onde I_λ é um intervalo aberto contendo o ponto t_0, do problema original

$$(PVI) \quad \begin{cases} x' = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

A união $\bigcup I_\lambda$ é um aberto e um intervalo (cheque). Escrevamos

$$\bigcup I_\lambda = (\omega_-, \omega_+).$$

Por (1) segue que está bem definido o caminho

$$X : (\omega_-, \omega_+) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ onde } X(t) = x_\lambda(t) \text{ se } t \in I_\lambda.$$

É claro que o caminho X é uma solução do PVI considerado.

Vejamos que (ω_-, ω_+) é o maior intervalo em que há uma solução do PVI. Suponhamos, por contradição, que J é um intervalo (arbitrário) contendo propriamente (ω_-, ω_+) e que existe uma solução $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ do PVI.

Por (1) podemos destacar

$$\boxed{\varphi(t) = X(t) \text{ para todo } t \in (\omega_-, \omega_+)}.$$

Podemos então supor sem perda de generalidade que $\omega_+ \in J$ e

$$\boxed{J = (\omega_-, \omega_+].}$$

Como temos $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ para todo $t \in (\omega_-, \omega_+]$, concluímos que

$$\boxed{(\omega_+, \varphi(\omega_+)) \in I \times \Omega.}$$

Pelo teorema de Picard, existe um único caminho ψ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi'(t) = F(t, \psi(t)) \\ \psi(\omega_+) = \varphi(\omega_+) \end{cases}$$

em algum intervalo aberto $(\omega_+ - r, \omega_+ + r)$, onde $r > 0$.

Definamos o caminho

$$Z(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ se } t \in (\omega_-, \omega_+], \\ \psi(t) \text{ se } t \in [\omega_+, \omega_+ + r). \end{cases}$$

É claro que Z está bem definida $[\varphi(\omega_+) = \psi(\omega_+)]$ e é contínua em ω_+.

Temos também

$$\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \text{ se } t \in (\omega_-, \omega_+) \\ Z'(t) = F(t, Z(t)) \text{ se } t \in (\omega_+, \omega_+ + r). \end{cases}$$

A derivada $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ mostra que φ é de classe C^1 em $(\omega_-, \omega_+]$. Analogamente, ψ é de classe C^1 em $[\omega_+, \omega_+ + r)$.

As derivadas laterais à esquerda e à direita de Z em ω^+ são, respectivamente,

$$\varphi'(\omega_+) = F(\omega_+, \varphi(\omega_+)) \quad \text{e} \quad \psi'(\omega_+) = F(\omega_+, \psi(\omega_+)).$$

Note-se $\varphi(\omega_+) = \psi(\omega_+)$. Logo, as derivadas laterais de Z em ω_+ coincidem.

Donde Z é derivável em ω_+ e $Z'(\omega_+) = F(\omega_+, \varphi(\omega_+)) = F(\omega_+, Z(\omega_+))$.

Já destacamos acima que $\varphi = Y$ em (ω_-, ω_+). Portanto valem as identidades $Z(t_0) = \varphi(t_0) = Y(t_0) = x_0$.

Concluímos então que Z resolve o problema

$$\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \text{ se } t \in (\omega_-, \omega_+ + r) \\ Z(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Obtemos então $(\omega_-, \omega_+ + r) \subset (\omega_-, \omega_+)$ ↯

(3) Segue trivialmente de (1). Cheque.

(4) Dividamos a prova em três casos.

O caso $\omega_+ = +\infty$. Como K é limitado, existe $\tau > 0$ tal que para todo (t, x) em K temos $t < \tau$. Assim, para todo $t \geq \tau$ segue $(t, Y(t)) \in (I \times \Omega) \smallsetminus K$.

O caso $\omega_- = -\infty$. Análogo ao caso acima.

O caso ω_- e ω_+ finitos. O teorema de Picard (terceira afirmação) garante um raio $\rho > 0$ tal que para toda condição inicial $(\alpha, \beta) \in K$ existe uma única solução de $x' = F(t, x)$, com $x(\alpha) = \beta$, definida no intervalo $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$.

Fixemos um ponto $(\alpha, Y(\alpha)) \in K$. Existe um caminho φ satisfazendo

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \text{ em } (\alpha - \rho, \alpha + \rho), \text{ com } \varphi(\alpha) = Y(\alpha).$$

A primeira afirmação do *teorema solução maximal* garante $\varphi = Y$ na intersecção $(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \cap (\omega_-, \omega_+) \neq \emptyset$. Assim, podemos estender Y ao intervalo união $(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \cup (\omega_-, \omega_+)$. Porém, (ω_-, ω_+) é intervalo maximal. Seguem

$$(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \subset (\omega_-, \omega_+), \quad \text{e então} \quad \alpha \geq \omega_- + \rho \ \text{ e } \ \alpha \leq \omega_+ - \rho.$$

Estas duas últimas desigualdades implicam

$$\begin{cases} (\alpha, Y(\alpha)) \notin K \text{ se } \alpha < \omega_- + \rho \\ \text{e} \\ (\alpha, Y(\alpha)) \notin K \text{ se } \alpha > \omega_+ - \rho \clubsuit \end{cases}$$

2.4 - DEPENDÊNCIA CONTÍNUA (SISTEMA NÃO LINEAR)

Teorema (Continuidade do Fluxo, ou Dependência Contínua da Família de Todas as Soluções). *Seja $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com $F = F(t,x)$ contínua e de Lipschitz na segunda variável. Dado $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, indiquemos a solução maximal do problema*

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

por $x(t, t_0, x_0)$, devido à dependência na condição inicial. Variando (t_0, x_0), seja

$$D_F = \{(t, t_0, x_0) \in I \times I \times \Omega : t \in (\omega_-(t_0,x_0), \omega_+(t_0,x_0))\}.$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

- *O conjunto D_F é aberto.*
- *A aplicação* fluxo *$(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$, da edo, é contínua em D_F.*
- *Consideremos um intervalo compacto $J \subset (\omega_-(t_0,x_0), \omega_+(t_0,x_0))$. Existe uma vizinhança V do ponto (t_0, x_0) tal que $x(\cdot,\cdot,\cdot)$ está definida em $J \times V$. Dada uma sequência $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$, então a sequência de caminhos $x(t, t_n, x_n)$ converge uniformemente ao caminho $x(t, t_0, x_0)$ no intervalo J.*

Prova. Adaptada de Sotomayor [11, pp. 34–37], a um caso mais simples.

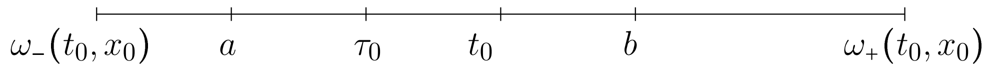
Podemos supor F limitada e a constante de Lipschitz L satisfazendo $|F| < L$. [Cheque.]

- ⋄ D_F é aberto. Dividamos a prova desta afirmação em três partes.
- ⋄ Notações. Fixemos um ponto $(\tau_0, t_0, x_0) \in D_F$.

  Fixemos uma sequência $(t_n, x_n)_{n \geq 1}$ no aberto $I \times \Omega$ e convergente a (t_0, x_0). Consideremos a sequência de caminhos $\varphi_n = x(t, t_n, x_n)$, onde $n \geq 0$.

  Consideremos um intervalo $[a, b]$ tal que

$$\{\tau_0, t_0\} \subset (a,b) \subset [a,b] \subset (\omega_-(t_0,x_0), \omega_+(t_0,x_0)).$$



O trecho de gráfico $\{(t,\varphi_0(t)) : t \in [a,b]\}$ é um compacto no aberto $I \times \Omega$. Existe (vide argumentação abaixo) um compacto K satisfazendo

$$\{(t,\varphi_0(t) : t \in [a,b]\} \subset \text{interior}(K) \subset K \subset I \times \Omega.$$

[Para cada $(t,\varphi_0(t))$, onde $t \in [a,b]$, existe um raio $r_t > 0$ com o disco fechado $D((t,\varphi(t)),r_t) \subset I \times \Omega$. As bolas abertas $B((t,\varphi(t)),r_t)$ cobrem tal trecho de gráfico. Por compacidade, existe uma sub-cobertura finita por bolas abertas $B_1,\ldots,B_N$. Seja $K = D_1,\ldots,D_N$, onde D_j é o fecho de B_j.]

Similarmente, existe um compacto K_0 tal que $K \subset \text{interior}(K_0) \subset K_0 \subset I \times \Omega$. Segue

$$\{(t,\varphi_0(t) : t \in [a,b]\} \subset \text{interior}(K) \subset K \subset \text{interior}(K_0) \subset K_0 \subset I \times \Omega.$$

Seja $M = \sup\{|F(t,x)| : (t,x) \in K_0\}$.

- Mostremos que **para n grande, φ_n está definida em $[a,b]$ e $\varphi_n \xrightarrow{\text{uniforme}} \varphi_0$.**

Sabemos, pelo *teorema de Picard (terceira afirmação)*, que existe um raio $\rho > 0$ tal que para todo ponto $(\alpha,\beta) \in K$ o problema

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(\alpha) = \beta, \end{cases}$$

tem solução (única) em $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ e com gráfico no compacto K_0.

Fixemos $\epsilon > 0$ com

$$\epsilon < \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2L}\right\}.$$

O ponto (t_0,x_0) está no trecho de gráfico de φ_0 sob análise e em interior(K).

Logo, existe n_1 tal que para todo $n > n_1$ temos $(t_n,x_n) \in K$ e $\boxed{|t_n - t_0| < \epsilon}$.

Dado $n > n_1$, o caminho φ_n está definido para t tal que $|t - t_0| \le \epsilon$. Pois, para $n > n_1$, o caminho φ_n está definido para t tal que $|t - t_n| < \rho$.

Se $n > n_1$, o gráfico de φ_n restrita a $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ está contido em K_0.

Indiquemos por $\|\cdot\|$, a norma do sup no espaço vetorial

$$C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n) = \{\gamma : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \to \mathbb{R}^n, \text{ com } \quad \gamma \text{ contínua}\}.$$

Sejam $n > n_1$, $m > n_1$ e $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. A desigualdade triangular para integrais mostra

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)| &= \left| x_n + \int_{t_n}^{t} F(s,\varphi_n(s))ds - x_m - \int_{t_m}^{t} F(s,\varphi_m(s))ds \right| \\
&\leq |x_n - x_m| + \left| \int_{t_n}^{t_m} F(s,\varphi_n(s))ds \right| + \left| \int_{t_m}^{t} [F(s,\varphi_n(s)) - F(s,\varphi_m(s))]ds \right| \\
&\leq |x_n - x_m| + M|t_n - t_m| + 2\epsilon L \|\varphi_n - \varphi_m\|.
\end{aligned}
$$

Donde segue

$$
\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \frac{|x_n - x_m| + M|t_n - t_m|}{1 - 2\epsilon L}, \text{ com } 1 - 2\epsilon L > 0.
$$

Isto mostra que a sequência $(\varphi_n)_{n>n_1}$ converge uniformemente ao longo do intervalo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ a alguma função, a qual denotamos φ.

Para $n > n_1$ e $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, escrevamos

$$
\varphi_n(t) = x_n + \int_{t_n}^{t} F(s,\varphi_n(s))ds.
$$

Impondo $n \to \infty$ segue (cheque)

$$
\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi(s))ds.
$$

Logo, φ satisfaz $\varphi' = F(t,\varphi)$ e $\varphi(t_0) = x_0$. Segue $\varphi = \varphi_0$ em $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

Até aqui, mostramos que φ_n converge uniformemente a φ_0 em $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

Se $t_0 + \epsilon \leq b$, reprisando o argumento acima para as sequências

$$
\begin{cases}
\tau_n = t_0 + \epsilon \text{ e } \xi_n = \varphi_n(t_0 + \epsilon), \\
\text{com } (\tau_n, \xi_n) \longrightarrow (t_0 + \epsilon, \varphi_0(t_0 + \epsilon),
\end{cases}
$$

vemos que existe um índice n_2 tal que para todo $n > n_2$, o caminho φ_n está definido em $[t_0 - \epsilon, t_0 + 2\epsilon]$ e converge uniformemente a φ_0 neste intervalo. A afirmação é análoga para $t_0 - \epsilon$.

Após um quantidade finita de etapas (avançamos ϵ a cada etapa) concluímos que existe um índice N tal que para todo $n > N$, o caminho φ_n está definido em $[a,b]$ e converge uniformemente a φ_0 em $[a,b]$.

$\diamond$ Conclusão de D_F é aberto. Vimos que dada $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$, então valem

$$\begin{cases} \text{o caminho } \varphi_n(t) = \varphi(t, t_n, x_n) \text{ está definido em } [a,b], \text{ para } n \text{ grande} \\ \text{e} \\ \varphi_n \text{ converge uniformemente a } \varphi_0 \text{ em } [a,b]. \end{cases}$$

Argumentando por contraposição, concluímos (cheque) o que segue. Dado $\eta > 0$, existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) tal que para todo $(\bar{t}, \overline{x}) \in V$ temos

$$\begin{cases} (A) \ - \ \text{a função } \varphi(t, \bar{t}, \overline{x}) \text{ definida em } [a,b] \\ \text{e} \\ (B) \ - \ \text{a desigualdade } |\varphi(t, \bar{t}, \overline{x}) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \eta \text{ para todo } t \in [a,b]. \end{cases}$$

[Dica. Verifique primeiro (A).] Pela afirmação (A), segue $[a,b] \times V \subset D_F$.

Isto prova que D_F é aberto, pois $[a,b] \times V$ é uma vizinhança de (τ_0, t_0, x_0).

$\diamond$ A continuidade. Mantenhamos a notação acima. Indiquemos a variável no produto cartesiano $[a,b] \times V$ pela terna $(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x})$. Pela afirmação (B) segue

$$\begin{aligned} |\varphi(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x}) - \varphi(\tau_0, t_0, x_0)| &\leq |\varphi(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x}) - \varphi(\overline{\tau}, t_0, x_0)| + |\varphi(\overline{\tau}, t_0, x_0) - \varphi(\tau_0, t_0, x_0)| \\ &< \eta + |\varphi(\overline{\tau}, t_0, x_0) - \varphi(\tau_0, t_0, x_0)|. \end{aligned}$$

Por fim, a continuidade do caminho

$$\overline{\tau} \longmapsto \varphi(\overline{\tau}, t_0, x_0) \text{ em } \overline{\tau} = \tau_0$$

assegura a continuidade de

$$(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x}) \longmapsto \varphi(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x})$$

no ponto (τ_0, t_0, x_0)

$\diamond$ Terceira (e quarta) afirmações. A terceira segue da prova acima (cheque, vide "conclusão de D_F é aberto"). Segue também, e mais claramente, do fato que D_F é aberto e da compacidade do intervalo J (cheque).

A quarta afirmação foi provada acima, vide "conclusão de D_F é aberto"♣

Teorema (Dependência Contínua - Estimativa Básica). *Consideremos $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, com $F = F(t,x)$ contínua e de Lipschitz na variável x, com constante de Lipschitz L. Sejam $\varphi = x(t,t_0,x_0)$ e $\psi = x(t,t_0,y_0)$ dois caminhos soluções da edo*

$$x' = F(t,x)$$

definidas em $[a,b]$ (o qual podemos supor contendo t_0). Vale a desigualdade

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}, \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Prova.

- O intervalo maximal de φ e também o de ψ contém $[a,b]$ e o ponto t_0. Podemos então supor $[a,b]$ grande o suficiente tal que $t_0 \in [a,b]$.

- O caso $t \in [t_0,b]$. Seja $\langle \cdot,\cdot \rangle$, o produto interno em $\mathbb{R}^n$. Estimemos

  $$d(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|^2, \text{ onde } t \in [t_0,b].$$

  Temos $d' = 2\langle \varphi - \psi, \varphi' - \psi' \rangle = 2\langle \varphi - \psi, F(t,\varphi) - F(t,\psi) \rangle$.

  Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e a constante de Lipschitz, segue

  $$d' \leq 2L|\varphi - \psi|\,|\varphi - \psi| = 2Ld.$$

  Donde obtemos $e^{-2Lt}d' - 2Le^{-2Lt}d \leq 0$ e a derivada negativa $[e^{-2Lt}d]' \leq 0$. Portanto temos $e^{-2Lt}d(t) \leq e^{-2Lt_0}d(t_0)$ para todo $t \in [t_0,b]$ e assim

  $$d(t) \leq e^{2L(t-t_0)}d(t_0).$$

  Concluímos então $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |x_0 - y_0|e^{L(t-t_0)}$, para todo $t \in [t_0,b]$.

- O caso $t \in [a,t_0]$. Seja $y(\tau) = \varphi(-\tau)$, onde $\tau \in [-t_0,-a]$. Então temos

  $$y'(\tau) = -\varphi'(-\tau) = -F(-\tau,\varphi(-\tau)) = -F(-\tau,y(\tau)).$$

  Analogamente para $z(\tau) = \psi(-\tau)$. Pelo caso anterior [para $-F(-\tau,x)$] segue

  $$|y(\tau) - z(\tau)| \leq |y(-t_0) - z(-t_0)|e^{L(\tau+t_0)}.$$

  Para cada $t \in [a,t_0]$ obtemos

  $$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\varphi(t_0) - \psi(t_0)|e^{L(-t+t_0)} = |x_0 - y_0|e^{L|t-t_0|} ♣.$$

2.5 - DEPENDÊNCIA DIFERENCIÁVEL (SISTEMA NÃO LINEAR)

Introdução e notações.

Matrizes. Dada uma matriz A, seja A^T sua transposta. Fixemos a base canônica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$. Identifiquemos um vetor $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n \in \mathbb{R}^n$ pelas suas coordenadas dispostas numa matriz-coluna em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Isto é,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^T = (v_1, \ldots, v_n).$$

Indiquemos por $u \cdot v$, o produto interno de dois vetores u e v, ambos em $\mathbb{R}^n$. Indiquemos por AB o produto (se existir) de duas matrizes reais A e B.

Seja $L(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das transformações lineares definidas em $\mathbb{R}^n$ e a valores em $\mathbb{R}^n$ (i.e., o espaço dos operadores lineares em $\mathbb{R}^n$). Pelo isomorfimo fundamental em álgebra linear, identificamos as transformações em $L(\mathbb{R}^n)$ com o espaço vetorial das matrizes quadradas em $M_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Suponhamos que $A = (a_{ij})$ é uma matriz real quadrada de ordem n. Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear associado à matriz A. Identificando o vetor Sv por suas coorenadas em relação à base canônica segue

$$Sv = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$Se_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Se_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Portanto, o vetor Se_j e a j-ésima coluna da matriz A são correspondentes.

Seja A^j a j-ésima linha de A. Segue

$$Sv = \begin{pmatrix} A^1 \cdot v \\ \vdots \\ A^n \cdot v \end{pmatrix}.$$

Isto é, a j-ésima coordenada de Sv é dada pelo produto interno da j-ésima linha de A (identificada como um vetor em $\mathbb{R}^n$) pelo vetor v.

Definição. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se dados quaisquer $a \in X$ e $b \in X$, então o segmento linear $\{a + s(b-a) : 0 \le s \le 1\}$ está contido em X.

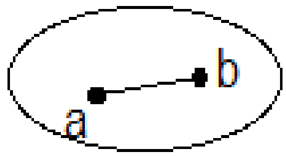


Figura 5: Conjunto convexo.

No que segue, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é a variável em $\mathbb{R}^n$.

Lema (TVM na forma integral, para campos escalares). Seja Ω um aberto convexo em $\mathbb{R}^n$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ um campo escalar continuamente diferenciável. Dados dois pontos a e b, ambos em Ω, temos

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \left\{\nabla f(a + s(b-a)) \cdot (b-a)\right\} ds = \left\{\int_0^1 \nabla f(a + s(b-a)) ds\right\} \cdot (b-a).$$

Prova.

Segue do teorema fundamental do cálculo, da regra da cadeia e do cômputo

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\left\{f(a+s(b-a))\right\} ds \\
&= \int_0^1 \nabla f(a + s(b-a)) \cdot (b-a)\, ds \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s(b-a))(b_i - a_i) ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + s(b-a))(b_i - a_i) ds \\
&= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + s(b-a)) ds, \ldots, \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + s(b-a)) ds\right) \cdot (b-a) \\
&= \int_0^1 \nabla f(a + s(b-a)) ds \cdot (b-a) \clubsuit
\end{aligned}$$

Mantida a notação acima, notemos que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \nabla f(a) \cdot e_k, \text{ para quaisquer } a \in \Omega \text{ e } k = 1, \ldots, n.}$$

Seja $G:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com derivadas parciais contínuas. Pomos $G = (G_1, \ldots, G_n)^T$ com G_j a j-ésima componente da função G. A matriz jacobiana de G é

$$JG = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

As linhas da matriz jacobiana JG correspondem aos gradientes $\nabla G_1, \ldots, \nabla G_n$. As colunas de JG correspondem às derivadas parciais $\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n}$. Assim,

$$JG = \begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \vdots \\ \nabla G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} \\ \\ \\ \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_n} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Consideremos dois pontos $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Temos então

$$G(b) - G(a) = \begin{pmatrix} G_1(b) - G_1(a) \\ \vdots \\ G_n(b) - G_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{d}{ds}\{G_1(a + s(b-a))\} ds \\ \vdots \\ \int_0^1 \frac{d}{ds}\{G_n(a + s(b-a))\} ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^1 \nabla G_1(a + s(b-a)) \cdot (b-a)\, ds \\ \vdots \\ \int_0^1 \nabla G_n(a + s(b-a)) \cdot (b-a)\, ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{\int_0^1 \nabla G_1(a + s(b-a))\, ds\right\} \cdot (b-a) \\ \vdots \\ \left\{\int_0^1 \nabla G_n(a + s(b-a))\, ds\right\} \cdot (b-a) \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\int_0^1 JG(a + s(b-a))\, ds\right\} (b-a).$$

$$= \int_0^1 JG(a + s(b-a)) \cdot (b-a)\, ds.$$

Definimos então

$$\widehat{G}(a,b) = \int_0^1 JG(a + s(b-a))\, ds.$$

Segue

$$G(b) - G(a) = \widehat{G}(a,b)(b-a).$$

Com tais notações, provemos então o lema abaixo.

Lema (TVM na Forma Integral). *Seja* $F = F(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, *com* I *um intervalo aberto na reta e* Ω *um aberto convexo em* $\mathbb{R}^n$. *Suponha que a matriz*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = D_2F(t,x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

é contínua em $I \times \Omega$. *Então, existe uma função*

$$\widehat{F} : I \times \Omega \times \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n) \equiv M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$$

contínua e satisfazendo as condições abaixo.

$$\widehat{F}(t,x,x) = D_2F(t,x), \ \textit{para todo } (t,x) \in I \times \Omega.$$

$$F(t,b) - F(t,a) = \widehat{F}(t,a,b)(b-a) \ \textit{para quaisquer } t \in I, a \in \Omega \ \textit{e } b \in \Omega.$$

Prova.

Seja

$$\widehat{F}(t,a,b) = \int_0^1 D_2F(t,a+s(b-a))\,ds.$$

É claro que $\widehat{F}(t,x,x) = D_2F(t,x)$ para todo $(t,x) \in I \times \Omega$.

Pelos comentários acima segue

$$F(t,b) - F(t,a) = \widehat{F}(t,a,b)(b-a).$$

Pela continuidade da integral dependente de um parâmetro segue que a aplicação $\widehat{F} = \widehat{F}(t,a,b)$ é contínua em $I \times \Omega \times \Omega$. [Vide
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`]♣

Teorema (Derivada Parcial do Fluxo em Relação à Variável Espacial). *Seja $F = F(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde I um intervalo aberto na reta e Ω é um aberto em $\mathbb{R}^n$, com as funções F e $D_2F(t,x)$ contínuas e de Lipschitz na segunda variável. Então, a solução $x = x(t,t_0,x_0)$ de*

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite derivada parcial $D_3x(t,t_0,x_0)$ com relação a x_0. Ainda mais, a aplicação

$$(t,t_0,x_0) \longmapsto D_3x(t,t_0,x_0)$$

é contínua em seu domínio $D_F = \{(t,t_0,x_0) : (t_0,x_0) \in \Omega \text{ e } t \in (\omega_-(t_0,x_0), \omega_+(t_0,x_0))\}$ e a k-ésima derivada parcial (espacial)

$$y(t) = D_3x(t,t_0,x_0)e_k = \frac{\partial x}{\partial x_0^k}(t,t_0,x_0)$$

é, para cada $k = 1,\ldots,n$, solução do problema

$$P_{(J,0)} \quad \begin{cases} y'(t) = J(t)y(t) \\ y(t_0) = e_k, \end{cases} \qquad \text{onde } J(t) = J(t,t_0,x_0) = D_2F(t,x(t,t_0,x_0)).$$

Prova. Dividida em oito partes: Notações e simplificações, Caminho inicial φ_0, Aproximando φ_0, Busca pela derivada parcial de φ_0, Eliminando o parâmetro, Condições de Lipschitz, Encontrando a derivada parcial e Continuidade.

- Notações e simplificações. Fixemos e_k, o k-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$.

  Consideremos um ponto $(t_1,x_1) \in I \times \Omega$ e um intervalo compacto e não degenerado $[a,b] \subset (\omega_-(t_1,x_1), \omega_+(t_1,x_1))$. Pelo *Teorema continuidade do fluxo (dependência contínua da família de todas as soluções)*, terceira afirmação, existe uma vizinhança $V = V(t_1,x_1)$ tal que a função em três variáveis

  $$x = x(t,t_0,x_0) \text{ está definida e é contínua em } [a,b] \times V(t_1,x_1).$$

  Ainda mais, pela mesma afirmação, podemos supor que os gráficos dos caminhos $x = x(t,t_0,x_0)$ estão dentro de um compacto contido em $I \times \Omega$.

  Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $I \times \Omega$ é limitado.

  Seja $\|\cdot\|$ a norma do sup para funções contínuas definidas em $[a,b]$.

- **Caminho inicial** φ_0. Sejam $(t_0, x_0) \in V$ e o caminho $\varphi_0(t) = x(t, t_0, x_0)$. O conjunto $\varphi_0([a,b])$ é compacto em Ω. Logo, existe um número (distância) $2d > 0$ tal que distância$(\varphi_0([a,b]), \partial\Omega) = 2d$. Para todo $t \in [a,b]$ temos

$$D(\varphi_0(t), d) \subset \Omega.$$

- **Aproximando** φ_0. Para h real e $|h| \leq r$, onde $r > 0$ é pequeno, seja o caminho

$$\varphi_h(t) = x(t, t_0, x_0 + he_k).$$

O teorema *continuidade do fluxo (dependência contínua da família das soluções)*, primeira e segunda afirmações, garante a continuidade da aplicação $(t,h) \mapsto \varphi_h(t) = x(t, t_0, x_0 + he_k)$. Pelo mesmo teorema, terceira e quarta afirmações, segue

$$\varphi_h(t) \xrightarrow{\text{uniforme em } [a,b]} \varphi_0(t) \text{ para } h \to 0.$$

Podemos supor que r é pequeno o suficiente para que $\|\varphi_h - \varphi_0\| \leq d$ se $|h| \leq r$.

O ponto $\varphi_h(t)$ pertence ao convexo $D(\varphi_0(t), d) \subset \Omega$ se $|h| \leq r$ e $t \in [a,b]$. Assim, pelo lema *TVM na forma integral* e sua notação obtemos (**cheque**)

$$\begin{aligned}(\varphi_h - \varphi_0)'(t) &= F(t, \varphi_h(t)) - F(t, \varphi_0(t)) \\ &= \widehat{F}(t, \varphi_0(t), \varphi_h(t))[\varphi_h(t) - \varphi_0(t)],\end{aligned}$$

com a função $\widehat{F}$ contínua.

- **Busca pela derivada parcial de** φ_0. Suponhamos $h \neq 0$. Então, o caminho

$$y_h = \frac{\varphi_h - \varphi_0}{h}$$

[o limite de y_h, para $h \to 0$, "será" a derivada parcial] satisfaz a condição

$$y_h(t_0) = \frac{\varphi_h(t_0) - \varphi_0(t_0)}{h} = \frac{x_0 + he_k - x_0}{h} = e_k,$$

a equação diferencial

$$(y_h)' = \left(\frac{\varphi_h(t) - \varphi_0(t)}{h}\right)' = \widehat{F}(t, \varphi_0(t), \varphi_h(t)) \left(\frac{\varphi_h(t) - \varphi_0(t)}{h}\right)$$

e portanto o problema linear (dependente do parâmetro h) definido por

$$P_{(J,h)} \quad \begin{cases} y' = J(t,h)y \\ y(t_0) = e_k, \end{cases} \qquad \text{onde} \quad J(t,h) = \widehat{F}(t, \varphi_0(t), \varphi_h(t)).$$

Pela continuidade de $\widehat{F}$ e de $(t,h) \mapsto \varphi_h(t) = x(t, t_0, x_0 + he_k)$ segue a continuidade de $(t,h) \mapsto J(t,h)$. Pelo lema *TVM na forma integral* encontramos

$$J(t,0) = \widehat{F}(t, \varphi_0(t), \varphi_0(t)) = D_2F(t, \varphi_0(t)) = D_2F(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Portanto, com a notação no enunciado deste teorema encontramos

$$\boxed{J(t,0) = J(t).}$$

Assim, para $h = 0$, a equação $P_{(J,h)}$ acima coincide com $P_{(J,0)}$ no enunciado.

◇ Eliminando o parâmetro h na equação diferencial $y' = J(t,h)y$, escrevamos $Y = (y, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} Y' = (J(t, y_{n+1})y, 0), \\ Y(t_0) = (e_k, h). \end{cases}$$

A aplicação

$$\Phi(t, Y) = \Phi(t, y, y_{n+1}) = (J(t, y_{n+1})y, 0)$$

é contínua ($J : [a,b] \times [-r,r] \to \mathbb{R}^n$ é contínua). Passemos então ao problema

$$P_{(\Phi,h)} \quad \begin{cases} Y' = \Phi(t,Y), \\ Y(t_0) = (e_k, h). \end{cases}$$

◇ Condições de Lipschitz. Provemos que Φ é de Lipschitz na variável Y. Temos

$$\begin{aligned} |\Phi(t,Y) - \Phi(t,Z)| &= |J(t, y_{n+1})y - J(t, z_{n+1})z)| \\ &\leq |J(t, y_{n+1})y - J(t, y_{n+1})z| + |J(t, y_{n+1})z - J(t, z_{n+1})z)| \\ &\leq |J(t, y_{n+1})||y - z| + |J(t, y_{n+1}) - J(t, z_{n+1})||z|. \end{aligned}$$

A continuidade de $J : [a,b] \times [-r,r] \to \mathbb{R}^n$ garante um $M > 0$ majorando $|J|$. Como $I \times \Omega$ é limitado, existe $C > 0$ tal que $|z| \leq C$ para todo $z \in \Omega$. Segue

$$|\Phi(t,Y) - \Phi(t,Z)| \leq M|y - z| + C|J(t, y_{n+1}) - J(t, z_{n+1})|.$$

Mostremos que $J(t,h) = \widehat{F}(t, \varphi_0(t), \varphi_h(t))$ é de Lipschitz na segunda variável.

De fato, temos

$$J(t,h_1) - J(t,h_2) =$$

$$\int_0^1 \Big\{ D_2F[t,\varphi_0(t) + s(\varphi_{h_1}(t) - \varphi_0(t))] - D_2F[t,\varphi_0(t) + s(\varphi_{h_2}(t) - \varphi_0(t))] \Big\} ds.$$

Como D_2F é de Lipschitz na segunda variável (podemos supor que a constante de Lipschitz é L) então temos

$$|J(t,h_1) - J(t,h_2)| \leq \int_0^1 Ls|\varphi_{h_1}(t) - \varphi_{h_2}(t)|ds \leq L|\varphi_{h_1}(t) - \varphi_{h_2}(t)|.$$

Pelo teorema *dependência contínua - estimativa básica* sabemos que

$$\begin{aligned} |\varphi_{h_1}(t) - \varphi_{h_2}(t)| &\leq |\varphi_{h_1}(t_0) - \varphi_{h_2}(t_0)|e^{L|t-t_0|} \\ &= |x_0 + h_1e_k - x_0 - h_2e_k|e^{L(b-a)} \\ &= |h_1 - h_2|e^{L(b-a)}. \end{aligned}$$

Donde segue que a função $J = J(t,h)$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$|J(t,h_1) - J(t,h_2)| \leq Le^{L(b-a)}|h_1 - h_2|.$$

Isto prova que existe $C_1 > 0$ tal que Φ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\begin{aligned} |\Phi(t,Y) - \Phi(t,Z)| &\leq M|y - z| + CLe^{L(b-a)}|y_{n+1} - z_{n+1}| \\ &\leq C_1|Y - Z|. \end{aligned}$$

- ◇ Encontrando a derivada parcial. Pelo teorema *continuidade do fluxo (dependência contínua da família de todas as soluções)* vemos que as soluções Y_h do problema $P_{(\Phi,h)}$ convergem uniformemente à solução Y_0 de $P_{(\Phi,0)}$.

  Assim, as soluções y_h do problema $P_{(J,h)}$ convergem uniformemente à solução y_0 do problema $P_{(J,0)}$, pois $J(t,0) = J(t)$. Isto mostra que existe a derivada parcial

  $$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0^k}(t,t_0,x_0) \quad \text{e satisfazendo} \quad P_{(J,0)}.$$

- ◇ Continuidade (da derivada parcial). Utilizando o teorema *continuidade do fluxo (dependência contínua da família de todas as soluções)*, basta ver que

  $$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0^k} \text{ satisfaz } \begin{cases} y' = J(t)y \\ y(t_0) = e_k, \end{cases}$$

  e que a $(t,y) \mapsto J(t)y$ é contínua e de Lipschitz na segunda variável♣

3 - SISTEMAS LINEARES, COEFICIENTES NÃO CONSTANTES

3.1 - Introdução

Dada uma matriz A, seja A^T sua transposta. Fixemos a base canônica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$. Identifiquemos um vetor $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n \in \mathbb{R}^n$ pelas suas coordenadas dispostas como uma matriz-coluna. Isto é,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^T = (v_1, \ldots, v_n).$$

Indiquemos por $u \cdot v$, o produto interno de dois vetores u e v, ambos em $\mathbb{R}^n$. Indiquemos por AB o produto (se existir) de duas matrizes reais A e B.

Seja $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes retangulares, de ordem $m \times n$ e reais. Identificando $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{mn}$, adotemos em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a norma euclidiana de $\mathbb{R}^{mn}$. Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, identifiquemos suas linhas $A^1, \ldots, A^m$ com vetores em $\mathbb{R}^n$ e suas colunas $A_1, \ldots, A_n$ com vetores em $\mathbb{R}^m$.

Seja $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Então, pela *desigualdade de Cauchy-Schwartz* para o produto interno em $\mathbb{R}^n$ encontramos

$$|AB|^2 = \sum_{i,j} |A^i \cdot B_j|^2 \leq \sum_{i,j} |A^i|^2 \, |B_j|^2 = |A|^2 \, |B|^2$$

e então

$$\boxed{|AB| \leq |A| \, |B|}.$$

Seja $M_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Em particular, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n \equiv M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ temos

$$\boxed{|Av| \leq |A| \, |v|.}$$

Lema (Continuidade do produto matricial). *É contínua a função produto*

$$(A, B) \longmapsto AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), \text{ onde } A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \text{ e } B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}).$$

Prova.

Sejam $H \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $K \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. A afirmação segue de

$$|(A + H)(B + K) - AB| \leq |A||K| + |H||B| + |H||K| \clubsuit$$

Dado um intervalo aberto I, segue que uma função

$$A = A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} : I \to M_n(\mathbb{R})$$

é contínua se e somente se cada função coordenada $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ é contínua [cheque, note que $|a_{ij}(t+h) - a_{ij}(t)| \leq |A(t+h) - A(t)| \leq \sum_{kl} |a_{kl}(t+h) - a_{kl}(t)|$].

Sistema linear. Um sistema linear de edos tem a forma

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

onde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

com t em um intervalo aberto I e funções $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ e $b_i : I \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i, j \leq n$.

Ao longo desta seção as funções $A(t)$ e $b(t)$ são contínuas.

Um caminho $x : J \to \mathbb{R}^n$, onde J é um intervalo contido em I, é uma solução do sistema linear $x' = A(t)x + b(t)$ se temos

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \text{ para todo } t \in J.$$

Mostraremos que toda solução está definida em todo o intervalo aberto I.

Estamos interessados em resolver o problema com valor inicial

$$(PVI) \begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Se $b = b(t)$ é a função (vetorial) nula, o sistema é dito sistema homogêneo.

Se $A(t) = A$ é uma função constante (a constante é uma matriz), o sistema é denominado sistema linear com coeficientes constantes.

É trivial ver que se x_1 e x_2 são soluções do sistema linear homogêneo

$$x' = A(t)x,$$

definidas em um mesmo intervalo e λ é um número real então

$$(x_1 + x_2)' = A(t)(x_1 + x_2) \text{ e } (\lambda x_1)' = A(t)(\lambda x_1).$$

Isto é, o conjunto das soluções do sistema $x' = A(t)x$ é um espaço vetorial.

3.2 - Teorema de Picard (Sistemas Lineares)

Teorema (Existência e Unicidade para Sistemas Lineares de EDO's). *Sejam $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ contínuas, onde I é um intervalo aberto. Consideremos um ponto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Então, o problema*

$$(PVI) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tem uma e somente uma solução, a qual está definida em todo o intervalo I.

Prova. Dividamos a prova em duas partes: existência e unicidade.

- Existência. Fixemos um intervalo $[a, b]$ arbitrário e satisfazendo

$$t_0 \in (a, b) \subset [a, b] \subset I.$$

Indiquemos por $\|\cdot\|$, as normas do sup em $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ e em $C([a, b], M_n(\mathbb{R}^n))$. O PVI é equivalente a (cheque)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds.$$

Definamos, no intervalo $[a, b]$, a sequência de caminhos

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \text{ (função constante)}, \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]ds. \end{cases}$$

Fixado $t \in [a, b]$, temos

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)[x_n(s) - x_{n-1}(s)]ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s) \left\{ \int_{t_0}^{s} A(\tau)[x_{n-1}(\tau) - x_{n-2}(\tau)]d\tau \right\} ds.$$

Assim, dado $t \in [t_0, b]$ encontramos

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|A\|^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|(s - t_0)ds \le \frac{(t - t_0)^2 \|A\|^2}{2} \|x_{n-1} - x_{n-2}\|.$$

Mostremos então, por indução, a fórmula

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{|t-t_0|^n \|A\|^n}{n!}\|x_1 - x_0\|, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [a,b].$$

O caso $n = 0$ é trivial. Admitamos a fórmula para n. Temos então

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} A(s)[x_{n+1}(s) - x_n(s)]ds \right| \\
&\overset{\text{indução}}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} \|A\| \frac{(s-t_0)^n}{n!}\|A\|^n \|x_1 - x_0\| ds \right| \\
&= \frac{|t-t_0|^{n+1}\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Está provada a fórmula. Desta fórmula, chegamos à desigualdade

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{(b-a)^n \|A\|^n}{n!}\|x_1 - x_0\|.$$

Seja $\lambda = (b-a)\|A\|$. Dado $t \in [a,b]$ e um índice $m > n$, segue

$$\begin{aligned}
\|x_m(t) - x_n(t)\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \cdots + \|x_m - x_{m-1}\| \\
&\leq \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \cdots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \right) \|x_1 - x_0\|. \\
&= \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \cdots - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) \|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

Isto mostra que a sequência $(x_m(t))$ é de Cauchy e converge a um $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Impondo $m \to \infty$ (podemos, pois $m > n$) segue

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \cdots - \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) \|x_1 - x_0\|.$$

O lado direito tende a zero e independe de t. Logo, $x_n \xrightarrow{\text{unforme}} x$ em $[a,b]$.

Retornando a

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]ds, \text{ onde } t \in [a,b],$$

e utilizando a convergência uniforme de $x_n \to x$ concluímos que (cheque)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds, \text{ onde } t \in [a,b].$$

Pela arbitrariedade de $[a,b]$ [com $t_0 \in (a,b) \subset [a,b] \subset I$] está bem definida

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds, \text{ onde } t \in I.$$

Isto prova a existência de uma solução definida no intervalo aberto I.

$\diamond$ Unicidade. Suponhamos que $y : I \to \mathbb{R}^n$ também é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Seja $J = \{t \in I : y(t) = x(t)\}$. Temos que J é não vazio pois $t_0 \in J$. Como $x : I \to \mathbb{R}^n$ e $y : I \to \mathbb{R}^n$ são contínuas, então J é fechado em I (cheque).

Vejamos que J é aberto em I. Dado $\tau \in J$, fixemos um intervalo $[c,d]$ com

$$\tau \in (c,d) \subset [c,d] \subset I.$$

A função $A = A(t)$ é contínua em $[c,d]$ e portanto

$$\sup_{t\in[c,d]} |A(t)| = M \text{ é finito.}$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon M < 1$ e $[\tau-\epsilon, \tau+\epsilon] \subset [c,d]$. Dado $t \in [\tau-\epsilon, \tau+\epsilon]$ temos

$$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t [A(s)x(s) + b(s)]ds \ \text{ e } \ y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t [A(s)y(s) + b(s)]ds.$$

Para cada $t \in [\tau-\epsilon, \tau+\epsilon]$, a desigualdade triangular para integrais garante

$$|y(t) - x(t)| = \left| \int_\tau^t A(s)[y(s) - x(s)]ds \right| \le \epsilon M \sup_{[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]} |y(\cdot) - x(\cdot)|$$

Logo,

$$\sup_{[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]} |y(\cdot) - x(\cdot)| \le \epsilon M \sup_{[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]} |y(\cdot) - x(\cdot)|.$$

Por tal desigualdade e como $\epsilon M < 1$, obtemos

$$\sup_{[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]} |y(\cdot) - x(\cdot)| = 0.$$

Donde segue $y = x$ em $[\tau-\epsilon, \tau+\epsilon]$ e portanto J é aberto em I.

Pela conexidade de I concluímos $J = I$ ♣

Corolário (Dimensão do espaço-solução do sistema linear homogêneo). *Sejam $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ contínua, I um intervalo aberto, um ponto $t_0 \in I$ e a equação*

$$x' = A(t)x, \text{ para } x : I \to \mathbb{R}^n.$$

Vale o que segue.

- *O conjunto das soluções é um espaço vetorial de dimensão n.*
- *Uma base do espaço das soluções é $\{x_1, \ldots, x_n\}$ onde, para cada $j = 1, \ldots, n$, a solução x_j satisfaz a condição $x_j(t_0) = e_j$.*
- *Um conjunto de soluções $y_1, \ldots, y_r$ é LI se e só se $y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0)$ é LI.*

Prova. Abreviemos "teorema de existência e unicidade" por TEU.

◇ Primeira afirmação. Já vimos que toda solução está definida em I e que o conjunto das soluções é um espaço vetorial. Resta computar a dimensão.

Sejam S o espaço das soluções e a aplicação linear

$$\Phi : S \to \mathbb{R}^n \text{ dada por } \Phi(x) = x(t_0).$$

A parte "existência" em TEU (sistemas lineares) mostra Φ sobrejetora.

A parte "unicidade" no mesmo TEU mostra que Φ é injetora (cheque).

Portanto, Φ é um isomorfismo linear e a dimensão de S é n.

◇ Segunda afirmação. Basta considerar $x_j = \Phi^{-1}(e_j)$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

◇ Terceira afirmação. Como $\Phi : S \to \mathbb{R}^n$ é isomorfismo linear, então temos

$$\{y_1, \ldots, y_r\} \text{ LI } \iff \{\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_r)\} = \{y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0)\} \text{ LI} \clubsuit$$

3.3 - Matrizes Wronskiana e Fundamental - Abel-Liouville

Comentário (Colunas da Matriz Produto). Dada uma matriz $X \in M_n(\mathbb{R})$, denotamos X^j sua j-ésima linha e X_j sua j-ésima coluna. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ambas em $M_n(\mathbb{R})$. Segue

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \cdot B_1 & \cdots & A^1 \cdot B_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n \cdot B_1 & \cdots & A^n \cdot B_n \end{pmatrix}.$$

A j-ésima coluna de AB é (cheque)

$$\begin{pmatrix} A^1 \cdot B_j \\ \vdots \\ A^n \cdot B_j \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = b_{1j}A_1 + \cdots + b_{nj}A_n.$$

Isto é, vale a regra

$$\boxed{(AB)_j = AB_j.}$$

Assim, a j-ésima coluna de AB é dada pela combinação linear das colunas de A com os coeficientes da combinação na j-ésima coluna de B. Isto também pode ser visto identificando A a um operador T e B a um operador S. Neste caso temos

$$T(Se_j) = T(b_{1j}e_1 + \cdots + b_{nj}e_n) = b_{1j}Te_1 + \cdots + b_{nj}Te_n \clubsuit$$

Definição. A matriz wronskiana $W = W(t)$ associada ao conjunto ordenado de n caminhos-soluções $\{x_1, \ldots, x_n\}$ do sistema homogêneo $x' = A(t)x$, é dada por

$$W = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{com } x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \text{ a } j\text{-ésima solução.}$$

A coluna W_j corresponde à solução x_j. O determinante wronskiano é $\det W(t)$.

Escrevamos $A(t) = (a_{ij}(t))$. Temos $A(t)x_j = x_j'$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Pelos comentários em *colunas da matriz produto* segue

$$\begin{pmatrix} x_{11}' & \cdots & x_{1n}' \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}' & \cdots & x_{nn}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\boxed{W'(t) = A(t)W(t).}$$

Proposição (Determinante wronskiano, zeros e independência linear). *Mantenhamos as hipótese do corolário. Sejam n soluções $x_1, \ldots, x_n$ do sistema linear homogêneo*

$$x' = A(t)x, \text{ para } x : I \to \mathbb{R}^n.$$

Seja $W(t)$ a matriz wronskiana associada a tais soluções. São equivalentes as afirmações abaixo.

(a) *O conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é LI.*

(b) *O wronskiano $\det W(t)$ é não nulo em todo ponto de I*

(c) *O wronskiano $\det W(t)$ é não nulo em algum ponto de I.*

Prova.

As equivalências seguem do corolário *dimensão do espaço-solução do sistema homogêneo*, terceira afirmação. Cheque♣

Sejam $A : I \to M_n(\mathbb{R})$, com I um intervalo aberto, e a edo matricial

$$X'(t) = A(t)X(t), \text{ onde } X : I \to M_n(\mathbb{R}).$$

É trivial ver que uma função $X : I \to M_n(\mathbb{R})$ é uma solução de $X' = A(t)X$ se e somente se as colunas de X são caminhos-soluções do sistema linear homogêneo

$$x' = A(t)x, \text{ onde } x : I \to \mathbb{R}^n.$$

[De fato, o comentário *colunas da matriz produto* revela que vale a identidade $X' = A(t)X$ se e apenas se temos $X_j' = [A(t)X]_j = A(t)X_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$.]

Isto mostra que X é uma matriz wronskiana se e somente se $X' = A(t)X$.

Definição. Uma matriz fundamental (de soluções) para a edo linear e homogênea

$$x' = A(t)x, \text{ onde } x : I \to \mathbb{R}^n,$$

é uma matriz [de fato, uma função matricial] $X = X(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas $X_1, \ldots, X_n$ formam uma base de soluções para $x' = A(t)x$.

Seja X matriz fundamental para $x' = A(t)x$ e seja o problema com valor inicial

$$x' = A(t)x \text{ e } x(t_0) = x_0.$$

Então, X é matriz fundamental principal para tal problema se ocorre $X(t_0) = I$.

Proposição (Matriz Fundamental X Matriz Wronskiana). *Seja I um intervalo. Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ matrizes wronskianas do sistema linear homogêneo*

$$x' = A(t)x, \text{para } x : I \to M_n(\mathbb{R}),$$

sendo X fundamental. Vale o que segue.

- *Existe uma única matriz constante $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que temos*

$$Y(t) = X(t)C, \text{ para todo } t \in I.$$

- **Unicidade da fundamental.** *Y é fundamental se e só se C é inversível.*

Prova.

◇ Dado $j = 1, \ldots, n$, seja X_j a j-ésima coluna de X. Analogamente para Y.

◇ Primeira afirmação. Como X é fundamental, vale a existência e unicidade dos coeficientes (constantes reais) que satisfazem

$$Y_j = c_{1j}X_1 + \cdots + c_{nj}X_n, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n.$$

Pelo comentário *colunas da matriz produto* podemos escrever as n combinações lineares acima na forma matricial

$$Y = X \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

◇ Trivial (cheque)♣

Comentário. Dadas uma função arbitrária $X : I \to M_n(\mathbb{R})$ derivável no intervalo I e uma matriz constante $C \in M_n(\mathbb{R})$, temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{CX(t+h) - CX(t)}{h} = \lim_{h \to 0} C \left\{ \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right\} = CX'(t).$$

Isto é,

$$(CX)' = CX'.$$

Analogamente, $(XC)' = X'C$♣

Lema (Inversibilidade Local de Matrizes). *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, com A inversível. Existe uma bola aberta centrada em A tal que toda matriz nesta bola é inversível e, ainda, as inversas das matrizes nesta bola aberta são limitadas por uma mesma constante. Isto é, existe um raio $r > 0$ tal que para toda $H \in M_n(\mathbb{R})$ com $|H| \leq r$, temos*

$$A + H \text{ inversível e } |(A+H)^{-1}| \leq \frac{\sqrt{n}}{r}.$$

Prova. [Baseada em E. L. Lima, *Curso de Análise* Vol 2., p. 254.]

- Consideremos a norma euclidiana no espaço das matrizes e o raio

$$r = \frac{1}{2|A^{-1}|}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos $|x| = |A^{-1}Ax| \leq |A^{-1}||Ax|$. Donde segue $|Ax| \geq 2r|x|$.

A hipótese $|H| \leq r$ (e propriedades da norma em $M_n(\mathbb{R})$) garantem

$$|(A+H)x| \geq |Ax| - |Hx| \geq 2r|x| - |H||x| \geq 2r|x| - r|x| = r|x|.$$

Logo, $A + H$ é inversível (cheque). Para $x = (A+H)^{-1}e_j$, segue

$$|(A+H)^{-1}e_j| \leq \frac{1}{r}.$$

Logo,

$$|(A+H)^{-1}|^2 = \sum_j |(A+H)^{-1}e_j|^2 \leq \frac{n}{r^2} \clubsuit$$

Corolário (Continuidade da inversa da fundamental). *Mantenhamos as notações acima. Seja $X = X(t)$ fundamental para $x' = A(t)x$. Então, a matriz*

$$X^{-1} = X(t)^{-1} \text{ é contínua.}$$

Prova.

Fixemos um ponto t no domínio de X. Temos

$$X(t+h)[X^{-1}(t+h) - X^{-1}(t)] = [X(t) - X(t+h)]X^{-1}(t).$$

O lado direito tende a 0 se $h \to 0$, pois X é contínua. Para $|h|$ pequeno, o lema *inversibilidade local de matrizes* mostra que $X^{-1}(t+h)$ é limitada.

Utilizemos o lema *continuidade do produto matricial*. Multiplicando o lado esquerdo por $X^{-1}(t+h)$ segue (cheque)

$$|X^{-1}(t+h) - X^{-1}(t)| \xrightarrow{h\to 0} 0 \clubsuit$$

Teorema (Fórmula de Variação dos Parâmetros). *Sejam I um intervalo aberto, $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ contínua e $b : I \to \mathbb{R}^n$ contínua. Seja X uma matriz fundamental para o sistema linear e homogêneo*

$$x' = A(t)x, \text{ onde } x : I \to \mathbb{R}^n.$$

Então, a solução $x(t, t_0, x_0)$ do problema (não homogêneo)

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é dada por

$$x(t, t_0, x_0) = X(t)\left[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\, ds\right].$$

Prova.

- Pelo corolário *continuidade da inversa da (matriz) fundamental*, a fórmula enunciada está bem definida.
- Já vimos que $X' = A(t)X$.
- Fixemos t_0 e x_0. Seja $\varphi = \varphi(t)$ o lado direito da fórmula anunciada. Segue

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= X'(t)\left[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\, ds\right] + X(t)X^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)X(t)\left[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\, ds\right] + b(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + b(t). \end{aligned}$$

É claro que $\varphi(t_0) = x_0$. Portanto, φ é solução do problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pelo TEU segue $\varphi(t) = x(t, t_0, x_0)$♣

Comentário. Para chegar à fórmula acima, procure por uma solução φ da forma $\varphi(t) = X(t)C(t)$ para o problema $x' = A(t)x$, com $x(t_0) = x_0$. Cheque. Este procedimento justifica o nome "variação de parâmetros".

Definição. O traço de uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Lema (Derivada do determinante de um caminho matricial). *Sejam $X_1 : I \to \mathbb{R}^n, \ldots, X_n : I \to \mathbb{R}^n$ caminhos diferenciáveis. Então, a função*

$$f(t) = \det\left(X_1(t), \ldots, X_n(t)\right)$$

é diferenciável e

$$f'(t) = \sum_i \det(X_1, \ldots, X_i', \ldots, X_n).$$

Prova.

- Observemos que a função determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um polinômio (homogêneo, de fato) em n^2 variáveis reais x_{ij}, onde $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, a função determinante é infinitamente derivável.

- Seja $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ e pequeno o suficiente. Utilizando a linearidade do determinante nas colunas, escrevamos (cheque, ao menos para $n = 2$ e $n = 3$)

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) &= \det\big(X_1(t+h), \ldots, X_n(t+h)\big) - \det\big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big) \\ &= \sum_i \det\big(\ldots, X_{i-1}(t), X_i(t+h) - X_i(t), X_{i+1}(t+h), \ldots\big). \end{aligned}$$

  Donde segue

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \sum_i \det\left(\ldots, X_{i-1}(t), \frac{X_i(t+h) - X_i(t)}{h}, X_{i+1}(t+h), \ldots\right).$$

  Pela continuidade da função determinante e pela diferenciabilidade (e continuidade) dos caminhos $X_1, \ldots, X_n$ segue

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \sum_i \det\left(\ldots, X_{i-1}, X_i', X_{i+1}, \ldots\right).$$

  A prova está completa ♣

Teorema (Fórmula de Abel-Liouville). *Sejam $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ contínua, I um intervalo aberto e o sistema linear homogêneo*

$$x' = A(t)x, \text{ onde } x : I \to \mathbb{R}^n.$$

Seja $X(t)$ uma matriz wronskiana associada a tal edo e um ponto $t_0 \in I$. Então,

$$\det X(t) = [\det X(t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\,ds}.$$

Prova. Escrevamos também $A = A(t)$ e $X = X(t)$.

- Caso trivial. Se $\det X(t_0) = 0$, então temos $\det X(t) = 0$ para todo t.

- Se $\det X(t_0) \neq 0$ então segue $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Logo, $X = X(t)$ é uma matriz fundamental e suas colunas $X_1, \ldots, X_n$ formam uma base do espaço das soluções de $x' = A(t)x$. Seja X_{ij} a i-ésima coordenada de X_j.

  Então, $f(t) = \det X(t)$ satisfaz

  $$f'(t) = \sum_i \det(\ldots, X_{j-1}, X_j', X_{j+1}, \ldots).$$

  Substituindo $X_j' = A(t)X_j$ encontramos

  $$f'(t) = \sum_j \det(\ldots, X_{j-1}, A(t)X_j, X_{j+1}\ldots).$$

  Fixando t, pomos $A = (a_{ij})$ e temos que $X_1, \ldots X_n$ é base de $\mathbb{R}^n$. Segue

  $$AX_j = b_{1j}X_1 + \cdots + b_{nj}X_n, \quad \text{com } B = (b_{kj}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

  Identificando i-ésimas coordenadas em cada lado segue $\sum_k a_{ik}X_{kj} = \sum_k X_{ik}b_{kj}$ [vide também o comentário *colunas da matriz produto*]. Donde

  $$AX = XB.$$

  Logo, $B = X^{-1}AX$ e então $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$ [cheque, mostre $\det(\lambda I - B) = \det[X^{-1}(\lambda I - A)X] = \det(\lambda I - A)$ e ache o coeficiente de λ^{n-1} em $\det(\lambda I - B)$].

  Por fim, temos

  $$f'(t) = \sum_j \det(\ldots, X_{j-1}, b_{1j}X_1 + \cdots + b_{nj}X_n, X_{j+1}\ldots) = \sum_j b_{jj}\det(X_1, \ldots, X_n).$$

  Donde segue $f'(t) = \text{tr}[A(t)]f(t)$ e portanto

  $$\det X(t) = \det X(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{tr}(A(s))ds} \clubsuit$$

Note-se que a matriz B representa o operador $Tv = Av$ na base $X_1, \ldots, X_n$ e a matriz A repesenta o mesmo operador, mas na base canônica. Logo, $\text{tr}(B)$ =$\text{tr}(A)$.

4 - SISTEMAS LINEARES, COEFICIENTES CONSTANTES

4.1 - A Exponencial de uma Matriz Real

Definição. Seja J um conjunto arbitrário de índices. [Para mais detalhes, vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]

- Dada uma família $(p_j)_J$ de números positivos ou nulos, definimos
$$\sum_J p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j :\ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \in [0,+\infty].$$
Se tal sup é finito, a família $(p_j)_J$ é dita somável e a soma da família $(p_j)_J$ é
$$\sum_J p_j.$$

- Seja x em $\mathbb{R}$. A parte positiva de x e a parte negativa de x são, respectivamente, os números p e q (ambos positivos ou nulos) dados por
$$p = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \qquad q = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$
Valem as relações
$$\begin{cases} x &= p - q \\ |x| &= p + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2}, \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

- Uma família $(x_j)_J$ de números reais é somável se as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$, respectivamente das partes positivas e negativas de (x_j), são ambas somáveis. Neste caso, a soma da família (x_j) é
$$\sum_J x_j = \sum_J p_j - \sum_J q_j.$$

- Uma família $(v^j)_{j\in J}$ de vetores em $\mathbb{R}^m$ é somável se as m famílias de números reais $(v_1^j)_J, \ldots, (v_m^j)_J$ são somáveis. Neste caso, a soma da família $(v^j)_J$ é
$$\sum_J v^j = \left(\sum_J v_1^j, \ldots, \sum_J v_m^j\right)^T.$$

Observação. Seja $(x_j)_J$ uma família em $\mathbb{R}$. Devido às relações
$$0 \leq p_j \leq |x_j|, \quad 0 \leq q_j \leq |x_j| \quad \text{e} \quad |x_j| = p_j + q_j,$$
temos que a família real $(x_j)_J$ é somável se e somente se
$$\sum_J |x_j| < \infty.$$

Proposição (Equivalência entre somabilidade e somabilidade absoluta). *A família vetorial* $(v^j)_J$*, contida em* $\mathbb{R}^m$*, é somável se e somente se*

$$\sum |v^j| < \infty.$$

Prova.

Por definição, a família vetorial $(v^j)_J$ é somável se e somente se cada família real $(v_i^j)_J$ é somável, onde $i = 1, \ldots, m$. Como já vimos, $(v_i^j)_J$ é somável se e somente se $(|v_i^j|)_J$ é somável. A proposição segue então das desigualdades

$$|v_i^j| \leq |v^j| \leq |v_1^j| + \cdots + |v_m^j|, \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, m \clubsuit$$

Teorema (Lei associativa para famílias vetoriais somáveis). *Consideremos uma família vetorial e somável* $(v^j)_J \subset \mathbb{R}^m$*. Suponhamos* $J = \dot{\bigcup}_{k \in K} J_k$ *uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_{j \in J} v^j = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} v^j.$$

Prova. Segue da associatividade para famílias somáveis em $\mathbb{R}$, em cada coordenada [vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]$\clubsuit$

Proposição (Cômputo da soma vetorial via séries). *Seja* $(v^j)_J$ *somável em* $\mathbb{R}^m$*, com* J *enumerável. Podemos supor* $J = \mathbb{N}$ *para computar a soma e temos*

$$\sum v^j = \sum_{j=1}^{+\infty} v^j.$$

Prova. Já vimos tal resultado em $\mathbb{R}$. Como a soma em $\mathbb{R}^m$ é definida coordenada a coordenada, o resultado é também válido em $\mathbb{R}^m \clubsuit$

Lema (A soma de matrizes é contínua em relação ao produto matricial). *Seja* $A(j) \in M_n(\mathbb{R})$*, para cada* $j \in J$ *com* J *enumerável, uma família somável e*

$$\sum_J A(j) = A.$$

Seja $C \in M_n(\mathbb{R})$*. Então, a família* $A(j)C$*, onde* $j \in J$*, é somável e*

$$\sum A(j)C = AC \qquad \left[\textit{analogamente}, \sum CA(j) = CA\right].$$

Prova. Já vimos que podemos supor $J = \mathbb{N}$.

Temos $\sum |A(j)C| \leq |C| \sum |A(j)| < \infty$. O *produto matricial é contínuo* e então

$$\sum A(j)C = \sum_{j=0}^{+\infty} A(j)C = AC \clubsuit$$

Lema (Convergência uniforme e diferenciabilidade). *Seja $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1 tal que*

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{unif} f \text{ em cada compacto de } \mathbb{R}^m \\ e \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{unif} g_j \text{ em cada compacto de } \mathbb{R}^m, \text{ para todo } j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Então, f é de classe C^1 e

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{unif} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ nos compactos de } \mathbb{R}^m, \text{ onde } j = 1, \ldots, m.$$

Prova.

Cada f_n e suas derivadas de ordem 1 são contínuas e a convergência é uniforme sobre os compactos. Logo, f e as funções $g_1, \ldots, g_m$ são contínuas.

Basta mostrarmos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1.$$

Seja $(p_1, \ldots, p_m)$ em $\mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}$. Pela hipótese de convergência segue

$$\int_{p_1}^{x} \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, p_2, \ldots, p_m)dt \xrightarrow{n \to +\infty} \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \ldots, p_m)dt.$$

Assim,

$$f_n(x, p_2, \ldots, p_m) - f_n(p_1, p_2, \ldots, p_m) \xrightarrow{n \to +\infty} \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \ldots, p_m)dt.$$

Por outro lado, por hipótese

$$f_n(x, p_2, \ldots, p_n) - f_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x, p_2, \ldots, p_n) - f(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Donde segue,

$$f(x, p_2, \ldots, p_m) - f(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \ldots, p_m)dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $x \mapsto f(x, p_2, \ldots, p_m)$ é derivável e

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1 \clubsuit$$

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Como usual, A^m é o produto de A por si mesma m-vezes.

Um escalar λ é um **autovalor** de A se existe $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$ [ou em $\mathbb{C}^n$] tal que

$$Av = \lambda v.$$

A matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ é semelhante a A se existe $P \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

A relação de semelhança é uma relação de equivalência (cheque).

Teorema (Propriedades da função exponencial de matrizes). *Sejam A, B e W matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Seja X a variável em $M_n(\mathbb{R})$.*

(a) Está bem definida a matriz

$$e^A = \sum_{\mathbb{N}} \frac{A^m}{m!} \in M_n(\mathbb{R}) \qquad \left[\text{em particular, } e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}\right].$$

(b) Se A e B comutam então

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(c) A matriz e^A é inversível. Ainda,

$$e^0 = I \quad \text{e} \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(d) Se W é inversível, então

$$e^{W^{-1}AW} = W^{-1}\, e^A\, W.$$

[Se duas matrizes são semelhantes, então suas exponenciais também o são.]

(e) A série de funções vetoriais e contínuas

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{X^m}{m!}$$

converge uniformemente e absolutamente em $D(0;r) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} : |X| \leq r\}$, onde $r > 0$, à função contínua

$$\exp : D(0,r) \to M_n(\mathbb{R}), \quad \textit{onde } \exp(X) = e^X.$$

(f) *A aplicação* $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *é de classe* C^∞.

(g) *A função* $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ *definida por*

$$f(t) = e^{tA}$$

é derivável e

$$f'(t) = Ae^{tA}.$$

(h) *Temos*

$$\det(e^X) = e^{tr(X)},$$

onde $\mathrm{tr}(X)$ *é o traço da matriz* X.

(i) *Se* λ *é um autovalor de* A, *então* e^λ *é um autovalor de* e^A.

(j) *Se* D *é uma matriz diagonal, então* e^D *também. Ainda, se*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

(k) *Seja* A *uma matriz dada por* m *blocos ao longo da diagonal,*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \text{cada } A_l \in M_{d_l\times d_l}(\mathbb{R}).$$

[Isto é, A *assume o valor zero nas posições fora dos blocos e* $d_1+\cdots+d_m = n$.*]*
Então e^A *é a matriz com* m *blocos ao longo da diagonal dada por*

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{A_m} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

cada exponencial $e^{A_l} \in M_{d_l}(\mathbb{R})$.

Prova.

(a) Temos
$$\sum \frac{|A^m|}{m!} \leq \sum \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|} < \infty.$$
Pelo lema *equivalência entre somabilidade e somabilidade absoluta* segue que é somável a família vetorial
$$\left(\frac{A^m}{m!}\right)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$
Por tal fato (e a proposição *cômputo da soma via séries*), existe o vetor
$$e^A = \sum_m \frac{A^m}{m!} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{e} \quad e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

(b) Temos,
$$\sum_{j,k} \left| \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \right| \leq \sum_{j,k} \frac{|A|^j}{j!} \frac{|B|^k}{k!} = \left(\sum_j \frac{|A|^j}{j!}\right) \left(\sum_k \frac{|B|^k}{k!}\right) = e^{|A|} e^{|B|} < \infty.$$
O lema *equivalência entre somabilidade e somabilidade absoluta* mostra que
$$\text{é somável a família vetorial } \left(\frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!}\right)_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$
A lei *associativa para famílias somáveis* e (1) $AB = BA$ mostram
$$\sum_{j,k} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} = \sum_m \sum_{j+k=m} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} = \sum_m \frac{1}{m!} \sum_{j+k=m} \frac{m!}{j!\,k!} A^j B^k \overset{(1)}{=} \sum_m \frac{(A+B)^m}{m!} = e^{A+B}.$$
A lei *associativa para famílias somáveis* e o lema *continuidade da soma de matrizes em relação ao produto (por uma matriz)* mostram
$$\sum_{j,k} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} = \sum_j \sum_k \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} = \sum \frac{A^j}{j!} e^B = e^A e^B.$$

(c) Segue de (b).

(d) Temos, $(W^{-1}AW)(W^{-1}AW) = W^{-1}A^2W$. Logo, $(W^{-1}AW)^m = W^{-1}A^mW$. Por fim, pela proposição *cômputo da soma via séries* e pelo lema *continuidade do produto matricial* segue
$$e^{W^{-1}AW} = \sum \frac{(W^{-1}AW)^m}{m!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{W^{-1}A^mW}{m!} = W^{-1}e^AW.$$

(e) e (f). As entradas (coeficientes) $p_{ij}^m(X)$ da matriz

$$X^m = X \cdots X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

são polinômios nas n^2 variáveis $(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}) = X$.

Cada um destes polinômios é (argumentando por indução em m) uma soma de n^{m-1} parcelas, com cada parcela um monômio (em várias variáveis) de grau m e de coeficiente igual a 1. Cada monômio majorado por $|X|^m$.

Consideremos um multi-índice $\alpha = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}) \in \mathbb{N}^{n^2}$, com $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. A multi-derivada

$$\partial^\alpha (p_{ij}^m) \qquad\qquad [\text{de ordem } |\alpha| = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}]$$

é uma soma de n^{m-1} parcelas, com cada parcela um monômio (em várias variáveis) de grau menor ou igual a m (ou o polinômio identicamente nulo) e com o coeficiente de cada parcela majorado (em módulo) por $m^{|\alpha|}$.

Fixemos um disco $D(0; r) = \{X : |X| \leq r\}$, com $r \geq n$ (portanto, $r \geq n \geq 1$). Pelos dois parágrafos anteriores segue

$$|\partial^\alpha (p_{ij}^m)(X)| \leq n^{m-1} m^{|\alpha|} r^m, \ \ \text{para todo } X \in D(0; r).$$

Logo,

$$\frac{|\partial^\alpha (p_{ij}^m)(X)|}{m!} \leq \frac{r^{2m-1} m^{|\alpha|}}{m!}, \ \ \text{para todo } X \in D(0; r).$$

Pelos bem conhecidos teste da razão (para séries de números reais) e Teste-M de Weierstrass (para convergência uniforme para uma série de funções reais) e pelo acima provado lema *continuidade uniforme e diferenciabilidade*, concluímos que a função

$$\exp = \exp(X) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2} \equiv M_n(\mathbb{R})$.

(g) Suponhamos $0 < |h| < 1$. A afirmação segue da identidade

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} = \left(\frac{e^{hA} - I}{h} - A\right)e^{tA} = \left[\frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{m-1}A^m}{m!} + \cdots\right]e^{tA}$$

e de

$$\left|\frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{m-1}A^m}{m!} + \cdots\right| \leq |h|\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{|h|^{m-2}|A|^m}{m!} \leq |h|e^{|A|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

(h) Primeira solução. Seja $f(t) = \det(e^{tX})$, com $t \in \mathbb{R}$. Então, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$f(t+s) = \det\left(e^{tX+sX}\right) = \det\left(e^{tX}e^{sX}\right) = \det\left(e^{tX}\right)\det\left(e^{sX}\right) = f(t)f(s).$$

Derivando em s temos $f'(t+s) = f(t)f'(s)$ e então $f'(t) = f'(0)f(t)$.

Donde segue

$$f(t) = \det\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda t}, \text{ com } \lambda = f'(0).$$

Por outro lado temos (X é fixa)

$$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots \ = \ I + tX + t^2F(t),$$

com $F = F_X : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ e de classe C^∞, pelo item (g) [cheque]. Indicando as entradas das matrizes, escrevemos $F(t) = (F_{ij})$ e $X = (x_{ij})$. Então segue

$$\det(e^{tX}) = \begin{vmatrix} 1 + tx_{11} + t^2F_{11} & tx_{12} + t^2F_{12} & tx_{13} + t^2F_{13} & \dots \\ tx_{21} + t^2F_{21} & 1 + tx_{22} + t^2F_{22} & tx_{23} + t^2F_{23} & \dots \\ tx_{31} + t^2F_{31} & tx_{32} + t^2F_{32} & 1 + tx_{33} + t^2F_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left[1 + tx_{jj} + t^2F_{jj}(t)\right] + t^2g(t) \qquad [\text{com } g \text{ de classe } C^\infty]$$

$$= 1 + t(x_{11} + \cdots + x_{nn}) + t^2h(t) \qquad [\text{com } h \text{ de classe } C^\infty].$$

Donde obtemos

$$f(t) = \det(e^{tX}) = 1 + \operatorname{tr}(X)t + t^2h(t).$$

Concluímos então que $\lambda = f'(0) = \operatorname{tr}(X)$. Logo, $\det(e^{tX}) = e^{t[\operatorname{tr}(X)]}$.

Segunda solução. Consideremos o sistema linear (coeficientes constantes)

$$y' = Xy, \text{ para } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Por (a), é bem definida a função matricial $t \mapsto e^{tX}$. Por (g), sua derivada é

$$[e^{tX}]' = Xe^{tX}.$$

Logo, e^{tX} é uma matriz (wronskiana) de soluções para o sistema $y' = Xy$.

Pelo teorema de Abel-Liouville segue

$$\det[e^{tX}] = \det[e^{0X}]e^{\int_0^t \operatorname{tr}(X)\,ds} = e^{t\operatorname{tr}(X)}.$$

Em particular, $\det e^X = e^{\operatorname{tr}(X)}$.

(i) Por definição de autovalor, existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

[Dizemos que v é um autovetor de A associado ao autovalor λ.]

Portanto, $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v$.

Por indução segue

$$A^m(v) = \lambda^m v, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como o produto matricial é contínuo (lema provado na seção 3.1), temos

$$e^A v = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m v}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m v}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \right) v = e^\lambda v.$$

(j) Basta observar que

$$\frac{D^m}{m!} = \begin{pmatrix} \frac{(d_1)^m}{m!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{(d_n)^m}{m!} \end{pmatrix} \text{ e computar } I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots \clubsuit$$

(k) É simples (cheque o caso $m = 2$, o caso $m = 3$ se reduz ao caso $m = 2$, etc.).

Comentários. Mais sobre os itens (a), (d), (e), (f) e (g) se encontram em
`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-MATRIZEXP.pdf`

Exemplo (Números complexos, matrizes e matriz exponencial). Seja

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A aplicação $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, que a cada número complexo $z = a + ib$ (com a e b reais) associa a matriz real $Z \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, vide expressão acima para Z, satisfaz

$$\Phi(z+w) = \Phi(z) + \Phi(w), \ \Phi(zw) = \Phi(z)\Phi(w) \ \text{ e } \ \Phi(\lambda z) = \lambda\Phi(z),$$

quaisquer que sejam os complexos z e w e o real λ. Isto é, Φ é um isomorfismo de corpos e também um isomorfismo entre espaços vetoriais reais. Ainda mais, munindo $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ da norma herdada do espaço vetorial real e normado $\mathbb{R}^4$, encontramos

$$|\Phi(z)| = \sqrt{2}|z|.$$

Logo, Φ é um múltiplo de uma bijeção isométrica.

Desta forma, dada uma série de potências complexas

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

com coeficientes reais (c_n) e convergente na bola aberta e não degenerada $B(0;\rho)$, concluímos que

$$\Phi(f(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \Phi(z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n,$$

para todo z em $B(0;\rho)$.

Em particular, para a função

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$

e o número $z = i\theta = 0 + i\theta$, temos

$$\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Logo,

$$\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right] = \Phi(\cos\theta + i\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observemos que através de Φ identificamos i com uma matriz J. Temos

$$i \equiv J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

a aplicação linear associada à matriz J, pelo isomorfismo fundamental entre matrizes e aplicações lineares. As coordenadas do vetor Je_1 são dadas pela primeira coluna de J e, analogamente, As coordenadas de Je_1 são dadas pela primeira coluna de J. Segue

$$Je_1 = e_2 \quad \text{e} \quad Je_2 = -e_1.$$

Isto mostra que a aplicação J é uma rotação de $\pi/2$ rad. no sentido anti-horário.

Dado $z = a + bi$, com a e b reais, e I a matriz identidade 2×2, identificamos

$$\boxed{z = a + bi \ \equiv \ Z = aI + bJ.}$$

A matriz identidade comuta com J (obviamente). Temos então

$$e^Z = e^{aI + bJ} = e^{aI} e^{bJ}.$$

Temos também

$$e^{aI} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad e^{bJ} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Concluímos então que

$$e^Z = e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix} \clubsuit$$

Exemplo. Computemos e^{tA}, onde t é real, para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução.

Pelas *propriedades da exponencial de matrizes*, item (k), e^{tA} é uma matriz de blocos ao longo da diagonal principal e segue

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } tB = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

Seja I a matriz identidade de ordem 2. Escrevamos

$$tB = 2tI + tC, \text{ onde } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelas *propriedades da exponencial de matrizes*, item (j), segue

$$e^{2tI} = e^{2t} I.$$

A matriz identidade comuta com toda matriz (ordens iguais). Pelas *propriedades da exponencial de matrizes*, item (b), encontramos

$$e^{tB} = e^{2tI} e^{tC} = \left(e^{2t} I\right) e^{tC} = e^{2t} e^{tC}.$$

É claro que

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, segue $e^{tC} = I + tC$. Logo,

$$e^{tB} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Para finalizar, concluimos que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \clubsuit$$

4.2 - TEU (Caso Homogêneo) e Fluxo

Teorema (Existência e Unicidade das Soluções, equação homogênea). *Consideremos uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ e um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Vale o que segue.*

- *O problema*
$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
tem uma única solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e vale a fórmula
$$x(t) = e^{At}x_0.$$

- *A matriz $X(t) = e^{At}$ é uma matriz fundamental de soluções para $x' = Ax$.*

- *Temos*
$$\det e^{At} = e^{\mathrm{tr}(A)t}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Prova.

◇ Pimeira afirmação. A existência e a unicidade seguem do *teorema de existência e unicidade para sistemas lineares de edo's*. A fórmula segue do teorema *propriedades da função exponencial de matrizes*, item (g).

◇ Segunda e terceira afirmações. Utilizando o teorema *propriedades da função exponencial de matrizes*, itens (g) e (h), segue que
$$X(t) = e^{At}$$
satisfaz
$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ \text{e} \\ \det X(t) = e^{\mathrm{tr}(A)t} \neq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Assim, as colunas da matriz $X(t) = e^{At}$ são n soluções LI da edo $x' = Ax$. Portanto, por definição, $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções♣

Definição. Um fluxo é uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfazendo

$$\begin{cases} \Phi(0,x) = x, \\ \Phi(t+s,x) = \Phi\big(t,\Phi(s,x)\big), \end{cases}$$

quaisquer que sejam $s,t\in\mathbb{R}$ e $x\in\mathbb{R}^n$. Dizemos que Φ é um fluxo linear se, fixado um (instante) t arbitrário, vale a linearidade da aplicação

$$x \mapsto \Phi_t(x) = \Phi(t,x), \text{ onde } x\in\mathbb{R}^n.$$

Exemplo. Mostremos que se $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um fluxo linear [logo, de classe C^1], então existe uma única matriz $A\in M_n(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\Phi(t,x) = e^{tA}x.$$

Prova.

- Fixemos x e consideremos o caminho $y(t) = \Phi(t,x)$. Fixemos t. Segue
$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(t+h,x)-\Phi(t,x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi\big(h,\Phi(t,x)\big)-\Phi\big(0,\Phi(t,x)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial t}\big(0,\Phi(t,x)\big). \end{aligned}$$
- Fixemos a e b reais e dois pontos, x e y, em $\mathbb{R}^n$. Segue
$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,ax+by) &= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(h,ax+by)-\Phi(0,ax+by)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a\Phi(h,x)-a\Phi(0,x)+b\Phi(h,y)-b\Phi(0,y)}{h} \\ &= a\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x)+b\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,y). \end{aligned}$$
Isto mostra a linearidade da aplicação
$$x \longmapsto \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x).$$
Portanto, existe uma matriz $A\in M_n(\mathbb{R})$ satisfazendo
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x) = Ax, \text{ para todo } x\in\mathbb{R}^n.$$
- A função $y(t) = \Phi(t,x)$ satisfaz então
$$y'(t) = A\Phi(t,x) = Ay(t) \;\text{ e }\; y(0) = \Phi(0,x) = x.$$
- Pelo teorema de existência e unicidade temos $y(t) = e^{tA}x$. Concluímos então
$$\Phi(t,x) = e^{tA}x \clubsuit$$

Exemplo. Consideremos a equação $x' = Ax$, com

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- Como A é uma matriz constante, as soluções está definidas em toda a reta. Assim, consideremos as soluções $x(t, t_0, x_0)$ com $t_0 = 0$.

  A solução $x = x(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$ desta edo é

$$x(t, x_0) = e^{tA} x_0.$$

- Sabemos que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}.$$

- O fluxo desta equação é

$$\Phi(t, x_0) = e^{tA} x_0.$$

  Observemos que fixado t, o fluxo é linear em x_0. Notemos também que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = Ae^{tA} x_0 = A\Phi(t, x_0).$$

  Assim, fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a função $y(t) = \Phi(t, x_0)$ é solução do problema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

  Tal fato corrobora (não que seja necessário) a expressão

$$\Phi(t, x_0) = e^{tA} x_0 = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix} x_0.$$

- Um par de soluções fundamentais é dado por

$$X_1(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \qquad X_2(t) = e^{at} \begin{pmatrix} -\sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix}.$$

  De fato, se X é a matriz fundamental formada por X_1 e X_2 então (cheque)

$$X'(t) = \begin{pmatrix} ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt & -ae^{at}\sin bt - be^{at}\cos bt \\ ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt & ae^{at}\cos bt - e^{at}\sin bt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix} \clubsuit$$

4.3 - TEU (Caso Não Homogêneo) e Fórmula de Duhamel

Teorema (Existência e Unicidade das Soluções, edo não homogênea). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e uma função contínua $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Vale o que segue*

- *O problema linear não homogêneo*

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

  tem uma única solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e vale a

  (Fórmula de Duhamel) $$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds.$$

- *O fluxo para tal edo é*

$$\Phi(t,y) = e^{tA}y + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds.$$

Prova.

◇ Pimeira afirmação. A existência e a unicidade seguem do *teorema de existência e unicidade para sistemas lineares de edo's*. Verifiquemos a fórmula.

Substituindo $t = 0$ na fórmula obtemos $x(0) = x_0$. Derivando-a encontramos

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^{tA}x_0 + Ae^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds + e^{tA}e^{-tA}b(t) \\ &= A\left[e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds\right] + b(t) \\ &= Ax(t) + b(t). \end{aligned}$$

◇ Segunda afirmação. Trivial (cheque) ♣

4.4 - EDOLCC Escalar, Sistema Linear Associado e Matriz Companheira

Consideremos a equação diferencial linear e com coeficientes reais e constantes (edolcc) de ordem n e homogênea,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Escrevamos

$$\begin{cases} y_1 &= x \\ y_2 &= x' \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= x^{(n-2)} \\ y_n &= x^{(n-1)} \end{cases} \Longrightarrow \quad S : \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0y_1 - a_1y_2 - \cdots - a_{n-1}y_n. \end{cases}$$

[No caso $n = 1$ temos $y_1 = x$ e $S : \{y_1' = -a_0y_1.$]

Então, encontrar uma solução x da edolcc acima é equivalente a encontrar uma solução $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ do sistema S acima. Escrevamos também

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Reescrevamos o sistema S como

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Matriz companheira. A matriz quadrada de ordem n acima é a matriz companheira, denotada A, do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Podemos então reescrever o sistema de equações diferenciais S como

$$\boxed{Y' = AY.}$$

Proposição 11. São iguais o polinômio característico da edolcc considerada e o polinômio característico da matriz A companheira. Isto é,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Prova.

- Mostremos por indução em $n \geq 1$. Notemos que

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

- O caso $n = 1$. Temos a edolcc $x' + a_0 x = 0$, com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda + a_0$. A matriz companheira é $A = (-a_0)$, o polinômio característico associado a tal matriz é

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda + a_0 = p(\lambda).$$

- Supondo a afirmação válida para $n - 1$, mostremo-la para n.

  Seja A de ordem n. Computemos $\det(\lambda I - A)$ pela primeira coluna. Devido à hipótese de indução temos

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda^0) + a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$= p(\lambda) \clubsuit$$

4.5 - Cômputo trivial de e^{tA} em $M_3(\mathbb{R})$. Casos triviais em $M_n(\mathbb{R})$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Matrizes semelhantes tem mesmo polinômio característico. O polinômio característico p_T de um operador linear $T : V \to V$ é o polinômio característico de qualquer matriz representando-o.

Teorema (Cayley-Hamilton). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $p_A(\lambda)$ seu polinômio característico. Então,*

$$p_A(A) = 0.$$

Primeira prova (elementar). Usa o *Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)*.

O caso $n = 1$ é óbvio. Suponhamos o resultado válido para $n-1$. Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear associado a A. O TFA (*teorema fundamental da álgebra*) garante um autovalor λ e um autovetor associado $v \neq 0$. Seja $\{v, \ldots, \}$ uma base de $\mathbb{C}^n$. Mudando de base, se preciso, podemos supor

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{onde } B \in M_{n-1}(\mathbb{C}).$$

Então temos, com I a identidade de ordem $n-1$ e z a variável complexa,

$$\begin{aligned} p_T(z) &= \det \begin{pmatrix} z-\lambda & * \\ 0 & zI - B \end{pmatrix} \\ &= (z-\lambda)\det(zI - B) \\ &= (z-\lambda)p_B(z). \end{aligned}$$

Donde segue (cheque, particularmente a terceira e a última igualdades)

$$\begin{aligned} p_T(T) &= (A - \lambda I)p_B(A) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B-\lambda I \end{pmatrix} p_B \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B-\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_B(\lambda) & * \\ 0 & p_B(B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & B-\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_B(\lambda) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \clubsuit \end{aligned}$$

Segunda prova (elementar). Feita em $\mathbb{R}^n$. Extraída de H. P. Bueno [3].

No que segue, abreviamos linearmente independente por LI.

Fixemos a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Seja T o operador linear associado a A. Consideremos um vetor não nulo e arbitrário $v \in \mathbb{R}^n$. Mostremos

$$p_A(A)v = 0.$$

Seja m o maior natural tal que é LI o conjunto ordenado

$$\mathcal{C} = \{v, Tv, \ldots, T^{m-1}v\}.$$

Então, existem coeficientes $c_0, \ldots, c_{m-1}$ tais que

$$(CH1) \qquad T^m v = c_0 v + \cdots + c_{m-1}T^{m-1}v.$$

Seja W o subespaço gerado por $\mathcal{C}$.

- ⋄ Afirmação. $T(W) \subset W$. De fato, dado $w \in W$ segue que existem escalares $b_0, \ldots, b_{m-1}$ tais que

  $$w = b_0 v + b_1 Tv + \cdots + b_{m-1}T^{m-1}v.$$

  Logo,

  $$Tw = b_0 Tv + b_1 T^2 v + \cdots + b_{m-1}T^m v.$$

  A identidade (CH1) garante que $Tw \in W$. Está provada a afirmação.

A representação de $T|_W : W \to W$ na base $\mathcal{C} = \{v, Tv, \ldots, T^{m-1}v\}$ é

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{m-1} \end{pmatrix}_{m\times m}.$$

Logo (abusando da notação, seja $I : W \to W$ a identidade),

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - c_{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -c_1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - c_{m-1} \end{vmatrix} +$$

$$-c_0(-1)^{m+1} \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

O último determinante acima é $(-1)^{m-1}$. Logo, o coeficiente independente do polinômio característico $\det(\lambda I - C)$ é $-c_0$. É claro que o coeficiente dominante de $\det(\lambda I - C)$ é $+1$. Então, por iteração segue

$$\det(\lambda I - C) = -c_0 - c_1\lambda - c_2\lambda^2 - \cdots - c_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m = p_W(\lambda),$$

com p_W o polinômio característico da restrição $T|_W$. Por (CH1) segue

$$(CH2) \qquad p_W(T)v = T^m v - c_0 v - c_1 T v - c_2 T^2 v - \cdots - c_{m-1} T^{m-1} v = 0.$$

- ◇ Afirmação. Temos $p_A(\lambda) = q(\lambda)p_W(\lambda)$ para algum polinômio q. De fato, completando $\mathcal{C}$ a uma base de $\mathbb{R}^n$ obtemos uma representação matricial, para o operador T, na forma

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad [C \text{ de ordem } m \text{ e } E \text{ de ordem } n-m].$$

Propriedades de determinantes garantem (com I para três identidades)

$$\det(\lambda I - T) = \det(\lambda I - C)\det(\lambda I - E) = p_W(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p_W(\lambda).$$

Devido a (CH2) concluímos que

$$p_A(T)v = q(T)p_W(T)v = 0 \clubsuit$$

Comentário. Para quatro provas elementares do teorema de Cayley-Hamilton, vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Cayley-Hamilton.pdf`

Dados $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$, indiquemos o produto interno entre u e v por

$$u \cdot v.$$

Dizemos que um espaço vetorial é um espaço linear. Analogamente, subespaços vetoriais são também ditos subespaços lineares.

Os dois lemas a seguir não são necessários para deduzir as fórmulas para e^{tA} obtidas nesta seção. No entanto, propiciam uma melhor compreensão do tópico.

Lema (Todo subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ é topologicamente fechado em $\mathbb{R}^n$). *Seja W um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$. Então, W é topologicamente fechado em $\mathbb{R}^n$.*

Prova.

⋄ Sabemos que vale a soma direta $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$, com

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in W\} \text{ o ortogonal de } W.$$

Sabemos que para todo $v \in V$ existem únicos $w \in W$ e $u \in W^\perp$ tais que

$$v = w + u.$$

Consideremos o operador projeção (linear, cheque) $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$\pi(v) = u.$$

A projeção π é contínua (todo operador linear definido em $\mathbb{R}^n$ o é). Logo,

$$W = \pi^{-1}(0) \text{ é (topologicamente) fechado} \clubsuit$$

Seja $I \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz identidade.

Lema (A matriz e^{tA} é gerada por $I, A, \ldots, A^{n-1}$). *Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, temos*

$$\begin{cases} e^{tA} = g_0(t)I + \cdots + g_{n-1}(t)A^{n-1}, \\ \text{com } g_0, \ldots, g_{n-1} \text{ funções reais infinitamente deriváveis.} \end{cases}$$

Prova.

⋄ O *teorema de Cayley-Hamilton* mostra

$$p_A(A) = 0, \text{ com } p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I,$$

e portanto A^n é uma combinação linear de $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

Fixemos t. Toda soma parcial da série para e^{tA} é uma matriz no espaço linear das combinações lineares de $I, A, \dots, A^{n-1}$. Denotemos tal espaço por

$$\text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\} \qquad [\text{“span” traduz-se “gerado”}],$$

dito espaço gerado por $I, A, \dots, A^{n-1}$. Pelo lema *todo subespaço linear de* $\mathbb{R}^n$ *é topologicamente fechado em* $\mathbb{R}^n$, tal espaço é fechado em $M_n(\mathbb{R})$. Donde

$$e^{tA} = \lim_{N \to +\infty} \left(I + tA + \cdots + \frac{t^N}{N!} A^N \right) \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}.$$

Logo, existem funções $g_0(t), \dots, g_{n-1}(t)$ satisfazendo

$$e^{tA} = g_0(t)I + \cdots + g_{n-1}(t)A^{n-1}.$$

Certamente podemos trocar $I, A, \dots, A^{n-1}$ pelo maior conjunto LI e ordenado $\{I, A, \dots, A^k\}$ [basta tomarmos o maior k tal que $\{I, A, \dots, A^k\}$ é LI]. Donde segue (com abuso, mantemos a letra g para os novos coeficientes)

$$e^{tA} = g_0(t)I + \cdots + g_k(t)A^k$$

e os coeficientes $g_0, \dots, g_k$ são únicos.

◇ Dada uma matriz $X = c_0 I + \cdots + c_k A^k$, com $c_0, \dots, c_k$ reais, definimos a norma

$$X \mapsto |c_0| + \cdots + |c_k|.$$

Em espaços lineares de dimensão finita todas as normas se equivalem. [Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-NormasEquivalentes.pdf` .]

Segue que uma sequência converge no espaço $\text{span}\{I, A, \dots, A^k\}$ se e só se vale a convergência coordenada a coordenada em relação à base $I, \dots, A^k$.

◇ Para finalizar, utilizando que a função

$$t \mapsto e^{tA} \text{ é infinitamente derivável}$$

concluímos que as funções coordenadas $g_0, \dots, g_k$ são infinitamente deriváveis♣

Recordemos que dados três pontos (t_1, a), (t_2, b) e (t_3, c) no plano, com t_1, t_2 e t_3 distintos, existe um único polinômio de grau menor ou igual a dois cujo gráfico passa por tais pontos [a unicidade é trivial, pois um polinômio não nulo de grau menor ou igual a dois não pode ter três zeros distintos]. A saber,

$$Q(t) = a\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\frac{t-t_3}{t_1-t_3} + b\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\frac{t-t_3}{t_2-t_3} + c\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\frac{t-t_2}{t_3-t_2}.$$

A generalização desta interpolação para mais pontos é trivial.

Proposição [Casos Particulares em $M_n(\mathbb{R})$]. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade de ordem n.*

- *Se A tem um único autovalor λ, então,*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k.$$

- *Se A tem n autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então*

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}L_1(A) + \cdots + e^{\lambda_n t}L_n(A)$$

  onde $L_k(A)$ é o polinômio em A de grau $n-1$ dado por

$$L_k(A) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}n, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

  [Os polinômios $L_k(A)$ são chamados coeficientes de interpolação de Lagrange*.]*

- *Se $n \geq 3$ e A tem dois autovalores, λ de multiplicidade algébrica $n-1$ e μ de multiplicidade algébrica 1, então*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + \left\{\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right\}(A-\lambda I)^{n-1}.$$

Prova.

◇ Autovalor único. O *teorema de Cayley-Hamilton* mostra $(A-\lambda I)^n = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t I + t(A-\lambda I)} \\ &= e^{\lambda t I}e^{t(A-\lambda I)} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k. \end{aligned}$$

◇ n autovalores distintos. Fixemos t. Pelo lema *a matriz e^{tA} é gerada por* $I, A, \ldots, A^{n-1}$, segue que existem coeficientes $g_0, \ldots, g_{n-1}$ tais que

$$e^{tA} = g_0 I + g_1 A + \cdots + g_{n-1} A^{n-1}.$$

Seja $v_1 \neq 0$ um autovetor associado a λ_1. Denotemos $V_1 = \operatorname{span}\{v_1\}$. Segue

$$e^{tA}\Big|_{V_1} = \Big(g_0 I + g_1 A + g_2 A^2 + \cdots + g_{n-1} A^{n-1}\Big)\Big|_{V_1}.$$

Temos $A\big|_{V_1} = \lambda_1 I_1$, com $I_1 : V_1 \to V_1$ a identidade. Donde $A^2\big|_{V_1} = \lambda_1^2 I_1$, etc. Temos também $e^{tA}\big|_{V_1} = e^{\lambda_1 t} I_1$. Encontramos então

$$e^{t\lambda_1} = g_0 + g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_1^2 + \cdots + g_{n-1} \lambda_1^{n-1}.$$

Analogamente,

$$\begin{cases} e^{t\lambda_1} & = & g_0 + g_1\lambda_1 + g_2\lambda_1^2 + \cdots + g_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ & \vdots & \\ e^{t\lambda_n} & = & g_0 + g_1\lambda_n + g_2\lambda_n^2 + \cdots + g_{n-1}\lambda_n^{n-1}. \end{cases}$$

O polinômio $Q(\lambda) = g_0 + g_1\lambda + \cdots + g_{n-1}\lambda^{n-1}$, com $\operatorname{grau}(Q) \leq n-1$, satisfaz

$$\begin{cases} Q(\lambda_1) & = & e^{\lambda_1 t} \\ & \vdots & \\ Q(\lambda_n) & = & e^{\lambda_n t} \end{cases} \quad \text{e} \quad e^{tA} = Q(A).$$

Os n pontos $(\lambda_1, e^{\lambda_1 t}), \ldots, (\lambda_n, e^{\lambda_n t})$ são distintos. O seguinte polinômio interpolador (*Lagrange*) de grau no máximo $n-1$ passa por estes pontos,

$$L(\lambda) = e^{\lambda_1 t} \prod_{j \neq 1} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j} + \cdots + e^{\lambda_n t} \prod_{j \neq 1} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

O polinômio interpolador (de grau menor ou igual a $n-1$) é único. Segue

$$Q(\lambda) = L(\lambda).$$

Concluímos então que

$$e^{tA} = Q(A) = e^{\lambda_1 t} \prod_{j \neq 1} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_1 - \lambda_j} + \cdots + e^{\lambda_n t} \prod_{j \neq 1} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

◇ Caso $n \geq 3$ com dois autovalores λ e μ distintos e $p_A(z) = (z-\lambda)^{n-1}(z-\mu)^1$. Escrevamos

$$e^{tA} = e^{t\lambda I + t(A-\lambda I)} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k + e^{\lambda t}\sum_{k\geq n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k.$$

Temos então

$$\sum_{k\geq n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k = \sum_{r\geq 0}\frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!}(A-\lambda I)^{n-1+r}.$$

A seguir, o *teorema de Cayley-Hamilton* garante a identidade

$$(A-\lambda I)^{n-1}(A-\mu I) = 0.$$

Vale a identidade $A-\lambda I = A-\mu I+(\mu-\lambda)I$. Estas duas identidades mostram

$$(A-\lambda I)^n = (\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{n-1}.$$

Por indução segue (cheque, o caso $j=0$ é trivial)

$$(A-\lambda I)^{n-1+j} = (\mu-\lambda)^j(A-\lambda I)^{n-1}.$$

Encontramos então

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k &= \left[\sum_{j\geq 0}\frac{t^{n-1+j}}{(n-1+j)!}(\mu-\lambda)^j\right](A-\lambda I)^{n-1}\\ &= \frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left[\sum_{j\geq 0}\frac{t^{n-1+j}}{(n-1+j)!}(\mu-\lambda)^{n-1+j}\right](A-\lambda I)^{n-1}\\ &= \frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left[e^{t(\mu-\lambda)} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right](A-\lambda I)^{n-1}\end{aligned}$$

Assim, para finalizar, obtemos

$$\begin{aligned}e^{tA} &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\\ &\quad + \left\{\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right\}(A-\lambda I)^{n-1} \clubsuit\end{aligned}$$

Corolário [Casos Particulares em $M_3(\mathbb{R})$]. *Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade.*

- *Se A tem um único autovalor λ, então*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left[I + t(A-\lambda I) + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2\right].$$

- *Se A tem 3 autovalores distintos λ, μ e ν, então*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\frac{(A-\mu I)(A-\nu I)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} + e^{\mu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\nu I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} + e^{\nu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\mu I)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)},$$

- *Se A tem dois autovalores distintos λ e μ, com λ de multiplicidade 2, então*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left[I + t(A-\lambda I)\right] + \frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2.$$

Prova.

◇ Autovalor único. Segue diretamente da proposição imediatamente acima.

◇ Três autovalores distintos. Também segue diretamente da proposição acima.

◇ Caso dois autovalores distintos, com $p_A(z) = (z-\lambda)^2(z-\mu)^1$. Pela proposição *casos particulares em $M_n(\mathbb{R})$* segue

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t}[I + t(A-\lambda I)] + \left\{\frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^2} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}[1+t(\mu-\lambda)]\right\}(A-\lambda I)^2 \\ &= e^{\lambda t}\left[I + t(A-\lambda I)\right] + \frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2 \clubsuit \end{aligned}$$

Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ tem um só autovalor λ, então $\lambda \in \mathbb{R}$ e a fórmula para e^{tA} é real.

Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ tem três auto-valores distintos, pode ocorrer $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu = \overline{\lambda}$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Ainda assim, apesar das aparências, temos e^{tA} real. Cheque.

Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ tem dois autovalores distintos λ e μ, com λ de multiplicidade 2 e μ de multiplicidade 1, então λ e μ são reais e a fórmula para e^{tA} é real.

Exemplo. *Computemos e^{tA} para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det \begin{pmatrix} z-1 & -2 \\ -4 & z-3 \end{pmatrix} = (z-1)(z-3)-8 \\ &= z^2 - 4z - 5 \\ &= (z+1)(z-5). \end{aligned}$$

Então, temos dois autovalores distintos -1 e 5. Pelo proposição *casos particulares em $M_n(\mathbb{R})$*, segue que podemos escrever

$$e^{tA} = Q(A),$$

onde $Q = Q(z) = \alpha I + \beta z$, com α e β escalares a serem determinados, é o único polinômio de grau 1 que satisfaz as condições

$$\begin{cases} e^{-t} = Q(-1) = \alpha - \beta \\ e^{5t} = Q(5) = \alpha + 5\beta. \end{cases}$$

Donde

$$\begin{cases} 6\alpha = e^{5t} + 5e^{-t} \\ 6\beta = e^{5t} - e^{-t}. \end{cases}$$

Por fim, encontramos

$$e^{tA} = \frac{e^{5t}+5e^{-t}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}-e^{-t}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \clubsuit$$

4.6 - Séries de potências definidas em $\mathbb{C}$.

Seja z a variável complexa em $\mathbb{C}$.

Lema (Convergência absoluta das séries de potências definidas em $\mathbb{C}$). *Seja (a_n) uma sequência de coeficientes complexos. Consideremos uma função*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

dada por uma série de potências centrada na origem e convergente em todo $z \in \mathbb{C}$. Então, tal série de potências converge absolutamente em todo ponto $z \in \mathbb{C}$.

Prova.

O caso $z = 0$ é óbvio. Fixemos $z \neq 0$. Seja $r = 2|z|$. Por hipótese,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (2|z|)^n \text{ converge.}$$

Logo, $a_n 2^n |z|^n \to 0$ se $n \to \infty$. Então, existe um N tal que temos

$$|a_n||z|^n 2^n \leq 1 \text{ para todo } n \geq N.$$

Donde segue

$$|a_n||z|^n \leq \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } n \geq N.$$

A progressão geométrica infinita de razão $1/2$ é convergente. Portanto temos

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n z^n| < \infty.$$

Donde segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < \infty \clubsuit$$

Tal resultado mostra que [veja também
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`]

a família complexa $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é somável.

O conceito *somabilidade* permite efetuarmos várias operações com séries de potências de forma mais prática que quando utilizamos apenas o restrito conceito de séries.

Indicamos a soma da sequência/família $(a_n z^n)$ e a série de potências de termo geral $a_n z^n$ por, respectivamente,

$$\sum_n a_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Nos pontos em que a soma $\sum a_n z^n$ é finita (isto ocorre se e só se $\sum |a_n z^n| < \infty$), então a série de potências converge e

$$\sum a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Já mostramos em `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`, que temos $\sum |a_n z_n| < \infty$ se e somente se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < \infty$.

Propriedade da Translação (Teorema de Taylor). *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \ \textit{onde } z \in \mathbb{C},$$

uma série de potências centrada na origem e convergente em todo ponto. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, *existe uma sequência de coeficientes complexos* $b_0, b_1, \ldots$ *tal que temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-\alpha)^n, \ \textit{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Prova.

Fixado $\alpha \in \mathbb{C}$, encontramos a identidade

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha + z - \alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} a_n \binom{n}{m} \alpha^{n-m} (z-\alpha)^m.$$

Mostremos que a família de positivos $\{|a_n|\binom{n}{m}|\alpha|^{n-m}|z-\alpha|^m : n \in \mathbb{N} \text{ e } m \leq n\}$ é somável. Para números positivos, podemos associar livremente. Segue

$$\begin{aligned}\sum_{n,m\leq n} |a_n|\binom{n}{m}|\alpha|^{n-m}|z-\alpha|^m &= \sum_n |a_n| \sum_{m\leq n} \binom{n}{m}|\alpha|^{n-m}|z-\alpha|^m \\ &= \sum_n |a_n|(|\alpha| + |z-\alpha|)^n.\end{aligned}$$

O lema *convergência absoluta das séries de potências definidas em* $\mathbb{C}$ garante

$$\sum_n |a_n|(|\alpha| + |z-\alpha|)^n < \infty.$$

Então, pela *lei associativa* para famílias somáveis concluímos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} a_n \binom{n}{m} \alpha^{n-m}(z-\alpha)^m &= \sum_m \sum_{n\geq m} a_n \binom{n}{m} \alpha^{n-m} (z-\alpha)^m \\ &= \sum_m \left(\sum_{n\geq m} a_n \binom{n}{m} \alpha^{n-m} \right) (z-\alpha)^m \ \clubsuit\end{aligned}$$

Teorema (Derivação das séries de potências). *Consideremos as séries de potências complexas*

$$f(z) = \sum a_n z^n \quad e \quad g(z) = \sum n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Então, uma converge em $\mathbb{C}$ *se e somente se a outra também. Neste caso,*

$$f'(z) = g(z), \text{ para todo } z.$$

Prova.

- É óbvio que ambas as séries convergem na origem. Dado z é claro que

$$\sum |a_n z^n| \leq |a_0| + |z| \sum |n a_n z^{n-1}|.$$

  Por outro lado e utilizando que $2^n \geq n$ para todo n, dado $z \neq 0$ encontramos

$$\sum |n a_n z^{n-1}| = \frac{1}{|z|} \sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n} |a_n (2z)^n| \leq \frac{1}{|z|} \sum |a_n (2z)^n|.$$

  Por tais desigualdades, uma série converge em $\mathbb{C}$ se e só se a outra também.

- Derivação. Suponhamos que as séries de potências convergem no plano. Fixemos um ponto $z \in \mathbb{C}$ e um $R > |z|$. Consideremos um incremento $h \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |h| < r = R - |z|$. Para $n \geq 2$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n z^{n-1} + h \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} h^{p-2} \\ \text{e} \\ \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} |z|^{n-p} r^p \leq \frac{|h|}{r^2} R^n. \end{cases}$$

  Notemos que $|z+h| < R$. Donde segue

$$\left| \sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum |a_n| R^n \xrightarrow{h \to 0} 0 \clubsuit$$

Corolário (Coeficientes de Maclaurin). *Dada* $f(z) = \sum a_n z^n$ *convergente em* $\mathbb{C}$*, temos que* f *é infinitamente derivável e*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Prova. Segue de $f^{(k)}(z) = \sum a_n n(n-1)\cdots(n-k) z^{n-k}$ e $f^{(k)}(0) = a_k k! \clubsuit$

Corolário (Princípio de identidade.) *Sejam* $f(z) = \sum a_n z^n$ *e* $g(z) = \sum b_n z^n$ *convergentes em* $\mathbb{C}$ *e* $f(z) = g(z)$ *em todo* z*. Então temos* $a_n = b_n$ *para todo* n*.*

Prova. Segue do corolário *Coeficientes de Maclaurin* $\clubsuit$

Convenção. O polinômio nulo tem grau $-\infty$.

Lema (Divisão euclideana de séries de potências por polinômios). *Sejam*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

uma série de potências com coeficientes em $\mathbb{C}$, *centrada em* $z = 0$ *e convergente em todo o plano complexo, e um polinômio não nulo* $p(z)$. *Então podemos escrever*

$$f(z) = q(z)p(z) + r(z),$$

com q *uma série de potências centrada na origem e convergente no plano complexo, e* r *um polinômio satisfazendo grau*$(r) <$ *grau*(p). *Tais* q *e* r *são únicas.*

Prova.

- Por indução em $m = \text{grau}(p)$. O caso $m = 0$ é trivial. Suponhamos $p(z) = \beta z - \alpha$ um polinômio de grau um, com $\beta \neq 0$ e α constantes complexas. Escrevendo $p(z) = \beta(z - \alpha/\beta)$ vemos que podemos supor $\beta = 1$ (cheque) e

  $$p(z) = z - \alpha.$$

  Pela *convergência absoluta das séries de potências definidas em* $\mathbb{C}$ e pelo *teorema da translação*, existe uma sequência complexa (b_n) tal que

  $$\sum a_n z^n = \sum b_n (z-\alpha)^n = b_0 + (z-\alpha) \sum_{n\geq 1} b_n (z-\alpha)^{n-1}, \text{ para todo } z.$$

  Logo, $g(w) = \sum_{n\geq 1} b_n w^n$ é finita para todo w. Pelo *teorema da translação* existe uma sequência complexa (c_n) tal que

  $$g(w) = \sum c_n (w+\alpha)^n.$$

  Donde segue

  $$\sum a_n z^n = b_0 + (z-\alpha) g(z-\alpha) = b_0 + (z-\alpha) \sum c_n z^n, \text{ para todo } z.$$

  Definindo $q(z) = \sum c_n z^n$, encontramos

  $$f(z) = q(z)(z-\alpha) + b_0.$$

  O caso $\text{grau}(p) = 1$ está provado.

◇ Suponhamos o resultado válido para m. Seja $p(z)$ de grau $m+1$. Pelo *teorema fundamental da álgebra*, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que podemos escrever

$$p(z) = (z-\alpha)P(z) \text{ com grau}(P) = m.$$

Por hipótese de indução existem uma série de potências centrada na origem $Q(z)$ e um polinômio $R(z)$ tais que

$$f(z) = Q(z)P(z) + R(z), \text{com grau}(R) < m.$$

Pelo caso $m = 1$ temos $Q(z) = q(z)(z-\alpha)+b_0$, com q uma série de potências centrada na origem e convergente no plano $\mathbb{C}$ e b_0 uma constante. Segue

$$\begin{aligned} f(z) &= q(z)(z-\alpha)P(z) + [b_0P(z) + R(z)] \\ &= q(z)p(z) + r(z), \end{aligned}$$

com $r(z) = b_0P(z)+R(z)$ e grau$(r) \leq m < m+1$. A existência está provada.

◇ Unicidade. Suponhamos que existam duas divisões

$$f(z) = q_1(z)p(z) + r_1(z) \quad \text{e} \quad f(z) = q_2(z)p(z) + r_2(z)$$

ambas satisfazendo as condições exigidas no enunciado. Então temos

$$(q_2 - q_1)p = r_1 - r_2.$$

Portanto $(q_2 - q_1)p$ é um polinômio de grau menor que o grau de p. Provemos, por contradição, que r_1-r_2 é o polinômio nulo. Suponhamos $r_1-r_2 \neq 0$. Seja λ uma raiz de multiplicidade $j \geq 1$ de p. É trivial ver que existe

$$\lim_{z\to\lambda} \frac{r_1(z) - r_2(z)}{(z-\lambda)^j}.$$

Logo λ é raiz de $r_1 - r_2$ de multiplicidade $k \geq j$. Variando as raízes do polinômio $p(z)$ concluímos que degree$(r) \geq$ degree(p). Uma contradição.

Portanto temos $r_1 = r_2$ e então $q_1(z)p(z) = q_2(z)p(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Agora é simples ver que temos $q_1(z) = q_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$♣

Para mais resultados sobre séries de potências, vide
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf` .

4.7 - Cômputo de e^{tA} - fórmula explícita - método frações parciais.

Algoritmo da divisão de polinômios de Euclides. Sejam $p = p(z)$ e $d = d(z)$, ambos na álgebra de polinômios complexos $\mathbb{C}[z]$, com d não nulo. Então, existe um único par de polinômios complexos $q = q(z)$ e $r = r(z)$ satisfazendo

$$\begin{cases} p = dq + r, \text{ para todo } z \\ \text{e} \\ \text{grau}(r) < \text{grau}(d). \end{cases}$$

Prova. Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-EUCLIDES.pdf` ♣

Comentários. Sejam λ um ponto fixado no plano complexo e um inteiro $N \geq 1$.

(1) As derivadas da função $z \mapsto (z-\lambda)^N$ no ponto $z = \lambda$ são dadas por

$$\frac{d^k\{(z-\lambda)^N\}}{dz^k}\bigg|_{z=\lambda} = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq N \\ N! \text{ se } k = N. \end{cases}$$

(2) Seja $z \mapsto g(z)(z-\lambda)^N$ com $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivável o suficiente. Então segue

$$\frac{d^k\{g(z)(z-\lambda)^N\}}{dz^k}\bigg|_{z=\lambda} = \left\{g(z)(z-\lambda)^N\right\}^{(k)}\Big|_{z=\lambda} = 0 \text{ para } k = 0, \ldots, N-1.$$

Verificação.

- ⋄ Se $k = 0$, é claro que $g(\lambda)(\lambda-\lambda)^N = 0$.
- ⋄ Fixemos k, com $1 \leq k \leq N-1$. Pela *regra de Leibniz para a derivada do produto* (cheque-a) encontramos

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{g(z)(z-\lambda)^N\right\} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{d^{k-j}g(z)}{dz^{k-j}}\frac{d^j}{dz^j}\left\{(z-\lambda)^N\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}g^{(k-j)}(z)\frac{N!}{(N-j)!}(z-\lambda)^{N-j}.$$

Então, como $0 \leq j \leq k \leq N-1$, concluímos que $N - j \geq 1$ e portanto

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{g(z)(z-\lambda)^N\right\}\Big|_{z=\lambda} = 0 \text{ ♣}$$

(3) Vale um resultado análogo a (2), se g está definida numa vizinhança de λ.

Teorema (Método de Frações Parciais). *Sejam f, p, q e r como no lema. Logo,*

$$f(z) = q(z)p(z) + r(z), \text{ com grau}(r) < n = \text{grau}(p).$$

Suponhamos p mônico e grau$(p) = n \geq 1$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ as raízes distintas de $p(z)$ com respectivas multiplicidades algébricas $m_1, \ldots, m_m$. Escrevamos

$$p(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_m)^{m_m}.$$

Existem n constantes $C_{11}, \ldots, C_{1,m_1}, \ldots, C_{m_1 1}, \ldots, C_{m_1 m_m}$ validando a decomposição

$$\frac{f(z)}{p(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{p(z)} = q(z) + \left[\frac{C_{11}}{z-\lambda_1} + \cdots + \frac{C_{1m_1}}{(z-\lambda_1)^{m_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{C_{m1}}{z-\lambda_m} + \cdots + \frac{C_{mm_m}}{(z-\lambda_m)^{m_m}}\right]$$

$$= q(z) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k_j \leq m_j}} \frac{C_{jk_j}}{(z-\lambda_j)^{k_j}}.$$

As constantes são únicas e vale a fórmula (derivadas em z, variável complexa)

$$C_{jk_j} = \frac{1}{(m_j - k_j)!} \left\{ \frac{f(z)(z-\lambda_j)^{m_j}}{p(z)} \right\}^{(m_j - k_j)} \Bigg|_{z=\lambda_j}.$$

Prova.

- Decomposição. Provemos por indução em n. Se $n = 1$, nada há a fazer.

  Caso $n \geq 2$. Temos $p(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} P(z)$, com $0 \leq \text{grau}(P) < n$ e $P(\lambda_1) \neq 0$. Escrevamos
  $$r(z) = \frac{r(\lambda_1)}{P(\lambda_1)} P(z) + \left[r(z) - \frac{r(\lambda_1)}{P(\lambda_1)} P(z) \right].$$
  O *algoritmo da divisão de Euclides* garante um polinômio $s(z)$ satisfazendo
  $$\begin{cases} r(z) - \frac{r(\lambda_1)}{P(\lambda_1)} P(z) = (z-\lambda_1)s(z) + 0 \\ \text{grau}(s) \leq n-2. \end{cases} \qquad \text{[Cheque.]}$$
  Encontramos então
  $$\frac{r(z)}{p(z)} = \frac{r(\lambda_1)/P(\lambda_1)}{(z-\lambda_1)^{m_1}} + \frac{s(z)}{(z-\lambda_1)^{m_1 - 1} P(z)}.$$
  O polinômio $s(z)$ tem grau máximo $n-2$ e o polinômio $(z-\lambda_1)^{m_1-1}P(z)$ tem grau $n-1$, com $n-1 \geq 1$. Por indução segue a decomposição anunciada.

◇ **Fórmula.** Fixemos $j = 1$ e $k_1 \in \{1, \ldots, m_1\}$. Encontramos

$$\frac{f(z)(z-\lambda_1)^{m_1}}{p(z)} = C_{11}(z-\lambda_1)^{m_1-1} + \cdots + C_{1k_1}(z-\lambda_1)^{m_1-k_1} + \cdots + C_{1m_1}$$

$$+ (z-\lambda_1)^{m_1}\left[q(z) + \sum_{\substack{2 \le j \le m \\ 1 \le k_j \le m_j}} \frac{C_j k_j}{(z-\lambda_j)^{m_j}}\right].$$

Computemos as derivadas desejadas.

Notemos que o lado direito está definido numa vizinhança de λ_1 e que

$$\frac{f(z)(z-\lambda_1)^{m_1}}{p(z)} = \frac{f(z)}{\prod\limits_{j \ne 1}(z-\lambda_j)^{m_j}}.$$

A série de potências $q(z)$ é infinitamente derivável, graças ao teorema *derivação de séries de potências*.

A função entre colchetes é infinitamente derivável numa vizinhança do ponto $z = \lambda_1$. Então, pelos *comentários prévios* a esta prova, suas derivadas de ordem $k = 0, \ldots, m_1 - 1$ são todas nulas no ponto $z = \lambda_1$.

Computemos a derivada de ordem $m_1 - k_1$ das demais parcelas à direita. Temos

$$\frac{d^{m_1-k_1}}{dz^{m_1-k_1}}\left\{C_{11}(z-\lambda_1)^{m_1-1} + \cdots + C_{1k_1}(z-\lambda_1)^{m_1-k_1} + \cdots + C_{1m_1}\right\}\Big|_{z=\lambda_1}$$

$$= 0 + \cdots + 0 + (m_1-k_1)!C_{1k_1} + 0 + \cdots + 0.$$

Concluímos então que

$$\frac{d^{m_1-k_1}}{dz^{m_1-k_1}}\left\{\frac{f(z)(z-\lambda_1)^{m_1}}{p(z)}\right\}\Big|_{z=\lambda_1} = (m_1-k_1)!C_{1k_1}.$$

A argumentação é análoga para $j = 2, \ldots, m$ e $k_j = 1, \ldots, m_j$.

◇ **Unicidade das constantes.** Consequência imediata da fórmula obtida♣

Teorema (Fórmula explícita para e^{tA} - método frações parciais). *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, com polinômio característico*

$$p_A(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_m)^{m_m},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são os distintos zeros de p_A e $m_1, \ldots, m_m$ suas respectivas multiplicidades algébricas. Para cada $j = 1, \ldots, m$ e $k_j = 1, \ldots, m_j$, consideremos os polinômios (total de n polinômios)

$$p_{jk_j}(z) = \frac{p_A(z)}{(z - \lambda_j)^{k_j}}.$$

Então, temos

$$e^{tA} = \sum C_{jk_j} p_{jk_j}(A),$$

onde

$$C_{jk_j} = \frac{1}{(m_j - k_j)!} \left\{ \frac{e^{tz}(z - \lambda_j)^{m_j}}{p_A(z)} \right\}^{(m_j - k_j)} \Bigg|_{z = \lambda_j}.$$

Prova.

- Fixado um arbitrário $t \in \mathbb{R}$, a função $z \mapsto e^{tz}$ é dada por uma série de potências convergente em todo o plano complexo.

- Graças ao lema *divisão da série de potências por um polinômio* temos

$$e^{tz} = q(z)p_A(z) + r(z), \ \text{ com } \begin{cases} q \text{ uma série de potências convergente em } \mathbb{C}, \\ r \text{ é um polinômio com grau}(r) < \text{ grau}(p_A). \end{cases}$$

- Como A comuta com potências de A e com a identidade, segue

$$e^{tA} = q(A)p_A(A) + r(A).$$

  Graças ao teorema de Cayley-Hamilton temos $p_A(A) = 0$ e então

$$e^{tA} = r(A).$$

- Pelo teorema *método de frações parciais* encontramos

$$\frac{r(z)}{p_A(z)} = \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k_j \le m_j}} \frac{c_{jk_j}}{(z - \lambda_j)^{k_j}}, \quad \text{com } c_{jk_j} = C_{jk_j}.$$

  Concluímos então com

$$r(z) = \sum C_{jk_j} \frac{p_A(z)}{(z - \lambda_j)^{k_j}} \quad \text{e} \quad r(A) = \sum C_{jk_j} p_{jk_j}(A) \clubsuit$$

Exemplo 1. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$, com $p_A(z) = (z-\lambda)^2(z-\mu)$ e $\lambda \neq \mu$.

Solução.

- Pelo *método frações parciais* podemos escrever

$$\frac{e^{tz}}{(z-\lambda)^2(z-\mu)} = q(z) + \frac{\alpha}{z-\mu} + \frac{\beta}{z-\lambda} + \frac{\gamma}{(z-\lambda)^2}.$$

- As constantes são dadas por

$$\alpha = \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^2}, \qquad \gamma = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}$$

  e por fim

$$\beta = \left\{\frac{e^{tz}}{z-\mu}\right\}'\Big|_{z=\lambda} = \frac{te^{tz}(z-\mu)-e^{tz}}{(z-\mu)^2}\Big|_{z=\lambda} = \frac{e^{\lambda t}[t(\lambda-\mu)-1]}{(\lambda-\mu)^2}.$$

- A matriz exponencial procurada é

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 \\ &\quad + \frac{e^{\lambda t}[t(\lambda-\mu)-1]}{(\lambda-\mu)^2}(A-\lambda I)(A-\mu I) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}(A-\mu I) \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício. Seja A uma matriz 3×3 de números reais e com um autovalor duplo e um autovalor simples.

(1) Compare a fórmula para e^{tA} obtida no exemplo dado acima, e a fórmula já encontrada na seção 4.5, no corolário *casos particulares em* $M_3(\mathbb{R})$.

(2) Verifique diretamente (isto é, efetue os cômputos necessários) que estas duas fórmulas apresentam uma mesma matriz.

Exemplo 2. *Computemos e^{tA} para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p_A(z) = \det\begin{pmatrix} z-1 & -2 \\ -4 & z-3 \end{pmatrix} = (z-1)(z-3)-8$$

$$= z^2 - 4z - 5$$

$$= (z+1)(z-5).$$

Pelo método de frações parciais temos

$$\frac{e^{tz}}{(z+1)(z-5)} = q(z) + \frac{r(z)}{(z+1)(z-5)} = q(z) + \frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z-5}.$$

Donde segue

$$\alpha = -\frac{e^{-t}}{6} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{e^{5t}}{6}.$$

A resposta é então

$$e^{tA} = \frac{e^{5t}}{6}(A+I) - \frac{e^{-t}}{6}(A-5I).$$

$$= \frac{e^{5t}}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \frac{e^{-t}}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \clubsuit$$

Notemos que a resposta dada no exercício é mesma resposta que obtivemos no exemplo dado na seção 4.5

$$e^{tA} = \frac{e^{5t}+5e^{-t}}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}-e^{-t}}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \clubsuit$$

Exemplo 3. Computemos e^{tA} para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p_A(z) = \det\begin{pmatrix} z & -1 \\ 5 & z-2 \end{pmatrix} = z^2 - 2z + 5$$

$$= (z-1)^2 + 4 = (z-1-2i)(z-1+2i).$$

Pelo método de frações parciais vale a decomposição

$$\frac{e^{tz}}{[z-(1+2i)][z-(1-2i)]} = q(z) + \frac{r(z)}{[z-(1+2i)][z-(1-2i)]}$$

$$= q(z) + \frac{\alpha}{z-(1+2i)} + \frac{\beta}{z-(1-2i)},$$

com constantes

$$\alpha = \frac{e^{(1+2i)t}}{4i} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{e^{(1-2i)t}}{-4i}.$$

Temos então

$$e^{tA} = r(A) = \frac{e^{(1+2i)t}}{4i}[A-(1-2i)I] + \frac{e^{(1-2i)t}}{-4i}[A-(1+2i)I]$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(1+2i)t}}{4i}[A-(1-2i)I]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ie^t(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix} -1+2i & 1 \\ -5 & 1+2i \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(e^t\sin 2t - ie^t\cos 2t)\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^t\sin 2t\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + e^t\cos 2t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \clubsuit$$

Exemplo 4. Computemos e^{tA} para A real e dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ com } b \neq 0.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p_A(z) = \det\begin{pmatrix} z-a & b \\ -b & z-a \end{pmatrix} = (z-a)^2 + b^2$$

$$= [z-(a+bi)](z-(a-bi)].$$

Pelo método de frações parciais vale a decomposição

$$\frac{e^{tz}}{[z-(a+bi)][z-(a-bi)]} = q(z) + \frac{r(z)}{[z-(a+bi)][z-(a-bi)]}$$

$$= q(z) + \frac{\alpha}{z-(a+bi)} + \frac{\beta}{z-(a-bi)},$$

com constantes

$$\alpha = \frac{e^{(a+bi)t}}{2bi} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{e^{(a-bi)t}}{-2bi}.$$

Temos então

$$e^{tA} = r(A) = \frac{e^{(a+bi)t}}{2bi}[A-(a-bi)I] + \frac{e^{(a-bi)t}}{-2bi}[A-(a+bi)I]$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(a+bi)t}}{2bi}[A-(a-bi)I]\right\}$$

$$= -\frac{1}{b}\mathrm{Re}\left\{ie^{at}(\cos bt + i\sin bt)\begin{pmatrix} bi & -b \\ b & bi \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\mathrm{Re}\left\{(e^{at}\sin bt - ie^{at}\cos bt)\left[\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\left\{e^{at}\sin bt\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + e^{at}\cos bt\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix} \clubsuit$$

4.8 - Soluções da Homogênea $x' = Ax$ e Cálculo de e^{tA}. Método dos AutoValores.

Fixemos a base canônica em $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Autovetores e soluções). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e p_A, seu polinômio característico. Sejam $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ autovalores distintos de A [i.e., zeros de p_A].*

- *Se λ é real, então existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que*

$$Av = \lambda v \qquad [v \text{ é um } \mathsf{autovetor} \text{ associado a } \lambda].$$

O caminho real $x(t) = e^{\lambda t}v$ satisfaz $x' = Ax$.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ e a curva complexa $z(t) = e^{\lambda t}v$ satisfaz $z' = Az$.

- *Sejam $v_1, \ldots, v_m$ autovetores associados a respectivos reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Então,*

$$\{v_1, \ldots, v_m\} \text{ é LI.}$$

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são complexos então $v_1, \ldots, v_m$ são complexos e LI sobre $\mathbb{C}$.

- *Suponhamos λ complexo, com autovetor associado $v \in \mathbb{C}^n$. Então,*

$$x(t) = Re\big(e^{\lambda t}v\big) \ \text{ e } \ y(t) = Im\big(e^{\lambda t}v\big)$$

são soluções reais e LI de $x' = Ax$.

Prova.

◇ Autovalor real. Segue de $x' = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av = Ae^{\lambda t}v = Ax$.

◇ Os autovetores. O caso $m = 1$ é trivial. Supondo a afirmação verdadeira para $m-1$, provemo-la para m. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ coeficientes reais tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0.$$

Aplicando A a ambos os lados desta primeira identidade segue a segunda,

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m v_m = 0.$$

Multiplicando a primeira por $-\lambda_m$ e então somando à segunda encontramos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0.$$

A hipótese de indução mostra $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Logo, $\alpha_m v_m = 0$ e $\alpha_m = 0$.

- ⋄ Autovalor em $\mathbb{C}$. Escrevamos $z = e^{\lambda t}v = x + iy$, com $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.

  [Soluções.] Temos $x' + iy' = z' = Az = A(x + iy) = Ax + iAy$. Seguem

$$x' = Ax \text{ e } y' = Ay.$$

  [LI.] Os coeficientes de p_A são reais. Logo, p_A se anula no conjugado $\overline{\lambda}$.

  Temos $Av = \lambda v$ e, conjugando, $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$. Como A é real, segue $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Então, $\overline{v}$ é autovetor associado a $\overline{\lambda} \neq \lambda$. Donde,

$$\{v, \overline{v}\} \text{ é LI.}$$

  Os caminhos $z = e^{\lambda t}v$ e $\overline{z} = e^{\overline{\lambda}t}\overline{v}$ são soluções complexas do sistema homogêneo

$$z' = Az$$

  e são LI sobre $\mathbb{C}$ [pois $\{v, \overline{v}\}$ é LI e vale o teorema de existência e unicidade para soluções complexas de $z' = Az$]. Logo (cheque),

$$\left\{\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right\} = \{x, y\}$$

  é um conjunto (de soluções) LI sobre $\mathbb{C}$ (cheque). Portanto, $\{x, y\}$ é um conjunto de soluções reais de $x' = Ax$ e é LI sobre $\mathbb{R}$ (cheque)♣

Caso em que λ é raiz múltipla do polinômio característico p_A. Suponhamos que o autovalor λ é uma raiz de multiplicidade algébrica $k \geq 2$ de p_A.

Então, encontrado um conjunto B_1 de autovetores LI e associados ao autovalor λ, passamos a procurar um conjunto B_2 de vetores que satisfaça

$$(A - \lambda I)^2 v = 0$$

e tal que a reunião $B_1 \cup B_2$ é um conjunto LI. Iterando o procedimento, encontramos soluções para os sistemas

$$(A - \lambda I)^3 v = 0,\ (A - \lambda I)^4 v = 0, \ldots.$$

[Veremos que o processo se esgota em no máximo k etapas e com k vetores LI.]

Autovetor generalizado. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, a identidade $I \in M_n(\mathbb{R})$ e λ um escalar. Um vetor $v \neq 0$ é um autovetor generalizado associado a λ se

$$(A-\lambda I)^m v = 0, \text{ para algum } m \geq 1.$$

Proposição (Autovetores generalizados e soluções). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $v \neq 0$ um* autovetor generalizado *associado a λ. Então, o caminho*

$$x(t) = e^{tA}v \text{ é solução de } x' = Ax$$

e vale a fórmula (explícita)

$$e^{tA}v = e^{\lambda t}\sum_{k<m}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k v = e^{\lambda t}\left[v + t(A-\lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}v\right].$$

[Tal fórmula explicita $e^{tA}v$, apesar que desconhecemos a priori a matriz e^{tA}.]

Prova.

- Solução da edo. Vejamos dois argumentos.

  Primeiro argumento. A matriz e^{tA} é uma matriz fundamental e seus vetores-colunas são soluções de $x' = Ax$. Qualquer que seja o vetor w em $\mathbb{R}^n$, ou em $\mathbb{C}^n$, o vetor-coluna $e^{tA}w$ é uma combinação linear das colunas de e^{tA} (cheque). Em particular, $x(t) = e^{tA}v$ é uma solução de $x' = Ax$.

  Segundo argumento. A *propriedade (g) da exponencial de matrizes* garante

  $$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

  Assim, para todo vetor w em $\mathbb{R}^n$ [ou em $\mathbb{C}^n$] temos

  $$\frac{d}{dt}\big(e^{tA}w\big) = A\big(e^{tA}w\big).$$

- Fórmula. Temos $(A-\lambda I)^k v = (A-\lambda I)^{k-m}(A-\lambda I)^m v = 0$ para todo $k \geq m$. A matriz $\lambda t I$ comuta com toda matriz e temos $e^{\lambda t I} = e^{\lambda t} I$ (cheque).

  Segue

  $$\begin{aligned} e^{tA}v &= e^{\lambda t I + t(A-\lambda I)}v \\ &= e^{\lambda t I}e^{t(A-\lambda I)}v \\ &= (e^{\lambda t}I)e^{t(A-\lambda I)}v \\ &= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}v \\ &= e^{\lambda t}\left[v + t(A-\lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}v\right] \clubsuit \end{aligned}$$

Seja x a variável em $\mathbb{R}$. Introduzamos a notação

$$\mathbb{R}[x] = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{com } p = p(x) \text{ um polinômio com coeficientes reais}\}.$$

O grau do polinômio nulo é $-\infty$.

Dizemos que um polinômio é mônico se o coeficiente dominante é $+1$.

Algoritmo da divisão de polinômios de Euclides. Sejam $p = p(x)$ e $d = d(x)$, ambos em $\mathbb{R}[x]$, com d não nulo. Então, existe um único par de polinômios $q = q(x)$ e $r = r(x)$, ambos em $\mathbb{R}[x]$, satisfazendo

$$\begin{cases} p = dq + r, \text{ para todo } x \\ \text{e} \\ \text{grau}(r) < \text{grau}(d). \end{cases}$$

Prova. vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-EUCLIDES.pdf`.

Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e T o operador linear associado a A (isomorfismo fundamental). Consideremos um polinômio arbitrário

$$p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

em $\mathbb{R}[x]$. Então, definimos e identificamos a matriz e o operador dados por

$$p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I \quad \text{e} \quad p(T) = a_m T^m + \cdots + a_1 T + a_0 I.$$

Lema (Polinômio minimal). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e T o operador linear associado. Seja $J = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(T) = 0\}$. Vale o que segue.*

- *$J \neq \{0\}$.*
- *J é um ideal (fechado para soma, e para a multiplicação por polinômios).*
- *Existe um único polinômio mônico $m_T \in \mathbb{R}[x]$ tal que*

$$J = \{pm_T : p \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Donde J é o ideal gerado por m_T e este é dito polinômio minimal *de T. Indicamos $J = J(m_T)$.*

Prova.

- $[J \neq 0.]$ O conjunto de vetores (matrizes quadradas)

$$I, A, A^2, \dots, A^{n^2},$$

com n^2+1 vetores, é LD em $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$. Logo, existem coeficientes reais $c_0, c_1, \dots, c_{n^2}$ não todos nulos tais que

$$c_{n^2}A^{n^2} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

Seja $p(x) = c_{n^2}x^{n^2} + \cdots + c_1 x + c_0$. Seguem $p \neq 0$ e

$$p(A) = c_{n^2}A^{n^2} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

- É trivial que J é um ideal (cheque).

- O minimal. Seja m um polinômio mônico de grau mínimo em $J \setminus \{0\}$. Seja $P \in J$. Pelo *algoritmo de Euclides* para a divisão de polinômios existem $p \in \mathbb{R}[x]$ e $r \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$P = pm + r, \text{ com } \mathrm{grau}(r) < \mathrm{grau}(m).$$

Então, $r = P - pm \in J$, com $\mathrm{grau}(r) < \mathrm{grau}(m)$. Donde, $r = 0$ e $P = pm$.

Unicidade. Seja $M \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio mônico tal que $J = \{pM : p \in \mathbb{R}[x]\}$. Então seguem

$$\begin{cases} M \in J \setminus \{0\}, \\ m = pM \text{ para algum } p \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}, \\ \mathrm{grau}(m) \leq \mathrm{grau}(M), \text{ pela definição de } m. \end{cases}$$

Portanto,

$$0 \leq \mathrm{grau}(M) \leq \mathrm{grau}(p) + \mathrm{grau}(M) = \mathrm{grau}(m) \leq \mathrm{grau}(M).$$

Logo, p é uma constante. Como M e m são mônicos, temos $p = 1$ e $M = m$ ♣

Comentário, Notações e Definições. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear associado.

- Dado λ um escalar, $v \neq 0$ é um autovetor generalizado associado a λ se
$$(T - \lambda I)^j v = 0, \text{ para algum } j \geq 1.$$
Se existir um tal $v \neq 0$, então λ é um autovalor. De fato, neste caso existe o menor $j \geq 1$ tal que $(T - \lambda I)^j v = 0$. Se $j = 1$, nada mais há a fazer. Se $j \geq 2$, então o vetor $(T - \lambda I)^{j-1} v$ é não nulo e é autovetor associado a λ.

  Todo autovetor associado a λ é um autovetor generalizado associado a λ.

- O autoespaço generalizado (vetorial, cheque) associado a λ (autovalor) é
$$\text{aeg}(T, \lambda) = \{v : (T - \lambda I)^j v = 0 \text{ para algum } j\} \neq \{0\}.$$

- Fatoramos o polinômio minimal (via teorema fundamental da álgebra) como
$$m_T(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \mu_m)^{m_m},$$
com raízes distintas $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Denotemos
$$p_1(\lambda) = \frac{m_T(\lambda)}{(\lambda - \mu_1)^{m_1}}, \ldots, p_m(\lambda) = \frac{m_T(\lambda)}{(\lambda - \mu_m)^{m_m}}.$$

- O polinômio característico (mônico) de A é
$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$
O teorema fundamental da álgebra garante
$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$
onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são as n raízes complexas de $p(\lambda) = 0$, contadas com repetição. Avaliando cada uma das três expressões para p_A em $\lambda = 0$, obtemos
$$(-1)^n \det A = a_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$
Desenvolvendo o determinante
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix},$$
o coeficiente de λ^{n-1} é $\boxed{a_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\text{tr}(A)}$ ♣

Exemplo. Convertamos para sistema (e indiquemos a solução) a edo escalar

$$x'' - 2x' + 5x = 0.$$

Solução.

Introduzimos a substituição

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \end{cases}$$

Passamos então a resolver o sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz fundamental para o sistema linear homogêneo

$$Y' = AY$$

é

$$e^{tA} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -5t & 2t \end{pmatrix}.$$

Seja $y_0 \in \mathbb{R}^2$. A solução para o problema

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

é

$$Y(t) = e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -5t & 2t \end{pmatrix}} y_0.$$

No Exemplo 3 da seção 4.7 vimos que a matrix exponencial e^{tA} é dada por

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \left\{ e^t \sin 2t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + e^t \cos 2t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \clubsuit$$

Lema (Propriedades dos autoespaços generalizados e do polinômio minimal). *Mantidas as notações acima, seja λ um autovalor de $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_m$ as raízes distintas do polinômio minimal m_T. Vale o que segue*

- $T : \text{aeg}(T - \lambda I) \longrightarrow \text{aeg}(T - \lambda I)$ *[estabilidade] tem um único autovalor, λ.*
- *Seja um escalar $\nu \neq \lambda$. Está bem definido o isomorfismo linear (translação)*
$$T - \nu I : \text{aeg}(T - \lambda I) \longrightarrow \text{aeg}(T - \lambda I).$$
- *Cada zero, μ_l, do polinômio minimal é autovalor de T (logo, zero de p_T) e*
$$\text{aeg}(T, \mu_l) = \text{Imagem}(p_l(T)).$$

Prova.

◇ Estabilidade. A estabilidade segue de (cheque)
$$(T - \lambda I)^j T v = T(T - \lambda I)^j v \text{ para todo } j.$$
O autovalor. Por definição, $\text{aeg}(T - \lambda I) \neq 0$. Pelo teorema fundamental da álgebra, $T : \text{aeg}(T - \lambda I) \longrightarrow \text{aeg}(T - \lambda I)$ tem ao menos um autovalor α. Seja $v \in \text{aeg}(T - \lambda I)$, não nulo, tal que $Tv = \alpha v$. Para algum $j \geq 1$ temos
$$0 = (T - \lambda I)^j v = (T - \lambda I)^{j-1}(\alpha - \lambda)v = \cdots = (\alpha - \lambda)^j v.$$

◇ Translação. Seja $v \in \text{aeg}(T - \lambda I)$, onde $(T - \nu I)v = 0$. Existe $j \geq 1$ tal que
$$0 = (T - \lambda I)^j v = (T - \lambda I)^{j-1}(\nu - \lambda)v = \cdots = (\nu - \lambda)^j v.$$
Logo, $T - \nu I$ é operador injetor em dimensão finita e então um isomorfismo.

◇ Zeros de m_T. O caso $m = 1$ é simples (cheque). Suponhamos $m \geq 2$.

Fixado l, dado $v \in \mathbb{C}^n$ temos $(T - \mu_l I)^{m_l} p_l(T)v = m_T(T)v = 0$.

Como m_T é minimal, temos $p_l(T)v \neq 0$ para algum v (complete e cheque).

◇ $\text{aeg}(T, \mu_l)$. Combinando estes dois fatos segue $\text{Imagem}(p_l(T)) \subset \text{aeg}(T, \mu_l)$.

Pela segunda afirmação, $p_l(T) : \text{aeg}(T, \mu_l) \to \text{aeg}(T, \mu_l)$ é um isomorfismo.

Logo, $\text{aeg}(T, \mu_l) \subset \text{Imagem}(p_l(T))$♣

A dimensão geométrica de um autovalor λ (de um operador linear T) é
$$\dim\{v : Tv = \lambda v\}.$$

Seja $\mathbb{C}[z]$ a álgebra dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ e na variável $z \in \mathbb{C}$.

Teorema (Decomposição de $\mathbb{C}^n$ em soma direta de autoespaços generalizados). *Mantendo notações, valem a decomposição e propriedades abaixo.*

$$\mathbb{C}^n = aeg(T,\mu_1) \oplus \cdots \oplus aeg(T,\mu_m).$$

- *Dada uma base $\mathcal{B}_l$ para cada $aeg(T,\mu_l)$, então $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ é base de $\mathbb{C}^n$. Ainda, cada espaço $aeg(T,\mu_l)$ é invariante por T [isto é, estável sob T.]*
- *Se $d_l = dim(aeg(T,\mu_l))$, para $l = 1,\ldots,m$, o polinômio característico de T é*

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \mu_m)^{d_m}.$$

  Logo, o polinômio característico e o minimal tem o mesmo conjunto de zeros. A multiplicidade algébrica de μ_l como raiz do característico é $dim(aeg(T,\mu_l))$.

Prova. Em quatro partes: soma, soma direta, base e característico.

◇ Soma. Sejam m_T o minimal de T e os polinômios $p_1,\ldots,p_m$ já definidos. Vejamos que o ideal gerado por $p_1,\ldots,p_m$ (o menor ideal que os contém) é

$$J(p_1,\ldots,p_m) = \mathbb{C}[z].$$

O caso $m = 1$ é trivial, pois então $m_T(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{m_1}$ e $p_1(\lambda) = 1$.

O caso $m \geq 2$. Pela prova do lema *polinômio minimal*, terceira afirmação, todo ideal em $\mathbb{C}[z]$ é gerado pelo polinômio mônico de menor grau no ideal. Logo, existe $p_0 \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$J(p_1,\ldots,p_m) = J(p_0) \text{ [i.e., o ideal gerado por } p_0].$$

Então, todo zero de $p_0(\lambda)$ é zero de cada $p_1,\ldots,p_m$. Isto é impossível. Donde p_0 não tem zeros e, pelo *teorema fundamental da álgebra*, p_0 é uma constante. Segue $p_0 = 1$ e $J(p_0) = \mathbb{C}[z]$. Provamos que $J(p_1,\ldots,p_m) = \mathbb{C}[z]$.

Portanto, existem polinômios $q_1,\ldots,q_m$, em $\mathbb{C}[z]$, tais que

$$\begin{cases} p_1(\lambda)q_1(\lambda) + \cdots + p_m(\lambda)q_m(\lambda) = 1 \text{ e} \\ p_1(T)q_1(T) + \cdots + p_m(T)q_m(T) = I. \end{cases}$$

Então, dado um arbitrário $v \in \mathbb{C}^n$ temos

$$v = p_1(T)q_1(T)v + \cdots + p_m(T)q_m(T)v.$$

Dado $l = 1$, é trivial ver que $(T - \mu_1 I)^{m_1}[p_1(T)q_1(T)v] = m_T(T)q_1(T)v = 0$ e portanto $p_1(T)q_1(T)v \in \text{aeg}(T,\mu_1)$. Analogamente para $l = 2,\ldots m$.

- Soma direta. Se $m = 1$, é óbvio que a soma é direta. Suponhamos $m \geq 2$.

  Sejam $v_1 \in \text{aeg}(T, \mu_1), \ldots, v_m \in \text{aeg}(T, \mu_m)$ tais que

  $$v_1 + \cdots + v_m = 0.$$

  Existe N tal que $(T - \mu_1 I)^N v_1 = \cdots = (T - \mu_{m-1} I)^N v_{m-1} = 0$. Então segue

  $$(T - \mu_1 I)^N \cdots (T - \mu_{m-1} I)^N v_m = 0.$$

  Pelas *propriedades dos autoespaços generalizados e do polinômio minimal*,

  $$(T - \mu_1 I)^N \cdots (T - \mu_{m-1} I)^N : \text{aeg}(T, \mu_m) \longrightarrow \text{aeg}(T, \mu_m)$$

  é um isomorfismo linear. Logo, $v_m = 0$. Analogamente, para $v_1, \ldots, v_{m-1}$. Está provada que a soma é direta.

- Base. É trivial ver que $\mathcal{B}$ é base (cheque). A estabilidade segue do lema.

- Característico. Devido à soma direta $\mathbb{C}^n = \text{aeg}(T, \mu_1) \oplus \ldots \oplus \text{aeg}(T, \mu_m)$ e que os espaços $\text{aeg}(T, \mu_1), \ldots, \text{aeg}(T, \mu_m)$ são invariantes por T, segue que a matriz de $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, na base $\mathcal{B}$, é a matriz com m blocos (na diagonal)

  $$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad \text{cada } B_l \in M_{d_l \times d_l}(\mathbb{C}),$$

  e cada bloco B_l a matriz em relação à base $\mathcal{B}_l$ do operador linear (restrição)

  $$T_l = T : \text{aeg}(T, \mu_l) \longrightarrow \text{aeg}(T, \mu_l).$$

  Fora dos blocos, B é nula. Segue

  $$p_T(\lambda) = p_B(\lambda) = p_{B_1}(\lambda) \cdots p_{B_m}(\lambda) = p_{T_1}(\lambda) \cdots p_{T_m}(\lambda).$$

  Fixado l, o operador T_l tem μ_l como único autovalor (vide *propriedades dos autoespaços generalizados e do minimal*). Donde segue (cheque)

  $$p_{T_l}(\lambda) = (\lambda - \mu_l)^{d_l}.$$

  Logo,

  $$p_T(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \mu_m)^{d_m} \clubsuit$$

Dada $T : V \to V$ linear, o **kernel** ou **núcleo** de T é

$$\ker(T) = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Notação. Escrevemos $A \subsetneq B$, ou mesmo $B \supsetneq A$, se temos $A \subset B$ com $A \neq B$.

Um operador linear $N : V \to V$ é dito **nilpotente** se vale

$$N^j = 0. \text{ para algum } j.$$

Proposição (Operador nilpotente). *Seja $N : V \longrightarrow V$ um operador linear, com $\dim(V) = n \geq 1$. São equivalentes as afirmações abaixo.*

(a) O único autovalor de N é $\lambda = 0$.

(b) $N^n = 0$.

(c) N é nilpotente.

(d) Existe o menor $k \leq n$ tal que valem as cadeias monótonas estritas

$$\{0\} \subsetneq \ker N \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker N^k = V \quad e$$

$$V \supsetneq \text{imagem} N \supsetneq \text{imagem} N^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \text{imagem} N^k = 0.$$

(e) A matriz de N, em alguma base ordenada de V, é triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) A matriz de N, em alguma base ordenada de V, é triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova. Iniciemos com a equivalência entre (a), (b) e (c).

(a) $\Rightarrow (b)$. Temos $N : V \to V$ e $\dim N(V) \leq n-1$, pois $\dim(\ker N) \geq 1$.

Se $N(V) = 0$, temos $N^1 = 0$. Se $N(V) \neq 0$, então $N : N(V) \to N(V)$ tem autovalor 0 (cheque). Segue $\dim N^2(V) = \dim N(N(V)) \leq (n-1)-1$. Iterando chegamos a $N^n = 0$.

(b) $\Rightarrow (c)$. Óbvio.

(c) $\Rightarrow (a)$. Seja $j \geq 1$ com $N^j = 0$. Sejam um autovalor λ e $v \neq 0$ com $Nv = \lambda v$. Segue $0 = N^j v = \lambda^j v$ e $\lambda = 0$.

(b) $\Rightarrow (d)$ Por (c), existe o menor $k \in \{1, \ldots, n\}$ com $N^k = 0$. Donde $\ker N^k = V$. É claro que $\ker N^l \subset \ker N^{l+1}$ para todo l e que

$$\{0\} \subsetneq \ker(N) \subset \ker(N^2) \subset \cdots \subset \ker(N^k) = V.$$

Mostremos que $\ker N^l = \ker N^{l+1}$ implica $\ker N^{l+m} = \ker N^l$ para todo $m \geq 0$. De fato, dado v com $0 = N^{l+2}v = N^{l+1}Nv$ concluímos $Nv \in \ker N^{l+1} = \ker N^l$. Logo, $N^{l+1}v = 0$ e portanto $\ker N^{l+2} = \ker N^{l+1}$.

Portanto, pelo que foi feita até aqui concluímos que

$$\{0\} \subsetneq \ker N \subsetneq \cdots \subsetneq \ker N^k = V.$$

Donde segue

$$V \supsetneq \text{imagem}\, N \supsetneq \text{imagem}\, N^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \text{imagem}\, N^k = 0.$$

(d) $\Rightarrow$(e). Basta a base $\mathcal{B}$ (com a ordem de surgimento dos vetores, cheque):

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 \text{ uma base de } \ker N \neq 0, \\ \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ uma base de } \ker N^2, \\ \qquad\vdots \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \text{ base de } \ker N^k = V. \end{cases}$$

(e) $\Rightarrow$(f). Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a base ordenada em (e). Revertendo a ordem, a matriz de N para a base ordenada $\{v_n, \ldots, v_1\}$ é triangular inferior (cheque).

(f) $\Rightarrow$(a). Utilizando a matriz triangular inferior em (f), é claro que

$$p_T(\lambda) = \lambda^n.$$

Logo, o único autovalor é $\lambda = 0$♣

Teorema (Cayley-Hamilton). *Com as notações acima, temos*

$$p_T(T) = 0.$$

Prova.

Fixemos um arbitrário $l \in \{1, \ldots, m\}$. Sejam I_l o operador identidade definido em $\operatorname{aeg}(T, \mu_l)$ e I o operador identidade definido em V. Pelas *propriedades dos autoespaços generalizados*, o operador

$$T_l = T : \operatorname{aeg}(T, \mu_l) \longrightarrow \operatorname{aeg}(T, \mu_l)$$

tem μ_l como único autovalor. Logo, $T_l - \mu_l I_l$ tem apenas 0 como autovalor. Pela proposição *operador nilpotente*, item (b), segue

$$(T_l - \mu_l I_l)^{d_l} = 0.$$

Portanto $(T - \mu_l I)^{d_l}$ restrito a $\operatorname{aeg}(T, \mu_l)$ é nulo. Variando l vemos que

$$p_T(T) = (T - \mu_1 I)^{d_1} \cdots (T - \mu_m I)^{d_m}$$

restrito a $\operatorname{aeg}(T, \mu_l)$ é nulo. Pelo teorema *decomposição de V em autoespaços generalizados* concluímos que

$$p_T(T) = 0 \clubsuit$$

Comentário. Para outras três provas (todas elementares) do teorema de Cayley-Hamilton, vide seção 4.5 e

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Cayley-Hamilton.pdf`

A seguir, empregamos o teorema de Cayley-Hamilton (ou mesmo a existência do polinômio minimal) para computar a exponencial de matrizes através de um método/algoritmo baseado em um sistema linear com coeficientes constantes de edo's.

4.9 - Cálculo de e^{tA}. Métodos de Putzer.

Teorema (Método de Putzer, principal). *Sejam A uma matriz quadrada real de ordem n, a matriz identidade I de ordem n e as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ do polinômio característico p_A, contadas com repetição se necessário. Então temos*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}(t) P_k = f_1 P_0 + \cdots + f_n P_{n-1}$$

onde

$$P_0 = I \text{ e } P_k = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

As funções $f_1, \ldots, f_n$ são determinadas por recorrência a partir do PVI

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \textit{com } f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prova.

- ◇ Pelo teorema *existência e unicidade para sistemas lineares com coeficientes constantes*, basta mostrar que a matriz

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}(t) P_k$$

é solução do problema $X' = AX$ com $X(0) = I$.

- ◇ É claro que $\Phi(0) = 1P_0 = I$. A seguir, notemos que valem as identidades

$$\begin{cases} f_1' = f_1 \\ f_k' = f_{k-1} + \lambda_k f_k, \text{ se } k > 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} P_0 = I \\ P_k = (A - \lambda_k I) P_{k-1}, \text{ se } k \geq 1. \end{cases}$$

Pelo *teorema de Cayley-Hamilton* temos $P_n = p_A(A) = 0$.

- ◇ A seguir, derivando Φ encontramos (utilizando $P_n = 0$ na última passagem)

$$\begin{aligned} \Phi' - A\Phi &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}' P_k - A \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1} P_k \\ &= \lambda_1 f_1 P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_k + \lambda_{k+1} f_{k+1}) P_k - \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1} (\lambda_{k+1} P_k + P_{k+1}) \\ &= 0 \clubsuit \end{aligned}$$

Teorema (Método de Putzer, secundário). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, a matriz identidade I de $M_n(\mathbb{R})$ e as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ do polinômio característico*

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 I,$$

contadas com repetição se necessário. Seja $z = z(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a (única) solução de

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z' + a_0 z = 0 \quad \textit{com} \quad \begin{pmatrix} z(0) \\ \vdots \\ z^{(n-2)}(0) \\ z^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, vale a fórmula

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(t) A^j$$

com as funções reais $g_0, \ldots, g_{n-1}$ dadas sinteticamente pela fórmula matricial

$$g(t) = \mathcal{A}Z(t),$$

sendo as matrizes g, $\mathcal{A}$ e Z trivialmente identificáveis na fórmula não sintética

$$\begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_{n-2} \\ \vdots \\ g_1 \\ g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n-2)} \\ z^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Prova. Seja $\Phi(t) = \sum g_j A^j$. É claro que $\Phi(0) = g_0(0)I = 1.I = I$.

- Pelo *teorema de unicidade* basta mostrarmos $\Phi' - A\Phi = 0$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton temos $-A^n = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}$. Segue

$$\begin{aligned} \Phi' - A\Phi &= \sum_{j=0}^{n-1} g_j' A^j - \sum_{j=0}^{n-1} g_j A^{j+1} \\ &= g_0' I + \sum_{j=1}^{n-1} (g_j' - g_{j-1})A^j - g_{n-1}A^n \\ &= (g_0' + a_0 g_{n-1})I + \sum_{j=1}^{n-1} (g_j' - g_{j-1} + a_j g_{n-1})A^j. \end{aligned}$$

A conclusão segue então das identidades (cheque, é trivial)

$$\begin{cases} g_j = a_{j+1}z + \cdots + a_{n-1}z^{(n-j-2)} + z^{(n-j-1)} \\ g_{j-1} = a_j z + \cdots + a_{n-1}z^{(n-j-1)} + z^{(n-j)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} g_{n-1} = z \\ z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_0 z = 0 \; \clubsuit \end{cases}$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T., *Cálculo vol 2.*, editora Reverté, 1999.

2. Birkhoff, G., and Rota, G., *Ordinary Differential Equations*, 4th ed., J. Wiley ans Sons, 1989.

3. Bueno, H. P., *Funções de Matrizes (Versão Preliminar, 2002)* - Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Matemática. Disponível em `http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/calculo4/hamilton.pdf`

4. de Oliveira, Oswaldo R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv (2012), available at `http://arxiv.org/abs/1207.1472v2`.

5. de Oliveira, Oswaldo R. B., *The Exponential Matrix: an explicit formula by an elementary method*, Real Anal. Exchange 46 (1) 99 - 106, 2021. `https://doi.org/10.14321/realanalexch.46.1.0099`

6. Doering, C. I. e Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 2010.

7. Figueiredo, D. G. e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, 3ª ed., IMPA, 2008.

8. Knapp, A. W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005.

9. Putzer, E. J., *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, Amer. Math. Monthly, Vol. 73, No. 1 (1966), pp. 2-7. [`http://www.ime.usp.br/~oliveira/Putzer-method.pdf`]

10. Rota, G-C., *Ten lesson I wish I had learned before teaching differential equations*, Meeting of MAA, 1997. [`http://www.ime.usp.br/~oliveira/Rota.pdf`]

11. Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979.

12. Taylor, M., *Introduction to Differential Equations*, AMS, 2011.

Departamento de Matemática - Universidade de São Paulo

São Paulo, SP - Brasil

oliveira@ime.usp.br - `http://www.ime.usp.br/~oliveira`