Anos 2016. 2022 e 2023

MUDANÇA DE VARIÁVEL NA INTEGRAL DE RIEMANN NA RETA

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Resumo.

Apresentamos duas versões para a Mudança de Variável na Integral de Riemann na Reta. Os enunciados são práticos e as provas muito triviais. Ambas cobrem casos não cobertos pela célebre Mudança de Variável de H. Kestelman.

Introdução.

A versão mais simples deste teorema supõe as funções e as derivadas envolvidas contínuas em intervalos fechados, com a inversa da mudança de variável derivável.

Comentário baseado em T. M. Apostol *Análisis Matemático*, pp. 199–200. A versão mais geral do *Teorema da Substituição-Mudança de Variável* (na integral de Riemann uni-dimensional) não requer a continuidade das funções envolvidas e não requer que a substituição seja inversível. Tal versão tem a forma

$$\int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(G(t)\big)g(t)dt,$$

com f integrável no intervalo $G\big([\alpha,\beta]\big)$ e a substituição $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ da forma

$$G(t) = G(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} g(\tau)d\tau,$$

para alguma g integrável em $[\alpha,\beta]$. Destaquemos que a identidade $G'(t) = g(t)$ é válida nos pontos de continuidade de g mas não é assegurada nos demais pontos. A primeira prova da versão geral deve-se a H. Kestelman (1961). Na mesma revista, no mesmo número, R. Davies simplifica a prova de Kestelman. Desde então, muitos artigos foram e tem sido publicados sobre esta versão geral.

O livro de T. M. Apostol não prova a versão geral. A prova de Kestelman utiliza o conceito *medida nula*, que advém da teoria da medida de Lebesgue.

A versão que provamos a seguir apresenta as seguintes características.

- É de simples enunciado e com prova muito elementar.
- Se aplica em alguns casos em que a "versão geral" não se aplica.
- É mais forte que as em *Basic Real Analysis*, A. W. Knapp, pp. 37–38 (a prova nestas notas tem semelhanças e várias diferenças com relação à prova em tal livro) e em W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, p. 133.
- Não consta nos livros em Referências.

Notação.

Seja $[a, b]$ in intervalo na reta. Nesta prova admitimos partições

$$\mathcal{X} = \{a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\},$$

com pontos repetidos. Vários autores (Knapp, Lang, Rudin, Spivak, etc.) assim procedem. Uma vantagem destas é que a integral de uma função sobre um só ponto é automaticamente zero. Quanto a investigar a existência e o valor da integral de uma dada função, tanto faz se a partição tem ou não pontos repetidos.

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{X}$ uma partição de $[a, b]$, sejam

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Indicamos a *soma inferior de Riemann* e a *soma superior de Riemann* de f com respeito à partição $\mathcal{X}$ por, respectivamente,

$$s(f, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Teorema 1.

Teorema 1 (Teorema da Mudança de Variável Generalizado). *Sejam*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ integrável e } \varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$$

sobrejetora, crescente (não necessariamente estritamente crescente) e contínua. Suponhamos φ derivável em (α,β). As seguintes afirmações são verdadeiras.

- *Se φ' é integrável em $[\alpha,\beta]$, então o produto $(f\circ\varphi)\varphi'$ é integrável em $[\alpha,\beta]$.*
- *Se o produto $(f\circ\varphi)\varphi'$ é integrável em $[\alpha,\beta]$, então vale a fórmula*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Prova.

◇ A hipótese φ contínua é supérflua. Dado $t \in [\alpha,\beta]$, seja $x = \varphi(t) \in [a,b]$. Sejam x' e x'' tais que $x \in [x',x''] \subset [a,b]$. Como φ é sobrejetora e crescente, existem t' e t'', ambos no intervalo $[\alpha,\beta]$ e com $t' \leq t''$, satisfazendo $\varphi(t') = x'$ e $\varphi(t'') = x''$. Como a função φ é crescente, temos

$$\varphi\big([t',t'']\big) \subset [x',x''].$$

Logo, a função φ é contínua [observemos que se $x' < x$ então temos $t' < t$ e, analogamente, se $x < x''$ então $t < t''$].

◇ A função φ é uniformemente contínua. Trivial.

◇ Temos $\varphi' \geq 0$ no intervalo aberto (α,β). Óbvio, pois φ é crescente.

◇ Para integrar φ', é claro que podemos definir $\varphi'(\alpha)$ e $\varphi'(\beta)$ arbitrariamente.

◇ Seja $\mathcal{T} = \{\alpha = t_0 \leq \cdots \leq t_n = \beta\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[\alpha, \beta]$ e seja $\mathcal{X} = \{a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ a partição do intervalo $[a, b]$ dada por $\mathcal{X} = \varphi(\mathcal{T})$. Isto é, suponhamos $x_i = \varphi(t_i)$ para cada $i = 0, \ldots, n$.

Pelo TVM, existe $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

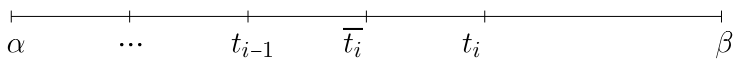

Figura 1: O ponto $\overline{t_i}$ relaciona comprimentos: $\Delta x_i = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

◇ **Se $|\mathcal{T}| \to 0$, então $|\mathcal{X}| \to 0$.** Segue da continuidade uniforme de φ pois dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que temos $|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq \delta_1$ se $|t - \tau| \leq \delta_2$.

◇ **Se φ' é integrável, então $(f \circ \varphi)\varphi'$ também.** Seja $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, arbitrário. Notemos que $\varphi(\tau_i) \in [x_{i-1}, x_i]$. Analisemos a soma de Riemann

$$\sum f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i = \sum f(\varphi(\tau_i))\Delta x_i + \sum f(\varphi(\tau_i))\big[\varphi'(\tau_i)) - \varphi'(\overline{t_i})\big]\Delta t_i.$$

Se $|\mathcal{T}| \to 0$ então $|\mathcal{X}| \to 0$ e a primeira soma no lado direito tende a $\int_a^b f dx$. Seja M uma constante tal que $|f| \leq M$ (existe, pois f é limitada). Segue

$$\Big|\sum f(\varphi(\tau_i))\big[\varphi'(\tau_i)) - \varphi'(\overline{t_i})\big]\Delta t_i\Big| \leq M\big[S(\varphi', \mathcal{T}) - s(\varphi', \mathcal{T})\big] \xrightarrow{|\mathcal{T}|\to 0} 0.$$

Logo, $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável (o valor da integral é igual ao da integral de f).

◇ **Se $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável, o valor de sua integral é igual ao da integral de f.** Com as notações acima, seja $\tau_i = \overline{t_i}$ e escrevamos $\overline{x_i} = \varphi(\overline{t_i})$.

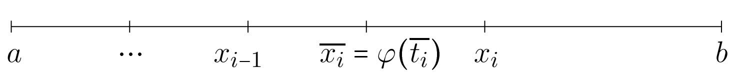

Figura 2: O ponto $\overline{x_i} = \varphi(\overline{t_i})$, onde $\Delta x_i = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

Segue então

$$\sum f(\varphi(\overline{t_i}))\varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i = \sum f(\overline{x_i})\Delta x_i.$$

Se $|\mathcal{T}| \to 0$, por definição o lado esquerdo converge à integral de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Se $|\mathcal{T}| \to 0$, então $|\mathcal{X}| \to 0$. Portanto, o lado direito tende à integral de f ♣

Corolário. *Mantidas as demais hipóteses no teorema, suponhamos que a aplicação contínua e sobrejetora* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *satisfaz uma das quatro condições abaixo.*

(a) φ *é monótona (isto é, crescente ou decrescente).*

(b) φ *é monótona por partes.*

(c) φ' *tem um número finito de zeros.*

(d) φ' *tem um número finito de zeros em* $[\alpha + \epsilon, \beta]$, *para cada* $0 < \epsilon < \beta - \alpha$.

Então, as seguintes afirmações são verdadeiras.

- *Se* φ' *é integrável, então* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *também o é.*
- *Se* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *é integrável, então*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Prova.

(a) O caso φ crescente já está provado. Suponhamos φ decrescente. Então,

$$\psi(s) = \varphi(\alpha + \beta - s), \text{ onde } s \in [\alpha, \beta],$$

é crescente, com $\psi(\alpha) = \varphi(\beta) = a$ e $\psi(\beta) = \varphi(\alpha) = b$.

É claro que φ é integrável se e somente se ψ é integrável. Analogamente para o par de derivadas φ' e ψ', e para o par de funções $(f \circ \varphi)\varphi'$ e $(f \circ \psi)\psi'$.

Aplicando a fórmula no teorema à função $(f \circ \psi)\psi'$, obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\psi(s)\big)\psi'(s)ds = -\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(\alpha + \beta - s)\big)\varphi'(\alpha + \beta - s)\big)ds.$$

Retornando à variável $t = \alpha + \beta - s$, encerramos este caso com

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f\big(\varphi(t)\big)[-\varphi'(t)]dt = \int_\beta^\alpha f\big(\varphi(t)\big)[\varphi'(t)]dt.$$

(b) Neste caso, existe uma partição finita $\{\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = \beta\}$ tal que φ é monótona em cada sub-intervalo $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, para $j = 0, \ldots, N - 1$. Então, pelo já provado em (a), temos

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{\varphi(\alpha_j)}^{\varphi(\alpha j+1)} f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Donde segue, encerrando este caso,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(c) Sejam $\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{N-1}\}$, onde $N \geq 2$, os zeros da derivada φ', caso existam. Sejam $\alpha_0 = \alpha$ e $\alpha_N = \beta$. Pelo *Teorema do Valor Intermediário para a Derivada (Teorema de Darboux)*, fixado um arbitrário sub-intervalo (α_j, α_{j+1}), a derivada φ' assume um único sinal (ou estritamente positivo ou estritamente negativo) ao longo deste sub-intervalo. Assim, ao longo de (α_j, α_{j+1}), ou φ é estritamente crescente ou φ é estritamente decrescente. Portanto, φ é monótona por partes. Então, a conclusão segue de (b).

(d) Pelo caso (c) segue

$$\int_{\varphi(\alpha+\epsilon)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha+\epsilon}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \text{ para cada } 0 < \epsilon < \beta - \alpha.$$

Analisemos esta identidade integral em dois sub-casos.

O sub-caso $(f \circ \varphi)\varphi'$ integrável (em $[\alpha, \beta]$). Pela continuidade da integral em relação aos extremos de integração e pela continuidade de φ, temos que

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Este sub-caso está encerrado. Retornemos à identidade integral sob análise.

O sub-caso φ' integrável (em $[\alpha, \beta]$). Aqui usamos o conceito *medida nula*. Pelo *Teorema de Caracterização de Lebesgue* segue que o conjunto de descontinuidades de $(f \circ \varphi)\varphi'$ no sub-intervalo $[\alpha+\epsilon, \beta]$ tem medida nula, para cada ϵ permitido. Logo, não é difícil ver, o conjunto de descontinuidades de $(f \circ \varphi)\varphi'$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ também tem medida nula. Ainda, como f e φ' são integráveis em seus respectivos domínios, temos que f e φ' são ambas limitadas. Logo, $(f \circ \varphi)\varphi'$ é limitada em $[\alpha, \beta]$ e com conjunto de descontinuidades de medida nula. Assim sendo, pelo *Teorema de Caracterização de Lebesgue* vemos que a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável em $[\alpha, \beta]$. A conclusão segue então do sub-caso $(f \circ \varphi)\varphi'$ integrável. Este sub-caso está encerrado.

A prova está completa$\clubsuit$

Exemplos.

Exemplo 1 (Um exemplo em que o Teorema 1 se aplica mas a "versão geral" não). Consideremos o par de funções

$$f(x) = x, \text{ se } x \in [0,1], \qquad \text{e} \qquad \varphi(t) = \sqrt{t} \text{ se } t \in [0,1].$$

Obviamente f é integrável. Ainda, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ é sobretora, crescente e contínua. Ainda, a função derivada φ' está definida no intervalo aberto $(0,1)$ e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

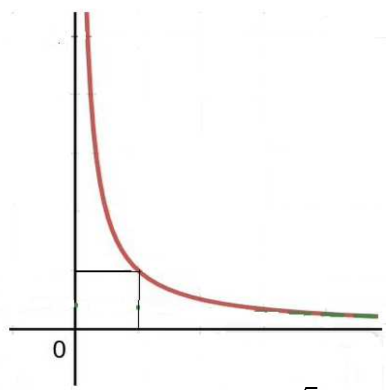

Figura 3: O gráfico de $2\varphi'(t) = 1/\sqrt{t}$, onde $t \in (0, +\infty)$.

É evidente que φ' não é limitada e portanto não integrável em $(0,1)$.

É trivial ver que a função

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

é integrável. Logo, pelo Teorema 1 segue

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}dt.$$

Por outro lado, φ' não é integrável em $(0,1)$ e então não podemos escrever

$$\sqrt{t} = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Desta forma, a "versão geral" (com $g = \varphi'$) não se aplica neste caso ♣

Exemplo 2 (Um exemplo em que o corolário provado acima se aplica mas a "versão geral" não). Consideremos o par de funções

$$f(x) = x^3, \text{ se } x \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right], \qquad \text{e} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0, \\ \\ t \sin \frac{1}{t}, & \text{se } t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]. \end{cases}$$

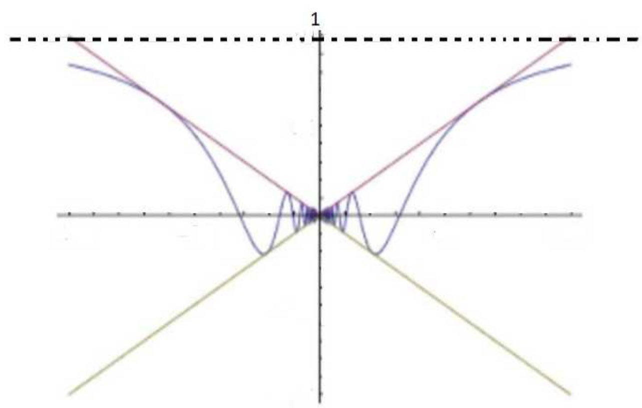

Figura 4: O gráfico de φ, supondo $t \in (-\infty, +\infty)$.

Obviamente, a função f é integrável. Ainda, a aplicação φ é contínua e oscila próximo à origem. Consideremos ϵ, com $0 < \epsilon < 2/\pi$. Segue que a aplicação φ tem um número infinito de pontos de máximo local, e um número infinito de pontos de mínimo local, no sub-intervalo $[0, \epsilon]$. Portanto φ' tem um número infinito de zeros em $[0, \epsilon]$ e não é difícil ver que φ' tem um número finito de zeros em $[\epsilon, 2/\pi]$.

A derivada φ' está definida no intervalo aberto $(0, 2/\pi)$ e temos

$$\varphi'(t) = \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}.$$

É evidente que φ' não é limitada e portanto não integrável em $[0, 2/\pi]$.

Por outro lado, é fácil constatar a integrabilidade da função

$$(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) = t^3 \left(\sin^3 \frac{1}{t}\right)\left(\sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}\right).$$

Pelo Corolário, item (d), segue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \, dx = \int_0^{\frac{2}{\pi}} [\varphi(t)]^3 \varphi'(t) \, dt.$$

Donde segue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \, dx = \frac{\varphi^4(t)}{4}\Big|_0^{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Como φ' não é integrável, a versão de Kestelman não se aplica♣

Teorema 2.

Seja I um intervalo não vazio arbitrário. Dada $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f se temos $F'(x) = f(x)$ em todo ponto x de I. Se $x \in I$ é uma extremidade de I, então $F'(x)$ é a apropriada derivada lateral.

Teorema 2 (Teorema da Mudança de Variável Generalizado). *Consideremos uma função integrável $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, com I um intervalo, que admita uma primitiva. Consideremos uma aplicação contínua $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ que é diferenciável no intervalo (α, β). Vale o que segue.*

- *Se $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável em $[\alpha, \beta]$, então vale a fórmula*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Prova.

⋄ Se as derivadas laterais $\varphi'(\alpha)$ e $\varphi'(\beta)$ não existem, podemos defini-las à vontade. Isto não afeta a integral do produto $(f \circ \varphi)\varphi'$.

⋄ Seja F uma primitiva de f e seja $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente. Então temos

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha+\epsilon}^{\beta-\epsilon} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt &= \int_{\alpha+\epsilon}^{\beta-\epsilon} F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \\
&= \int_{\alpha+\epsilon}^{\beta-\epsilon} (F \circ \varphi)'(t)dt \\
&= F\big(\varphi(\beta-\epsilon)\big) - F\big(\varphi(\alpha+\epsilon)\big). \\
&= \int_{\varphi(\alpha+\epsilon)}^{\varphi(\beta-\epsilon)} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Portanto, impondo $\epsilon \to 0$, pela continuidade de φ e pela continuidade da integral com respeito aos pontos extremos da integral concluímos que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.$$

A prova está completa♣

Observação. Os exemplos quanto ao Teorema 1 também servem ao Teorema 2.

Referências.

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, segunda edición (1977), Ed. Reverté.
2. Davies, R., *An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration*, Mathematical Gazette, 45 (1961) pp. 23–25.
3. Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol. 1., 5ª edição, LTC, 2001.
4. Hairer E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 2000.
5. Kestelman, H., *Change of variable in Riemann integration*, Mathematical Gazette **45** (1961), 351, pp 17–23.
6. Knapp, A. W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005, pp.
7. Lang, S., *Undergraduate Analysis*, second ed., Springer, China, 1997.
8. Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, 1976.
9. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.
10. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, 2008.