Ano 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EM $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ - INTERPRETAÇÕES E EXEMPLOS

Definições. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$, e p um ponto em Ω. Temos as seguintes classificações para o ponto p.

- Crítico (ou estacionário) da função f, se $\nabla f(p) = 0$.
- Um ponto de máximo [ponto de mínimo] absoluto (ou global) da função f se temos $f(p) \geq f(x)$ $[f(p) \leq f(x)]$, para todo x no domínio de f.
- Um ponto de máximo [ponto de mínimo] local da função f se existe um raio $r > 0$ tal que temos $f(p) \geq f(x)$ $[f(p) \leq f(x)]$, para todo x na intersecção $B(p;r) \cap \Omega$.
- Extremante de f se p é ponto de máximo/mínimo local ou global de f.
- Extremante local de f se p é ponto de máximo/mínimo local de f.
- Extremante local de f em um subconjunto A de Ω, se p está em A e p é ponto de máximo [ponto de mínimo] local da função f restrita a A. Isto é, se existe um raio $r > 0$ tal que temos $f(p) \geq f(a)$ para todo $a \in B(p,r) \cap A$, ou se temos $f(p) \leq f(a)$ para todo $a \in B(p,r) \cap A$.

1. Teorema Básico, Multiplicadores de Lagrange no Plano.

Teorema 1. *Sejam f e g funções em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, e L a curva de nível 0 de g, com $\nabla g \neq 0$ nos pontos de L. Seja p um extremante local de f em L. Temos*

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \text{ para algum } \lambda \text{ em } \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

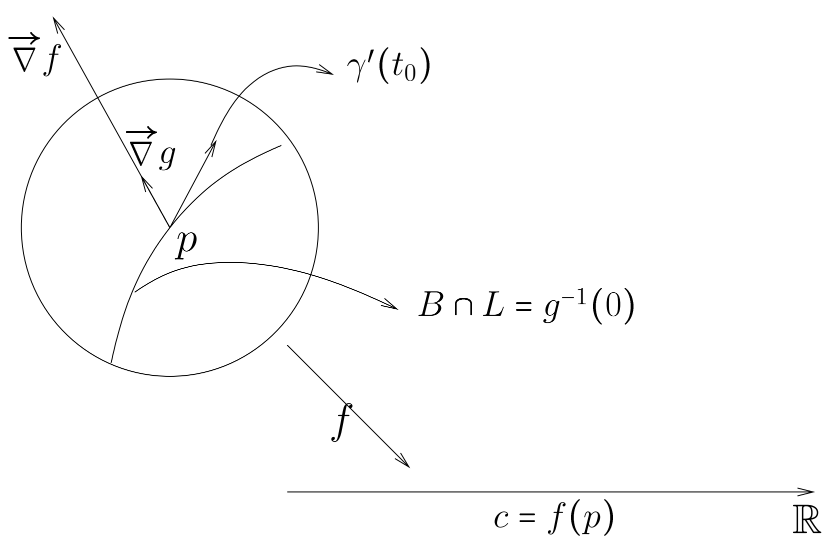

Figura 1: Teorema de Lagrange no Plano

Prova. (Vide Figura 1.)

Localmente, em p, o Teorema da Função Implícita (vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-EXEMPLOS.pdf` pg 3-6) mostra que L é uma curva $\gamma(t)$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) \neq 0$. Assim $(f \circ \gamma)(t)$ tem extremante em $t = 0$. Donde $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e, pela regra da cadeia,

$$\nabla f(p) \perp \gamma'(0).$$

Também temos

$$g \circ \gamma \equiv 0\,, \quad \nabla g(p) \perp \gamma'(0)\,, \quad \gamma'(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(p) \neq 0.$$

Logo, $\nabla f(p)$ é paralelo a $\nabla g(p) \neq 0$. Donde, a tese♣

Interpretações Geométricas para o Teorema 1 (Lagrange).

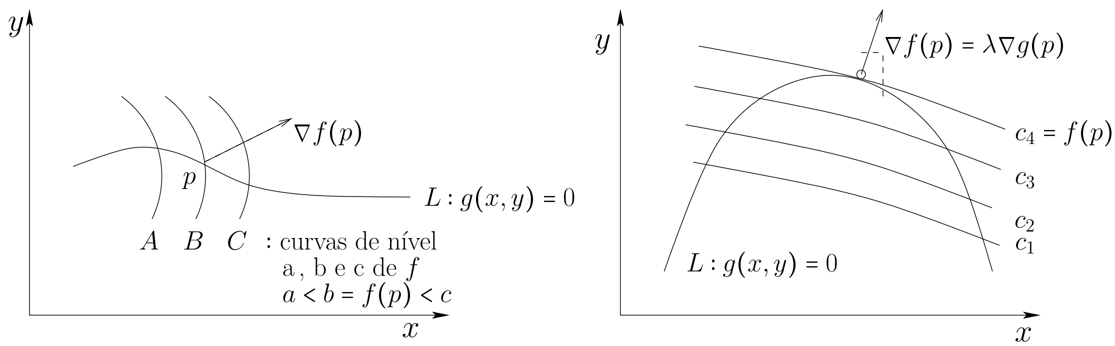

Figura 2: Ilustrações 2A e 2B (complementares) para o Teorema de Lagrange

Interpretação para Figura 2-A (à esquerda).

Suponha $\nabla f(p) \neq \overrightarrow{0}$ oblíquo a L em p. Então, a curva C de nível $f(p)$, de f, cruza a curva L e as curvas de nível c, de f, para $c \approx f(p)$, com gráficos próximos a C, também cruzam L e, orientando-as na direção de crescimento de c (a direção do gradiente) vemos que p não é ponto de máximo, nem de mínimo, local de f em L, contra a hipótese. Donde $\nabla f(p)$ é ortogonal a L, assim como $\nabla g(p)$. Logo, o vetor $\nabla f(p)$ é paralelo a $\nabla g(p)$.

Interpretação para Figura 2-B (à direita).

Representemos as curvas de nível

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = f(x_0, y_0) = f(p)$$

no sentido de crescimento de f [i.e., no sentido de $\nabla f(p)$]. Claramente o valor máximo de f sobre a curva

$$L = \{(x,y) : g(x,y) = 0\},$$

corresponde ao maior valor c tal que a curva de nível $f(x,y) = c$ intercepta a curva L. Em tal ponto p de intersecção tais curvas tem mesma reta tangente e mesma reta normal, as quais a priori tem direção $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p)$ (Figura 2-B), respectivamente. Logo, tais vetores são paralelos e $\nabla f(p)$ é um múltiplo de $\nabla g(p)$ já que este é não nulo.

Observações. Mantenhamos a notação do Teorema 1 e de sua prova.

1. Suponhamos que p é ponto crítico de f. Então, pondo $\lambda = 0$ temos $\nabla f(p) = \overrightarrow{0} = \lambda \nabla g(p)$. Porém, não existe λ tal que
$$\overrightarrow{0} \neq \nabla g(p) = \lambda \nabla f(p).$$
Neste sentido, a equação (1.1) é a melhor possível.

2. Pontos críticos de f pertencentes a L, são candidatos a extremantes locais de f restrita a L.

3. Se $\nabla f \neq \overrightarrow{0}$ em todo ponto, localmente parametrizamos a curva de nível $c = f(p)$, de f, por uma curva δ, com $\delta' \neq \overrightarrow{0}$. Esta curva tem vetor tangente ortogonal a $\nabla f(p)$. Logo, $\delta'(p) \perp \nabla g(p)$. No ponto p, visto que os vetores tangentes δ' e γ' são não nulos e ortogonais a $\nabla g(p)$, vemos que δ' e γ' são múltiplos um do outro. Donde as curvas $L = g^{-1}(0)$ e a de nível $c = f(p)$ da função f, tangenciam-se em p.

4. Os extremantes saem do sistema
$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$
que é equivalente ao sistema
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

5. Na equação (1.1) [i.e., $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$], é possível eliminar o parâmetro λ (a conveniência depende do problema). Basta resolvermos
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}(p) \;=\; 0.$$

A questão da determinação dos extremantes locais de f sobre a curva $\{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ é usualmente referida como o problema da determinação dos máximos e mínimos de f sujeita à restrição $g(x,y) = 0$ ou, dos máximos e mínimos condicionados de f sujeita à condição $g(x,y) = 0$.

Vejamos alguns conceitos úteis ao Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Definições Topológicas. Sejam A e K dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

- A é fechado se seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus A = A^c$ é aberto.
- K é compacto se é fechado e limitado.

Teorema (Weierstrass). *Seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um compacto K de $\mathbb{R}^n$. Então, f assume valor máximo e valor mínimo em K.*

Prova. Vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-WEIERSTRASS.pdf`.

Exemplo 1. Determine a curva de nível de $f(x,y) = x^2+16y^2$ que tangencia a curva (ramo de hipérbole) $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Dê o ponto de tangência.

Solução.

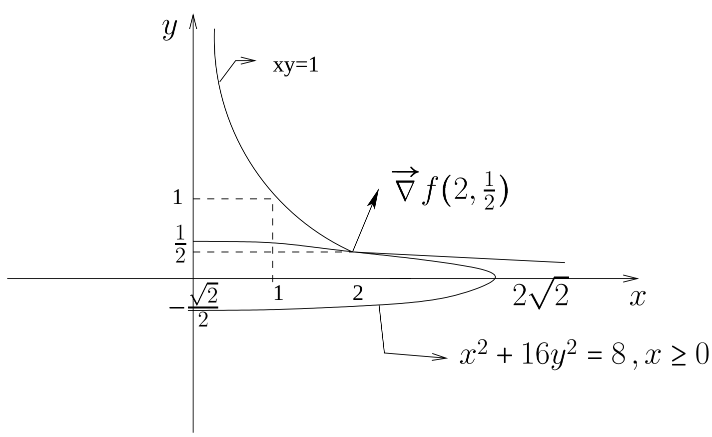

Figura 3: Ilustração ao Exemplo 1

No ponto (x_0, y_0) em que as curvas se tangenciam seus vetores tangentes são paralelos e seus vetores normais também. O normal à curva de nível é ∇f e o normal à hipérbole $xy = 1$ é $\nabla g(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$ (não nulo pois $x_0 y_0 = 1$). Obtemos $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e a identidade vetorial

$$(2x_0, 32y_0) = \lambda(y_0, x_0).$$

Logo, $2x_0.32y_0 = \lambda y_0.\lambda x_0$ e, como $x_0 y_0 = 1$, obtemos $64 = \lambda^2$ e $\lambda = \pm 8$. Como $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, não temos $\lambda = -8$. Donde segue $x_0 = 4y_0$ e portanto, $1 = x_0 y_0 = 4y_0^2$ e assim encontramos $y_0 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = 2$ e o ponto de tangência

$$(x_0, y_0) = \left(2, \frac{1}{2}\right).$$

A curva de nível é a elipse dada por $x^2 + 16y^2 = f(2, \frac{1}{2}) = 4 + 4 = 8$♣

Exemplo 2. Analise os máximos e mínimos de

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2\,, \quad \text{com a restrição} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Solução.

Sejam a elipse $E = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e a função $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$. Então, $E = g^{-1}(0)$ e $\nabla g = (2x, 4y) \neq \vec{0}$ sobre E. Como f é contínua e E é compacto, por Weierstrass, f assume máximo e mínimo em E. Por multiplicadores de Lagrange, para tais extremantes existe λ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{ou,} \qquad \begin{cases} (2x - 2y, -2x + 6y) = \lambda(2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 = 1\ . \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ na primeira equação do sistema à direita temos,

$$\begin{vmatrix} 2x - 2y & 6y - 2x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y(x - y) - x(3y - x) = 0\ .$$

Porém, temos $0 = 2(xy - y^2) - (3xy - x^2) = (x - 2y)(x + y)$. Assim, obtemos as soluções $P = (2y, y)$ ou $Q = (-y, y)$. Como P e Q pertencem à elipse concluímos que

$$\begin{cases} (2y)^2 + 2y^2 = 1 \\ \text{ou} \\ y^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\ . \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \text{ou} \\ Q = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ . \end{cases}$$

Computemos f em P e em Q. Como $f(-x,-y) = f(x,y)$ temos,

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) &= f\left(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) &= \tfrac{1}{2} \\ f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 2. \end{aligned}$$

Então,

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ são pontos de máximo}$$

e

$$\pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ são pontos de mínimo} \clubsuit$$

2. Multiplicadores de Lagrange em $\mathbb{R}^3$, com uma restrição

Teorema 2. *Sejam f e g em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^3$. Consideremos a superfície de nível $S = g^{-1}(0)$, com $\nabla g \neq \vec{0}$ em todo ponto de S. Seja p, em S, um extremante local de f restrita a S. Então temos*

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Interpretação. (Análoga ao caso planar.) Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$ é oblíquo a S em p (i.e., ao plano π tangente a S em p), então a superfície S' de nível $f(p)$, de f, cruza S em p e as superfícies de nível c, de f, para valores de c próximos de $f(p)$, também cruzam S e orientando-as na direção $\nabla f(p)$, de crescimento de c, vemos que p não é extremante de f, contra a hipótese. Logo, $\nabla f(p)$ é ortogonal a S, assim como $\nabla g(p) \neq \vec{0}$. Donde $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p)$ são paralelos.

Prova.

Pelo Teorema das Funções Implícitas, vide

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-EXEMPLOS.pdf`, p 10-11,

S é localmente em $p = (x_0, y_0, z_0)$ (i.e., em uma bola aberta contendo p), o gráfico de uma função $z = \varphi(x,y)$, com o par (x,y) numa vizinhança de (x_0,y_0) e $\varphi(x_0,y_0) = z_0$. Pelas hipóteses, para toda curva γ no gráfico de φ, com $\gamma(0) = p$, a composta $f \circ \gamma$ tem extremante $t = 0$. Portanto, $\nabla f(p) \perp \gamma'(0)$. Donde $\nabla f(p)$ é ortogonal ao plano π, tangente ao gráfico de φ em p. Evidentemente $\nabla g(p)$ é ortogonal ao gráfico de φ e ao plano π.

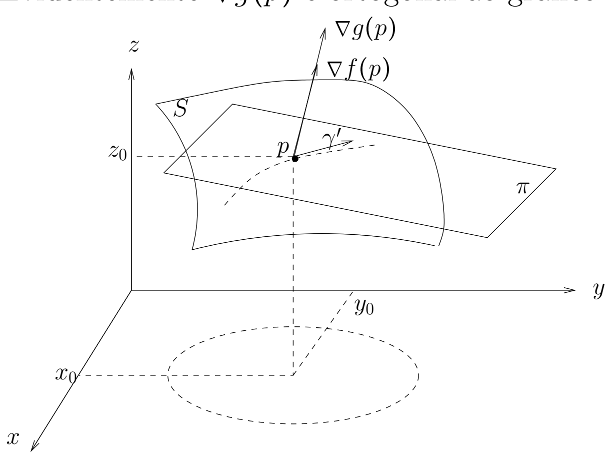

Figura 4: Ilustração ao Teorema 2.

Logo, $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p) \neq \overrightarrow{0}$ são paralelos. Donde concluímos a tese ♣

Observação 6. No Teorema 2 também é simples eliminar o parâmetro λ. A resolubilidade da equação $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ equivale à de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} (p) = \vec{0} \, .$$

Exemplo 3. Encontre o único ponto P no plano $3x+2y+z=12$ cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0,0,0)$ e a $(1,1,1)$ é mínima.

Solução.

Geometricamente, se K é um disco fechado e limitado que contém os pontos dados e intersecta o plano π dado, o ponto procurado pertence a $K \cap \pi$ e é então o mínimo absoluto da função (quadrado da distância)

$$D(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

restrita ao compacto $K \cap \pi$. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo. Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x,y,z)$ com a restrição $3x+2y+z=12$ satisfazem a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} D(x,y,z) = \lambda(3,2,1)\,, \ \lambda \text{ em } \mathbb{R}\,,$$

ou, eliminando o parâmetro λ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x+2(x-1) & 2y+2(y-1) & 2z+2(z-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y-1-4z+2)\vec{i} - (2x-1-6z+3)\vec{j} + (4x-2-6y+3)\vec{k} = \vec{0}$ e portanto, $2y = 4z-1$ e $x = 3z-1$. Donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z-1)+(4z-1)+z=12$. Finalmente,

$$z = \frac{16}{14}\,, \ y = \frac{25}{14}\,, \ x = \frac{34}{14} \ \text{ e } P_0 = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right).$$

Atenção. Neste caso podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x+2(x-1)}{3} = \frac{2y+2(y-1)}{2} = \frac{2z+2(z-1)}{1} \quad (=\lambda) \clubsuit$$

Exemplo 4. Consideremos o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

(a) Determine o ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano π mais próximo à origem.

(b) Com o método utilizado em (a) mostre que a distância de todo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano é dada pela fórmula:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ .$$

1ª Solução.

(a) Geometricamente sabemos que existe tal ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que $P_1 = (0, 0, 0)$ se $d = 0$. Passemos à determinação do mínimo da função $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância, sujeita à restrição $ax + by + cz + d = 0$. Utilizando multiplicadores de Lagrange temos a identidade vetorial

$$\nabla\Phi(P_1) = (2x_1, 2y_1, 2z_1) = \lambda(a, b, c).$$

Logo, $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \frac{\lambda}{2}(a, b, c)$ e, substituindo tais coordenadas para P_0 na equação para π temos $0 = ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + d$. Donde, $\frac{\lambda}{2} = -\frac{d}{a^2+b^2+c^2}$. Assim, o ponto de π mais próximo à origem é

$$P_1 = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)\ .$$

(b) Geometricamente é claro que existe em π o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mais próximo de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Claramente, P_2 é ponto de mínimo absoluto da função $\Psi(x, y, z) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ restrita ao plano $ax+by+cz+d = 0$, que avalia o quadrado da distância dos pontos do plano π ao ponto P_0. Aplicando multiplicadores de Lagrange temos

$$\nabla\Psi(P_2) = \big(2(x_2 - x_0), 2(y_2 - y_0), 2(z_2 - z_0)\big) = \mu(a, b, c).$$

Portanto, $\overrightarrow{P_0P_2} = \frac{\mu}{2}(a, b, c)$ e a distância de P_2 ao plano π, dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, é então $\frac{|\mu|}{2}|(a, b, c)|$. Visto que $P_2 = P_0 + \frac{\mu}{2}(a, b, c)$ pertence a π temos $a(x_0 + \frac{\mu}{2}a) + b(y_0 + \frac{\mu}{2}b) + c(z_0 + \frac{\mu}{2}c) + d = 0$. Donde,

$$\frac{\mu}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d).$$

Finalmente, a distância procurada é

$$\frac{|\mu|}{2}|\langle a, b, c\rangle| = \frac{\frac{|\mu|}{2}|(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2ª Solução. (Geométrica, simples e sem multiplicadores de Lagrange.)

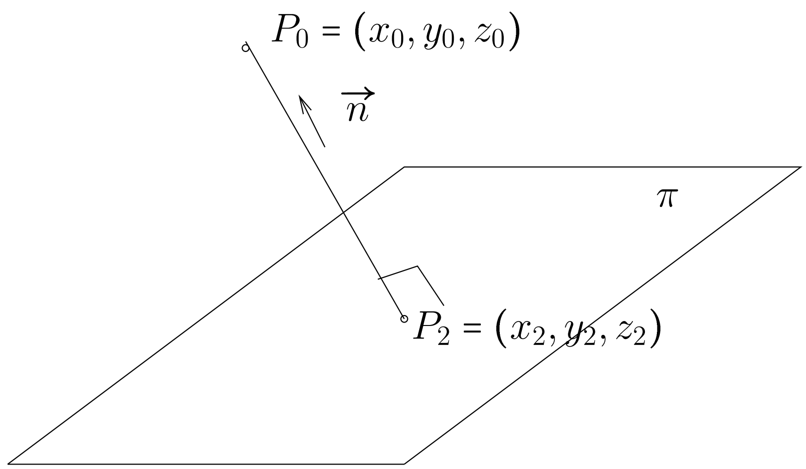

Figura 5: A distância de um ponto a um plano.

Se P_2, pertencente a π, é o pé da perpendicular por P_0 ao plano π temos que $\overrightarrow{P_0P_2}$ é paralelo ao vetor normal a π e dado por

$$\overrightarrow{n_\pi} = (a, b, c) \neq \overrightarrow{0}.$$

Logo, existe λ em $\mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_0P_2} = \lambda(a, b, c)$ e portanto a distância de P_0 ao plano π é $|\overrightarrow{P_0P_2}|$. Porém, da identidade

$$P_2 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_2} = P_0 + \lambda(a, b, c),$$

segue que

$$0 = a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0,$$

e assim, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$ e

$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Donde segue

$$|\overrightarrow{P_0P_2}| = |\lambda|\,|(a, b, c)| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \clubsuit$$

3. Multiplicadores de Lagrange em $\mathbb{R}^3$, com duas restrições

Recordemos que: se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$ então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Teorema 3. *Consideremos três funções f, g e h em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, com Ω um aberto em $\mathbb{R}^3$, e a intersecção de duas superfícies de nível zero*

$$L = \left\{P = (x,y,z) \text{ em } \Omega : \; g(P) = 0 \text{ e } h(P) = 0\right\}.$$

Suponhamos que $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$, para todo (x,y,z) em L. Suponhamos que $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ é um extremante local de f sobre L. Então, existem λ_1 em $\mathbb{R}$ e λ_2 em $\mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g(P_0) + \lambda_2 \nabla h(P_0).$$

Prova.

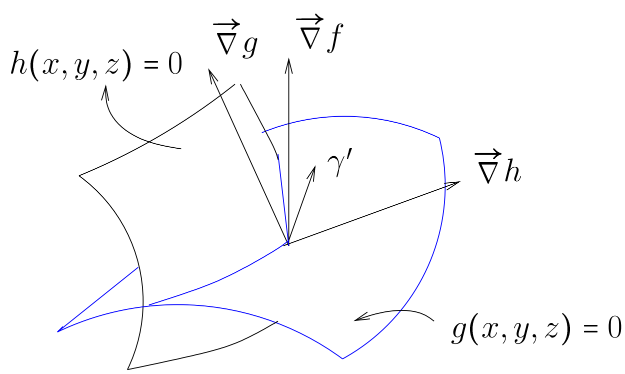

Figura 6: Ilustração ao Teorema 3.

Pelas hipóteses (vide o Teorema das Funções Implícitas em `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-IMPLI-EXEMPLOS.pdf`, p 16-17) temos que localmente, em P_0, L é uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Como Imagem(γ) está contida na superfície de nível zero de g, segue que o vetor $\nabla g(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$ e, analogamente, o vetor $\nabla h(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$. Portanto, $\gamma'(0)$ é paralelo a $\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0)$.

Ainda, a função $(f \circ \gamma)(t)$ tem máximo, ou mínimo, local em $t = 0$ e $\nabla f(P_0) \perp \gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, temos $\nabla f(P_0) \perp \nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0)$. Donde segue que o vetor $\nabla f(P_0)$ é combinação linear de $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$♣

Observação 7. É possível eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 . No Teorema 3 temos a identidade $\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g(P_0) + \lambda_2 \nabla h(P_0)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} (P_0) \;=\; 0.$$

Observação 8. Os sistemas encontrados nos teoremas acima são redutíveis a uma única equação vetorial, eliminando equações de restrição e acrescentando variáveis. Para o Teorema 3, e analogamente para os demais, definimos a função $\mathcal{L}$ em cinco variáveis livres (vide Exemplo 6, a seguir), ou não condicionadas,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu\, h(x,y,z).$$

As soluções do sistema mencionado são os pontos de máximo ou mínimo não-condicionados de $\mathcal{L}$, os quais se encontram entre seus (de $\mathcal{L}$) pontos críticos e satisfazem as identidades vetoriais

$$\vec{\nabla}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = (f_x - \lambda g_x - \mu\, h_x, f_y - \lambda g_y - \mu\, h_y, f_z - \lambda g_z - \mu h_z, -g, -h) = \vec{0},$$

que é um problema sem condições de restrição e simétrico no sentido que as variáveis tem igual importância. Esta formatação do problema é elegante e trivialmente generalizável para uma função f com qualquer número de variáveis e com qualquer número de restrições.

Definição. A variável λ (ou μ) é um multiplicador de Lagrange.

Em Economia, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, etc. o multiplicador λ é convenientemente interpretado e tem importância por si só.

Exemplo 5. Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Solução.

Determinemos os pontos que maximizam a função $D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância de (x,y,z) a $(0,0,0)$ com as restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$, com $g(x,y,z) = x + y + z - 1$ e $h(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$.

Tais pontos pertencem à intersecção do elipsóide $g = 0$ com o plano $h = 0$, a qual é um compacto K de $\mathbb{R}^3$. Como D é contínua, D assume máximo e mínimo em K. Pela Observação 7 ao Teorema 3, se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é extremante local de D sobre $K = \{(x,y,z) : g = 0 \text{ e } h = 0\}$ temos

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 8y_0 & 2z_0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & 4y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $0 = x_0(z_0 - 4y_0) - y_0(z_0 - x_0) + z_0(4y_0 - x_0) = 3y_0(z_0 - x_0)$ e temos $y_0 = 0$ ou $z_0 = x_0$. Se $y_0 = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4\,, \end{cases}$$

$$x^2 + (1-x)^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Assim, $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são candidatos a extremantes. Se $z_0 = x_0$ temos,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1-2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}\,.$$

Neste caso os candidatos são $P_3 = (0,1,0)$ e $P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Comparando os valores $D(P_1) = D(P_2) = 4$, $D(P_3) = 1$ e $D(P_4) = \frac{177}{81}$ constatamos que P_1 e P_2 são os pontos desejados ♣

Exemplo 6. Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo à origem.

Solução.

Minimizemos $x^2+y^2+z^2$ com as restrições $x+2y+z-1 = 0$ e $-3x-y+2z-4 = 0$. Definindo

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(-3x - y + 2z - 4)\,,$$

resolvamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = 2x - \lambda + 3\mu = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = 2y - 2\lambda + \mu = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} & = 2z - \lambda - 2\mu = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = -(x + 2y + z - 1) = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} & = (3x + y - 2z + 4) = 0\ . \end{cases}$$

Das três primeiras equações temos

$$x = \frac{\lambda - 3\mu}{2}\,, \qquad y = \frac{2\lambda - \mu}{2}\,, \qquad z = \frac{\lambda + 2\mu}{2}\ ,$$

que substituídas na quarta e na quinta equações e então simplificando fornecem

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu & = 2 \\ 3\lambda - 14\mu & = -8, \end{cases}$$

e

$$\lambda = \frac{52}{75} \text{ e } \mu = \frac{54}{75}.$$

Donde concluímos

$$x = -\frac{11}{15},\ y = \frac{5}{15} \ \text{ e } \ z = \frac{16}{15}\clubsuit$$

No espaço $\mathbb{R}^n$, chamamos um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ de hiperplano (se $n = 3$, um hiperplano é um plano passando pela origem).

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e tal que a restrição de f a um hiperplano π tem um máximo em um ponto P no hiperplano. Verifique que dado um vetor arbitrário $\overrightarrow{v}$ unitário e paralelo a π então temos

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(P) = \nabla f(P) \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Isto é, $\nabla f(P)$ é ortogonal a π. Supondo $\overrightarrow{n}$ o vetor normal ao hiperplano π conclua que existe λ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(P) = \lambda \overrightarrow{n}\,.$$

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, n fixo em $\mathbb{N}$. Como consequência do Teorema da Função Implícita para uma função g em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, mostremos que vale um resultado análogo aos teoremas 1 e 3, no espaço n-dimensional.

4. Multiplicadores de Lagrange em $\mathbb{R}^n$, enunciados

Teorema 4. *Sejam f e g, ambas em $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, e $S = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$, a superfície de nível zero de g, com $\overrightarrow{\nabla} g(x) \neq \overrightarrow{0}$ para todo x em S. Seja P, em S, um extremante local de f restrita a S. Então, existe λ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\overrightarrow{\nabla} f(P) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(P)\,.$$

Interpretação. A superfície solução S da equação $g(x) = 0$ possui hiperplano tangente π e para toda curva γ em S, $\gamma(0) = P$, a composta $f \circ \gamma$ tem um extremante em P. Donde, $\nabla f(P)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(0)$ em π. Assim, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ são ortogonais a π. A conclusão é então trivial.

Prova. Vide prova de *Multiplicadores de Lagrange em Várias Variáveis* em

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-LAGRAN-PROVA.pdf`.

Teorema 5. *Sejam f em $C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ e $g = (g_1, \ldots, g_m)$ em $C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, com $m < n$. Suponhamos que f tem um extremante local no ponto P em $S = g^{-1}(0, \ldots, 0)$. Suponhamos também que o conjunto $\{\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ em todo ponto. Então, existem m números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tais que*

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

Interpretação. Consideremos, para cada $j = 1, \ldots, m$, o hiperplano em $\mathbb{R}^n$ tangente à superfície $g_j^{-1}(0)$ no ponto P. A intersecção destes hiperplanos é o espaço vetorial V tangente a S e de dimensão $n - m$. O espaço vetorial $V^\perp$ ortogonal a V, tem dimensão m. O conjunto $\{\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)\}$ é ortogonal a V e portanto uma base de $V^\perp$. Ainda, dada uma curva arbitrária γ em S, com $\gamma(0) = P$, temos que a função $f \circ \gamma$ tem um extremante em $t = 0$ e assim, $\nabla f(P)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$. Logo, o vetor $\nabla f(P)$ é ortogonal a V e uma combinação linear de $\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)$.

Prova. Vide prova de *Multiplicadores de Lagrange em Várias Variáveis* em

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-LAGRAN-PROVA.pdf`.

5. Máximos e mínimos de uma função em um compacto.

Definições topológicas. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- O ponto P de A, é um ponto interior de A se existe uma bola aberta, não vazia, centrada em P e contida em A. Isto é, se existe $r > 0$ tal que $B(P; r)$ está contida em A.
- O ponto P de $\mathbb{R}^n$ é um ponto de fronteira de A se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e também $\mathbb{R}^n \setminus A = A^C$, o complementar de A. Isto é, se para todo $r > 0$, temos

$$B(P; r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{e também} \quad B(P; r) \cap A^C \neq \varnothing.$$

- O interior de A, $\mathrm{int}(A)$, é o conjunto dos pontos interiores de A.
- A fronteira de A, ∂A, é o conjunto dos pontos de fronteira de A.

Dado P em A, temos uma só das possibilidades: ou $P \in \mathrm{int}(A)$, ou $P \in \partial A$.

Consideremos uma função f em $C^1(K; \mathbb{R})$, com K um compacto em $\mathbb{R}^2$. São úteis as observações abaixo.

(A) Pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo, absolutos.

(B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos de f. Isto é, em tais pontos o gradiente se anula. Assim, adotamos o procedimento abaixo.

(1) Restringindo f a $\mathrm{int}(K)$ determinamos os pontos críticos, candidatos a extremantes.

(2) Encontramos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre a fronteira, ∂K, ou elementarmente ou por multiplicadores de Lagrange.

(3) Os extremantes absolutos estão entre os valores de f nos pontos acima obtidos.

Exemplo 8. Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes e os máximos e mínimos locais e absolutos de f no quadrado

$$K = \{(x,y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}.$$

Solução. Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\overrightarrow{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10\rangle = \langle 0,0\rangle \;\Rightarrow\; 2x+3y-1 = 0 \text{ e } 9x+4y-5 = 0.$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é

$$P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right).$$

A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo ou mínimo local em $\mathrm{int}(D)$.

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \;\cup\; \{1\} \times [-1,1] \;\cup\; [-1,1] \times \{-1\} \;\cup\; [-1,1] \times \{1\}\ .$$

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K.

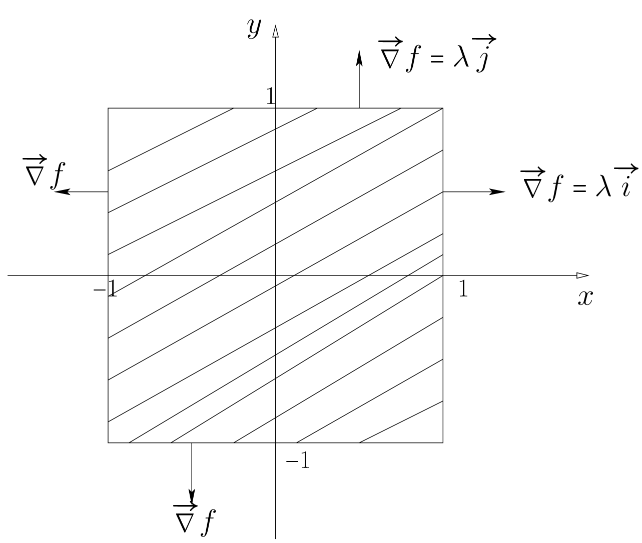

Figura 7: Ilustração ao Exemplo 7

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem (vide Teorema 2) o que segue.

Em $\{-1\}\times]-1,1[$ temos

$$\begin{cases} x = -1 \\ 0 = f_y = -18 + 8y - 10, \end{cases}$$

donde segue $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.

Em $\{1\}\times]-1,1[$ temos

$$\begin{cases} x = 1 \\ 0 = f_y = 18 + 8y - 10, \end{cases}$$

donde segue $y = -1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Em $]-1,1[\times\{-1\}$ temos

$$\begin{cases} y = -1 \\ 0 = f_x = 12x - 18 - 6, \end{cases}$$

donde segue $x = 2$, que também descartamos.

Em $]-1,1[\times\{1\}$ temos

$$\begin{cases} y = 1 \\ 0 = f_x = 12x + 18 - 6, \end{cases}$$

donde segue $x = -1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta. Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. Ainda,

$$\begin{cases} f(-1,+1) = -7 \text{ é o mínimo absoluto} \\ \text{e} \\ f(-1,-1) = 49 \text{ é o máximo absoluto} \clubsuit \end{cases}$$

Exemplo 9. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 1\}$.

Solução. Pelo Teorema de Weierstrass a função f admite pontos de máximo e mínimo absolutos em M. Se tais pontos estiverem no interior de M então eles são pontos críticos. Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f = (2x+1\,, 2y+1\,, 2z) = (0\,,0\,,0)$$

e portanto o único ponto crítico

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

não está no interior de M e assim os extremantes de f pertencem à fronteira de M, indicada ∂M. Então, um extremante P_0 arbitrário pertence a

$$M_1 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z > 1\right\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \left\{(x,y,1) : x^2+y^2 < 3\right\} \text{ ou}$$

$$M_3 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = 1\}.$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ estiver em M_1, por Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla} f = (2x_0+1\,, 2y_0+1\,, 2z_0) = \lambda(2x_0\,, 2y_0\,, 2z_0)$$

e portanto $2z_0 = \lambda 2z_0$ e então : ou temos $\lambda = 1$ ou temos $z_0 = 0$. Se $z_0 = 0$, então P_0 não pertence a M_1 e descartamos tal possibilidade. Se $\lambda = 1$ então temos $2x_0 + 1 = 2x_0$, uma contradição!

Se P_0 pertence a M_2 (onde temos $z_0 = 1$) então segue

$$(2x_0+1, 2y_0+1, 2z_0) = \lambda(0,0,1).$$

Logo, encontramos o candidato

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Se P_0 pertence a M_3 então P_0 é extremante condicionado de

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + x + y + z\,, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange obtemos a identidade vetorial

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1(2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0) + \lambda_2(0,0,1).$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + 1 & 2y_0 + 1 & 2 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde segue $2y_0(2x_0 + 1) - 2x_0(2y_0 + 1) = 0$ e $y_0 = x_0$. Substituindo na equação da esfera segue $2x_0^2 = 3$ e $x_0 = \pm\sqrt{6}/2$.

Desta forma, encontramos os pontos candidatos

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right).$$

Como

$$f(P_1) = \frac{1}{2}\,,\ f(P_2) = 4 + \sqrt{6} \text{ e } f(P_3) = 4 - \sqrt{6},$$

concluímos que P_1 é ponto de mínimo absoluto e P_2 é ponto de máximo absoluto ♣

Exemplo 10 (Um Argumento Importante).

Argumento. Seja $S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ a superfície de nível 0 de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$, com f de classe C^1 e

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) \neq \vec{0}\,, \quad \text{para todo } (x,y,z) \text{ em } S.$$

Seja $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que P_1 não pertence a S. Suponhamos que P_0 é o ponto em S que realiza a distância do ponto P_1 à superfície S [isto é, vale a desigualdade $|P_1 - P_0| \leq |P_1 - P|$, para todo P em S]. Então temos,

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Donde segue, $\overrightarrow{P_0P_1} \perp S$. Consequentemente obtemos: $\overrightarrow{P_0P_1} \perp \gamma'(t_0)$, se γ é uma curva arbitrária de classe C^1, em S, tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Prova. Seja $D(x,y,z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ definida em $\mathbb{R}^3$. Considerando um disco fechado $\overline{D}(P_1; R)$ centrado em P_1 e com raio $R > 0$ suficientemente grande tal que $K = \overline{D}(P_1; R) \cap S \neq \varnothing$, temos que K é compacto (pois fechado e limitado). Pelo Teorema de Weierstrass a função D restrita a K assume um valor mínimo em algum ponto $P \in S$. É claro que P é o ponto P_0 procurado, que realiza a distância de P_1 à superfície S.

Então, como D restrita a S assume valor mínimo em $P_0 \in S$, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange é válida a equação:

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0)\,, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Computemos o gradiente de $D(x,y,z)$. É fácil ver a identidade vetorial

$$\vec{\nabla}(D) = \big(2(x - x_1)\,, 2(y - y_1)\,, 2(z - z_1)\big),$$

e portanto,

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = 2(x_0 - x_1\,, y_0 - y_1\,, z_0 - z_1) \;=\; -2\overrightarrow{P_0P_1}\,,$$

e assim temos (notemos, abaixo, que a constante -2 é absorvível por λ)

$$-2\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \clubsuit$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5ª ed., Ed. LTC, 2002.
3. Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 2., IMPA, 2009.
4. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`