INTEGRAL NA RETA

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Ano 2019

Continua no verso.

1. Introdução.

Suponhamos uma torneira aberta em uma piscina e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Figura 1: Enchendo de água uma piscina.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0,T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários

$$0 = t_0 \leq \cdots \leq t_i \leq \cdots \leq t_n = T,$$

a variação de $Q(t)$ no período $[0,T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais. Assim,

$$(1) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}.$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ coincide com (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação) a vazão (velocidade de escoamento) num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$. Isto é, pondo

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

obtemos

$$\text{(2)} \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}-t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}).$$

Combinando (1) e (2) encontramos

$$\text{(3)} \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i}\, \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i})\Delta t_i.$$

Definimos **a integral da função** Q' como o limite dos somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i)\Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i],$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero.

Indicamos a **a integral da função** Q' por

$$\int_0^T Q'(t)dt.$$

Assim, se tal limite existir, e em particular ele existe se a função Q' é contínua (como provaremos na seção Integrabilidade das Funções Contínuas), temos

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \clubsuit$$

Interpretação. A variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado.

Notando que Q é uma primitiva de Q' (pois a derivada de Q é Q') e trocando Q' por f é fácil ver que podemos reenunciar o resultado acima da forma abaixo.

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e F uma primitiva de f, temos

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

2. Definição de Integral e Primeiro TFC.

Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). [O valor da integral é a variação da primitiva, se esta existir.] *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann integrável e* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivável e tais que* $F' = f$. *Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Prova.

Por definição do conceito *integral de Riemann*, a função f é **limitada** e a integral de Riemann de f é o número real indicado e definido por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ ,$$

onde

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\} \text{ é uma } \textbf{partição} \text{ de } [a,b],$$

$$|\mathcal{P}| = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\} \text{ é a } \textbf{norma} \text{ da partição } \mathcal{P},$$

$$\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$, subordinada à partição $\mathcal{P}$ e

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

é a **soma de Riemann** de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$. Dizemos então que a função f é Riemann integrável ou, brevemente, integrável.

[Logo, veremos que a hipótese "limitada" na definição de integral é supérflua.]

A seguir, seja

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b\}$$

uma partição qualquer de $[a,b]$. Temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})].$$

Pelo TVM para derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i.$$

Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemann de f relativa a esta partição $\mathcal{P}$ e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Assim, para toda partição $\mathcal{P}$ existe uma escolha $\mathcal{E}$ tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$.

Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido

$$F(b) - F(a)\,\clubsuit$$

Comentário. A hipótese "limitada" na definição de integral é supérflua. De fato, sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, um número real I, um número natural n e uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$, com $\Delta x_i = \Delta = (b-a)/n$ se $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I\right| < 1, \text{ para todos } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ e } i = 1, \ldots, n.$$

Consideremos um arbitrário $p \in [a, b]$. Seja j tal que $p \in [x_{j-1}, x_j]$. Segue

$$\left|f(p)\Delta + \sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta - I\right| < 1.$$

Pela desigualdade triangular $|x| - |y| \leq |x + y|$, segue

$$|f(p)\Delta| < 1 + \left|\sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta - I\right|.$$

Pela desigualdade triangular $|x+y| \leq |x| + |y|$ segue

$$|f(p)\Delta| < 1 + |I| + \left|\sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta\right|.$$

Aplicando sucessivamente a desigualdade triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$ encontramos

$$|f(p)\Delta| < 1 + |I| + \sum_{i \neq j} |f(x_i)\Delta|.$$

Donde segue

$$|f(p)\Delta| \leq 1 + |I| + [|f(x_0)| + \cdots + |f(x_j)| + \cdots + |f(x_n|]\Delta.$$

Por fim, temos

$$|f(p)| \leq \frac{1+|I|}{\Delta} + |f(x_0)| + \cdots + |f(x_j)| + \cdots + |f(x_n|,$$

para todo ponto p em $[a,b]$. Logo, f é limitada$\clubsuit$

Nem toda função integrável admite primitiva. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se } \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

é integrável em $[-1,1]$ mas, não existe $F : [1,1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $F' = f$ em todo ponto de $[-1,1]$. Verifique.

Assumiremos, por algumas seções, o seguinte resultado,

Teorema (Existência da integral para funções contínuas). *Consideremos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f é Riemann integrável.*

Prova. Vide seção Integrabilidade das funções contínuas.

3. Propriedades Elementares da Integral.

Proposição (Linearidade da Integral). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, as funções $f + g$ e λf são integráveis. Ainda mais,*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Prova.

- $\diamond$ Propriedade da soma. Utilizemos a definição de integral. Dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}_1$ com norma $|\mathcal{P}_1| < \delta_1$ e para toda escolha $\mathcal{E}_1$ subordinada à partição $\mathcal{P}_1$ temos

$$\left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, existe um $\delta_2 > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}_2$ com norma $|\mathcal{P}_2| < \delta_2$ e para toda escolha $\mathcal{E}_2$ subordinada à partição $\mathcal{P}_2$ temos

$$\left| S(g, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos então $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Desta forma, para toda partição $\mathcal{P}$ com norma $|\mathcal{P}| < \delta$ e para toda escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ temos

$$\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donde segue

$$\left| S(f+g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right] \right| =$$

$$= \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) + S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right|$$

$$\leq \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx \right| + \left| S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

A prova da propriedade da soma está completa.

$\diamond$ A propriedade da multiplicação por escalar. Dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ com norma $|\mathcal{P}| < \delta$ e para toda escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ temos

$$\left|S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{|\lambda|+1}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned}\left|S(\lambda f,\mathcal{P},\mathcal{E}) - \lambda\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\lambda S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) - \lambda\int_a^b f(x)dx\right| \\ &= \left|\lambda\left[S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx\right]\right| \\ &= |\lambda|\left|S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\ &\leq |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|+1} \\ &= \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda|+1}\right)\epsilon \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

A prova da propriedade para a multiplicação por escalar está completa♣

Proposição (Aditividade da Integral sobre Intervalos, primeira abordagem). *Seja $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e um ponto $b \in (a,c)$. Suponhamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e que $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ é integrável. Então, temos*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno satisfazendo as duas condições abaixo.

(1) Existe uma partição $\mathcal{P}_1$ de $[a,b]$, com norma $|\mathcal{P}_1| < \delta$, e uma escolha $\mathcal{E}_1$ subordinada à partição $\mathcal{P}_1$ tal que

$$\left|S(f,\mathcal{P}_1,\mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

(2) Existe uma partição $\mathcal{P}_2$ de $[b,c]$, com norma $|\mathcal{P}_2| < \delta$, e uma escolha $\mathcal{E}_2$ subordinada à partição $\mathcal{P}_2$ tal que

$$\left| S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_b^c f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam a partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ e a escolha $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. Segue então

$$\begin{aligned}
&\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right] \right| \\
&\qquad = \left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) + S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \right| \\
&\qquad \leq \left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x)dx \right| + \left| S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_b^c f(x)dx \right| \\
&\qquad \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Isto é, dado $\epsilon > 0$ encontramos uma soma de Riemann $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$ para $f : [a,c] \to \mathbb{R}$, com a norma de $\mathcal{P}$ arbitrariamente pequena, satisfazendo

$$\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right] \right| < \epsilon.$$

Entretanto, por hipótese a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e então existe o valor para o limite de suas somas de Riemann, com a norma da partição tendendo a zero. Pela unicidade do limite segue então (cheque)

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \clubsuit$$

Notação. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e um ponto $c \in [a,b]$, escrevemos

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_c^c f(x)dx = 0.$$

4. Positividade.

Teorema (Propriedade de Positividade). *Seja* $f : [a,b] \to [0,\infty)$ *integrável. Suponhamos que existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* f *é contínua em* x_0 *e* $f(x_0) > 0$*. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Prova.

Suporemos $x_0 \in (a,b)$ pois a prova é semelhante nos casos $x_0 = a$ e $x_0 = b$. Por continuidade, existe um intervalo $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$ tal que

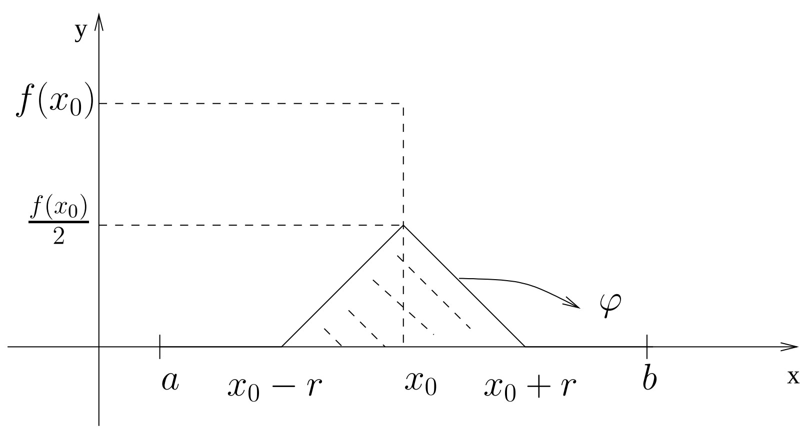

Figura 2: A integral de φ, com $f \geq \varphi \geq 0$.

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \in [x_0 - r\,, x_0 + r].$$

Então, a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (vide figura acima) definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} \text{ e} \\ \text{linear sobre os segmentos } [x_0 - r, x_0] \text{ e } [x_0 + r, b], \end{cases}$$

é contínua e satisfaz $f(x) \geq \varphi(x)$ para todo $\in [a,b]$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \\ &= \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \varphi(x)\,dx \\ &= \frac{f(x_0) r}{2} > 0 \clubsuit \end{aligned}$$

5. Primeiro TVM para Integrais (versão fina) e Segundo TFC.

Teorema. Primeiro TVM para Integrais. (Versão fina.) *Consideremos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Prova. Vide interpretação geométrica abaixo.

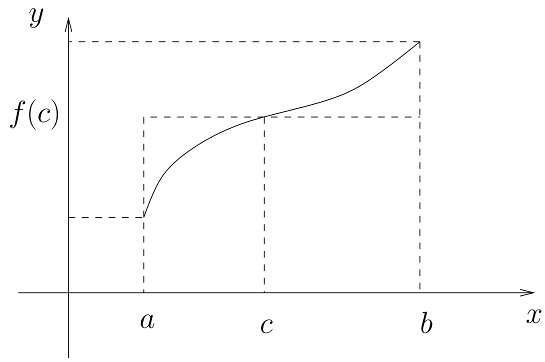

Figura 3: Interpretação geométrica ao Primeiro TVM para Integrais. A área abaixo do gráfico de $f > 0$ é igual à área do retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$.

Se f é constante é óbvio que qualquer c em (a, b) satisfaz o desejado.

Se f não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então obtemos $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Pelo teorema do valor intermediário existe $x_0 \in [a, b]$ com $m < f(x_0) < M$. Pela propriedade de positividade (para $f - m$ e $M - f$) segue

$$\int_a^b [f(x) - m]\,dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b [M - f(x)]\,dx > 0.$$

Logo,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx \quad \text{e} \quad m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \clubsuit$$

Interpretação Aritmética para o Primeiro TVM para Integrais.

Dados n números reais $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a sua média aritmética (discreta) M é

$$M = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} 1}.$$

Analogamente, dada uma coleção de números $y = f(x)$, onde $a \leq x \leq b$, interpretamos o número

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

como a média aritmética dos valores $f(x)$ [ou, média aritmética de f], obviamente supondo $a < b$ e que a integral existe.

Com tal interpretação, o primeiro teorema do valor médio para integrais mostra que dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \text{ média aritmética de } f.$$

Passamos então a provar o segundo teorema fundamental do cálculo.

Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo). [A existência de primitivas para funções contínuas.] *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, está bem definida a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

e ainda, F é uma primitiva de f. Isto é, F é derivável e

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Prova.

◇ Como f é integrável em $[a,b]$, segue que f é integrável no intervalo $[a,x]$ para cada $x \in [a,b]$. Por favor, cheque.

◇ Propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais mostram

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt \,-\, \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$
$$= \frac{f(c)h}{h} = f(c),$$

para algum $c = c(h)$ entre x e $x+h$. Se $h \to 0$, então $c \to x$ e devido à continuidade de f segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(\, c(h)\,\big) = f(x)\,,$$

o que prova que F é derivável e que

$$F' = f \clubsuit$$

6. Continuidade da Integral.

Teorema (Continuidade da Integral). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então, está bem definida a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ onde } x \in [a,b].$$

Ainda mais, F é contínua.

Prova.

- ⋄ Como f é integrável em $[a,b]$, segue que f é integrável em $[a,x]$.
- ⋄ Fixemos $x \in [a,b]$. Seja h tal que $x+h$ pertence a $[a,b]$. Então, temos

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Como f é integrável, por hipótese f é limitada. Seja M tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Então, temos $-M \leq f(t) \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Donde então segue

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq M|h|.$$

Concluímos então que $f(x+h) \to F(x)$ se $h \to 0 \clubsuit$

7. Fórmula de Integração por Partes.

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida). *Sejam f e g deriváveis em (a,b). Então, $f'g$ admite primitiva em (a,b) se e só se fg' também admite e, neste caso,*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Prova.

Pela fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ temos

$$fg' = (fg)' - f'g\,,$$

donde concluímos que ψ é uma primitiva de $f'g$ se e somente se $fg - \psi$ é uma primitiva de fg'. Isto é, $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg-\psi)' = fg'$ ♣

Notação. Lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida). *Sejam f e g funções com derivadas contínuas em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Prova.

Pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b\,.$$

Da fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ a da linearidade da integral definida segue que

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Eliminando

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx$$

das duas equações acima obtidas concluímos a prova♣

8. Teorema da Mudança de Variável.

Consideremos o problema de encontrar

$$\int f(x)dx.$$

Teorema da Mudança de Variável na Integral Indefinida. *Seja I um intervalo e consideremos a função*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que a função [a mudança de variável]

$$\varphi : J \longrightarrow I, \text{ onde } J \text{ é um intervalo,}$$

é inversível e derivável com inversa $\varphi^{-1} : I \longrightarrow J$ também derivável. Se

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = F(t) + k, \text{ onde } t \in J \ \text{ e } k \text{ é uma constante real,}$$

então temos

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + k.}$$

Prova.

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre F e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$\begin{aligned}
(F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\
&= f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\
&= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) \\
&= f(x) \cdot 1 \\
&= f(x) \clubsuit
\end{aligned}$$

9. Teoremas da Substituição de Variável.

Primeiro, consideremos o problema de encontrar

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

Teorema da Substituição de Variável na Integral Indefinida. *Seja I um intervalo e suponhamos a função*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tem uma primitiva F. Então,

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + k, \text{ onde } k \text{ é uma constante real.}$$

Prova.

Aplicando a regra da cadeia e a hipótese sobre F, obtemos

$$(F \circ g)'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x) \clubsuit$$

Sugestão para memorizar (mas não rigorosa). Temos

$$\boxed{y = g(x) \quad \text{e então} \quad \tfrac{dy}{dx} = g'(x) \quad \text{ou} \quad dy = g'(x)dx.}$$

Logo,

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + k, \quad \text{com} \quad y = g(x).}$$

Teorema da Substituição de Variável na Integral Definida. *Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo e a e b arbitrários em I . Seja $\varphi : [c,d] \to I$ tal que φ' é contínua e $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy.$$

Atenção. *Não é necessário $a < b$. Não é necessário que φ seja inversível. Não é necessário $\varphi([c,d]) = [a,b]$. É permitido que $\varphi([c,d])$ inclua propriamente $[a,b]$.*

Prova.

Como f, φ e φ' são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua f admite uma primitiva F. Então, pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo encontramos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y).$$

Então, aplicando novamente o primeiro TFC obtemos

$$\begin{aligned}\int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy &= (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx \clubsuit\end{aligned}$$

10. Somas de Darboux[1] e o Teorema de Darboux - Du Bois-Reymond.

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. A **integral de Riemann** de f é definida pelo limite (se este existir)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,,$$

onde $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$,

$$|\mathcal{P}| = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\} \text{ é a norma da partição } \mathcal{P},$$

$$\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\} \text{ é uma escolha}$$

arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, \ldots, n$, subordinada a $\mathcal{P}$ e

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \,,$$

é a **soma de Riemann** de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

A **soma inferior** de Darboux e a **soma superior** de Darboux da função f e em relação à partição $\mathcal{P}$ são, respectivamente,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \,, \quad m_i = \inf\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} \;\; \text{e}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \,, \quad M_i = \sup\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \,\}.$$

Segue uma ilustração para as somas de Darboux de uma função.

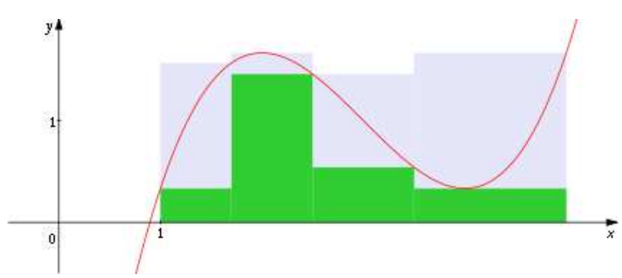

Figura 4: Soma inferior e soma superior (Darboux), com quatro sub-intervalos.

[1]Estes conceitos foram introduzidos pelo matemático francês G. Darboux (1842-1917)

Notação. Dado $A \subset [a,b]$, definimos

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad \sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

A seguir, mostremos que à medida que refinamos as partições (incluindo mais e mais pontos), então as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem. Ainda mais, toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior.

Observação 1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Valem as propriedades abaixo.*

(a) Se I e J são subintervalos de $[a,b]$ e $I \subset J$, então

$$\inf_J f \leq \inf_I f \leq \sup_I f \leq \sup_J f.$$

(b) Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são partições de $[a,b]$ então, ordenando naturalmente $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, temos que também $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é uma partição de $[a,b]$. Ainda mais,

$$s(f,\mathcal{P}_1) \leq s(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P}_2).$$

(c) Se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{E}$ é uma escolha subordinada a $\mathcal{P}$ então,

$$s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq S(f,\mathcal{P}).$$

Prova.

(a) Trivial.

(b) A primeira afirmação é evidente. Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, é um subintervalo determinado pela partição $\mathcal{P}_1$ então I_i é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, para $j = 1, \ldots, N$ e $N \geq n$, determinados pela partição $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ e que estão contidos em I_i. Pelo item (a) temos as inequações

$$\left(\inf_{I_i} f\right) \Delta x_i \;=\; \left(\inf_{I_i} f\right) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j \;\leq\; \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \left(\inf_{J_j} f\right) \Delta y_j \quad \text{e}$$

e

$$\sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \left(\sup_{J_j} f\right) \Delta y_j \;\leq\; \left(\sup_{I_i} f\right) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\sup_{I_i} f\right) \Delta x_i.$$

Destacando o primeiro e o terceiro termos destas e somando em i segue

$$s(f,\mathcal{P}_1) \leq s(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P}_1).$$

Analogamente, $S(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P}_2)$. Agora, (b) é trivial.

(c) Evidente♣

Dizemos que a partição $\mathcal{Q}$ **refina** a partição $\mathcal{P}$ se $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

A figura abaixo mostra que ao refinarmos a partição então as somas inferiores crescem e as somas inferiores decrescem.

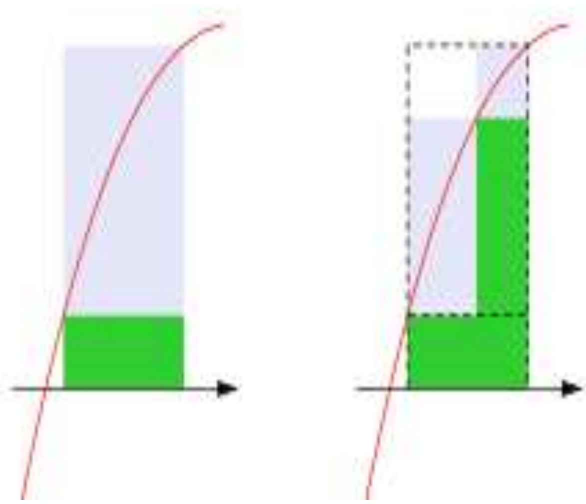

Figura 5: Somas inferiores aumentam e somas superiores diminuem.

Proposição . *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é limitada, então existem*

$$\begin{cases} \alpha = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \\ e \\ \beta = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \end{cases}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova. Segue imediatamente da observação prévia, item (b)♣

O número α é a **integral inferior** de Darboux de f. O número β é a **integral superior** de Darboux de f. Usualmente indicamos a integral inferior e a integral superior (ambas de Darboux) por, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Dizemos que f é **Darboux-integrável** se os valores destas integrais inferior e superior são iguais. Tal valor é a integral de Darboux de f. Tal integral é indicada

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A notação para a integral de Darboux é igual à dada para a integral de Riemann. O próximo teorema mostra que uma função f é Riemann integrável se e somente se f é Darboux integrável e que tais integrais são iguais. Logo, não há ambiguidade ao indicarmos tais integrais com um mesmo símbolo.

Intitulo o resultado a seguir de *Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond*, enfatizando o caráter não clássico, por praticidade, falta de um melhor nome e, é claro, por merecimento. O enunciado clássico é apresentado como um corolário.

Observemos que o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond exibe um *critério (de Darboux ou de Cauchy)* de integrabilidade bastante prático e que não requer um número como candidato para o valor da integral da função.

Teorema (Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, não clássico) - Critério de Darboux - Critério de Cauchy. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(1) A função f é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Isto é, f é Riemann-integrável se e somente se f é Darboux-integrável.

(2) Os valores das integrais de Riemann e de Darboux, se existirem, coincidem.

(3) Se f é integrável (segundo Darboux ou Riemann), então

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} s(f, \mathcal{P}) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(f, \mathcal{P}).$$

Prova.

(1) ($\Leftarrow$) Sob tal hipótese, claramente as integrais inferior e superior (de Darboux) são iguais a um número real D. No fim da prova utilizaremos D.

Dado $\epsilon > 0$, fixemos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ como na hipótese . Seja M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Seja $\mathcal{Q}$ uma partição arbitrária de $[a, b]$. Consideremos então a partição $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$. Todo sub-intervalo determinado por $\mathcal{Q}'$ coincide com um sub-intervalo determinado por $\mathcal{Q}$, exceto no caso em que o determinado por $\mathcal{Q}'$

contém ao menos um ponto do conjunto $\mathcal{P} \setminus \{a, b\} = \{x_1 < \cdots < x_{n-1}\}$. Como $\mathcal{P} \setminus \{a, b\}$ tem $n - 1$ pontos, tal exceção ocorre no máximo $2(n-1)$ vezes [Exemplo: o intervalo $[1, 5]$, $\mathcal{P} = \{1, 3, 5\}$ com $n = 2$, $\mathcal{Q} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{Q}' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$]. Destaque: o número $2(n-1)$ não é essencial, para a demonstração é suficiente o número $2(n+1)$, que surge "trivialmente"]. Os sub-intervalos de $\mathcal{Q}'$ tem comprimento máximo $|\mathcal{Q}|$. Obtemos então

$$0 \leq [S(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{Q})] - [S(f, \mathcal{Q}') - s(f, \mathcal{Q}')] \leq 2M2(n-1)|\mathcal{Q}|.$$

Imponhamos a condição $|\mathcal{Q}| < \delta = \epsilon/(4Mn)$. Encontramos então

$$0 \leq S(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{Q}) < \epsilon + [S(f, \mathcal{Q}') - s(f, \mathcal{Q}')] < \epsilon + [S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})] < 2\epsilon.$$

Donde então segue

$$D - 2\epsilon \leq s(f, \mathcal{Q}) \leq D \leq S(f, \mathcal{Q}) \leq D + 2\epsilon, \ \text{ para toda } \mathcal{Q} \text{ com } |\mathcal{Q}| < \delta = \frac{\epsilon}{4Mn}.$$

Seja $\mathcal{E}$ uma escolha arbitrária subordinada à partição $\mathcal{Q}$. É claro que

$$s(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Logo,

$$|S(f, \mathcal{Q}, \mathcal{E}) - D| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que f é Riemann integrável e que o valor da integral de Riemann coincide com o valor da integral de Darboux.

(1) ($\Rightarrow$) Sejam $\epsilon > 0$ e a integral de Riemann

$$R = \int_a^b f(t)dt.$$

Por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ tal que

$$R - \epsilon < S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) < R + \epsilon,$$

qualquer que seja a escolha $\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\}$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sejam

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{ e } \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Fixemos $c_2, c_3, \ldots, c_n$. Variando c_1 em $[x_0, x_1]$ obtemos

$$R-\epsilon \leq m_1\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq M_1\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq R+\epsilon.$$

A seguir, variando $c_2 \in [x_1, x_2]$ obtemos

$$R-\epsilon \leq m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\sum_{i=3}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\sum_{i=3}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq R+\epsilon.$$

Iterando encontramos

$$R - \epsilon \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq R + \epsilon.$$

Donde segue $0 \leq S(f,\mathcal{P}) \ - s(f,\mathcal{P}) \leq \epsilon$, como queríamos demonstrar.

(2) Pela última linha em destaque, acima, segue que o valor D da integral de Darboux satisfaz

$$R - \epsilon \leq D \leq R + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Logo, $R = D$

(3) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$, com norma $|\mathcal{P}| < \delta$, e toda escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{P}$, temos

$$\int_a^b f dx - \epsilon \leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq \int_a^b f dx + \epsilon.$$

Utilizando o mesmo procedimento que na prova "(1)($\Rightarrow$)", encontramos

$$\int_a^b f dx - \epsilon \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f dx + \epsilon$$

para todo partição $\mathcal{P}$ com norma $|\mathcal{P}| < \delta$. Isto é,

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} s(f,\mathcal{P}) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(f,\mathcal{P}) = \int_a^b f dx \clubsuit$$

Comentários.

- Mantida as notações acima, o número $M_i - m_i$ coincide com a oscilação

$$\omega_i = \sup\left\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

da função f no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. O teorema acima garante que

$$\text{existe } \int_a^b f(x)dx \Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Destaquemos que se f é Riemann integrável, então temos

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

A integral de Riemann (definida por um limite de somas de Riemann) é apropriada para teoria da aproximação. Mas, a priori, as integrais de Darboux não tem tal propriedade.

O *Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond* mostra que a integral de Darboux (se existir) também é apropriada para a teoria da aproximação.

Teorema (Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, enunciado clássico). *Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é Darboux integrável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que temos*

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon$$

para toda partição $\mathcal{P}$, de $[a, b]$, satisfazendo $|\mathcal{P}| < \delta$.
Prova. Trivial (cheque)♣

O teorema de Darboux - Du Bois-Reymond (enunciado *não clássico*) apresenta um critério que permite exibirmos mais propriedades da integral.

Doravante, nestas notas, nos referimos somente ao *não clássico* Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond.

11. A Desigualdade Triangular para Integrais.

Teorema. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então, $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Prova.

Obviamente, a função $|f|$ é limitada.

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

respectivamente, com as notações

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Dados s e t em $[x_{i-1}, x_i]$ temos que $f(s)$ e $f(t)$ estão em $[m_i, M_i]$. Logo,

$$\Big| |f(s)| - |f(t)| \Big| \leq |f(s) - f(t)| \leq M_i - m_i.$$

Donde então segue (cheque)

$$\left| \sup_{s \in [x_{i-1},x_i]} |f(s)| - \inf_{t \in [x_{i-1},x_i]} |f(t)| \right| \leq M_i - m_i.$$

Obtemos então a desigualdade

$$\Big| S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) \Big| \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}).$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função $|f|$ é integrável em $[a,b]$. Cheque♣

Corolário (Desigualdade Triangular para Integrais). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Então, a função* $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Prova.

Observemos que temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Pelas hipóteses e pelo teorema imediatamente anterior temos

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)dx.$$

Donde segue

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \, \clubsuit$$

Observação. O nome *desigualdade triangular para integrais* é herdado da usual *desigualdade triangular discreta* para uma sequência finita $y_1, \ldots, y_n$ de números reais,

$$|y_1 + y_2 + \cdots + y_n| \leq |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|.$$

Isto é,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

12. Integrabilidade do Produto de Funções.

Lema. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então, $f^2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*
Prova.

A função $|f|$ é integrável (seção anterior) e então podemos supor $f \geq 0$.

Como f é limitada, existe uma constante $M > 0$ ssatisfazendo $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, f^2 é limitada

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição. Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ \text{ e } \ s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

onde m_i e M_i são o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente. Temos então

$$\begin{aligned} S(f^2,\mathcal{P}) - s(f^2,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i) \Delta x_i \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Isto é,

$$0 \leq S(f^2,\mathcal{P}) - s(f^2,\mathcal{P}) \leq 2M[S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})].$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função $|f|$ é integrável em $[a,b]$. Cheque$\clubsuit$

Teorema. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então, fg é integrável.*
Prova. Segue imediatamente do lema acima, notando que

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \clubsuit$$

13. Integrabilidade de $1/f$.

Proposição. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Suponhamos que existe uma constante $m > 0$ satisfazendo $|f(x)| \geq m > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então, a função*

$$\frac{1}{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$$

é integrável.

Prova.

Iniciemos verificando que a função $1/f$ é limitada. De fato, temos

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{m}, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ \text{ e } \ s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

onde m_i e M_i são o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente.

Consideremos $s, t \in [x_{i-1}, x_i]$. Temos

$$\left|\frac{1}{f(s)} - \frac{1}{f(t)}\right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)|\,|f(t)|} \leq \frac{|f(s) - f(t)|}{m^2} \leq \frac{M_i - m_i}{m^2}.$$

Segue então (cheque)

$$\left| \sup_{s \in [x_{i-1},x_i]} \frac{1}{f(s)} \ - \inf_{t \in [x_{i-1},x_i]} \frac{1}{f(t)} \right| \leq \frac{M_i - m_i}{m^2}.$$

Donde encontramos

$$0 \leq S\left(\frac{1}{f}, \mathcal{P}\right) - s\left(\frac{1}{f}, \mathcal{P}\right) \leq \frac{S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})}{m^2}.$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função $1/f$ é integrável em $[a,b]$. Cheque♣

14. Integrabilidade das Funções Monótonas.

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, é uma função monótona se f é ou crescente, ou estritamente crescente, ou decrescente, ou estritamente decrescente. Notemos que toda função constante é crescente e também decrescente.

Teorema (Integrabilidade das funções monótonas). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Então, f é integrável.*

Prova.

Podemos supor f não constante, pois o caso contrário é óbvio.

Trocando f por $-f$, se necessário, podemos supor que f é crescente.

Temos $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, para todo $x \in [a,b]$, e portanto f é limitada.

Dado ϵ, consideremos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ com norma

$$|\mathcal{P}| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum f(x_i)\Delta x_i - \sum f(x_{i-1})\Delta x_i \\
&= \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \\
&\leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\
&= \frac{\epsilon[f(b) - f(a)]}{f(b) - f(a)} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, f é integrável♣

15. Integrabilidade de $\sqrt{f}$.

Proposição. *Seja $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ integrável. Suponhamos que existe uma constante $m > 0$ satisfazendo $f(x) \geq m > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então, a função*

$$\sqrt{f} : [a,b] \to (0,+\infty)$$

é integrável.

Prova.

Verifiquemos que a função $1/\sqrt{f}$ é limitada. De fato, temos

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$.

Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

onde m_i e M_i são o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente.

Donde segue

$$S(\sqrt{f},\mathcal{P}) = \sum \sqrt{M_i}\Delta x_i \quad \text{e} \quad s(\sqrt{f},\mathcal{P}) = \sum \sqrt{m_i}\Delta x_i.$$

Encontramos então

$$S\left(\sqrt{f},\mathcal{P}\right) - s\left(\sqrt{f},\mathcal{P}\right) = \sum\left(\sqrt{M_i} - \sqrt{m_i}\right)\Delta x_i = \sum\left(\frac{M_i - m_i}{\sqrt{M_i} + \sqrt{m_i}}\right)\Delta x_i$$

$$\leq \sum\left(\frac{M_i - m_i}{2m}\right)\Delta x_i$$

$$= \frac{S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})}{2m}.$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que a função $1/f$ é integrável em $[a,b]$. Cheque♣

16. A Aditividade da Integral sobre Intervalos, Revisitada.

Na seção Propriedades Elementares da Integral, já fizemos uma primeira abordagem à propriedade aditiva da integral sobre intervalos. Com o conceito "Somas de Darboux" podemos melhorar o resultado então obtido.

Proposição (Aditividade da Integral sobre Intervalos). *Consideremos uma função $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ e um ponto $b \in (a, c)$. Então, $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ é integrável se e somente se as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [b, c] \to \mathbb{R}$ são integráveis. Ainda mais, se tais funções são integráveis, vale a fórmula*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Prova.

A fórmula já foi provada na seção Propriedades Elementares da Integral. Provemos então a parte "se e somente se."

($\Rightarrow$) Suponhamos que $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ é integrável. Seja $\epsilon > 0$.

Pelo teorema de Darboux (e de Du Bois-Reymond), existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, c]$ tal que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Consideremos a partição $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{b\}$. Pelas propriedades das somas inferiores e superiores de Darboux segue

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Logo,

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}') < \epsilon.$$

Podemos escrever $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, com $\mathcal{P}_1$ uma partição de $[a, b]$ e $\mathcal{P}_2$ uma partição de $[b, c]$. Temos então

$$s(f, \mathcal{P}') = s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}') = S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2).$$

Substituindo tais identidades na última desigualdade obtida, segue

$$0 \leq [S(f, \mathcal{P}_1) - s(f, \mathcal{P}_1)] + [S(f, \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_2)] < \epsilon.$$

É então claro que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1)] < \epsilon \quad \text{e} \quad 0 \leq S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \epsilon.$$

Isto mostra, utilizando o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e a função $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ são integráveis.

($\Leftarrow$) Suponhamos $f[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ integrável.

Seja $\epsilon > 0$. Pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, existe uma partição $\mathcal{P}_1$ de $[a,b]$ e uma partição $\mathcal{P}_2$ de $[b,c]$ satisfazendo

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1)] < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Somando tais desigualdades encontramos

$$0 \leq [S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2] - [s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2)] < \epsilon.$$

É claro que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é uma partição de $[a,b]$ e também que

$$s(f,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2).$$

Substituindo tais identidades na última desigualdade acima, segue

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Isto mostra, utilizando o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ é integrável.

A prova da proposição está completa$\clubsuit$

17. As Funções Logaritmo e Exponencial Reais

Definição. A função logaritmo real, $\ln : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, *é dada por*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

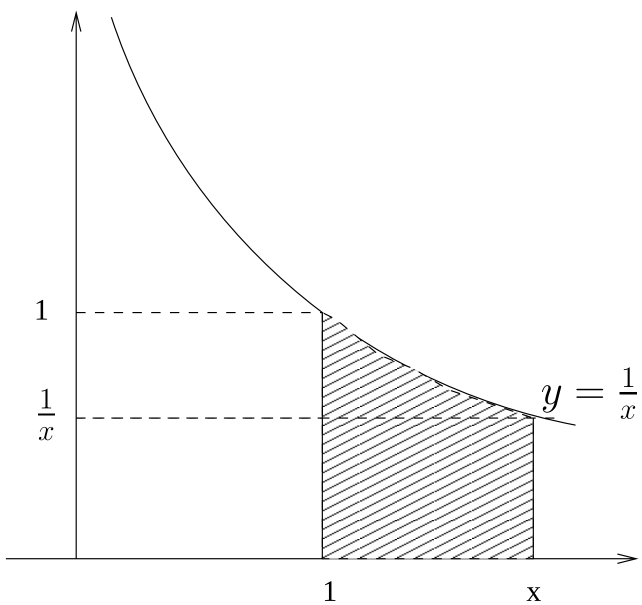

Figura 6: A área da região hachurada é $\ln x$

Teorema. *A função* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *possui as seguintes propriedades.*

(a) Se $0 < x < 1$*, então* $\ln x < 0$*. Tem-se* $\ln 1 = 0$*. Se* $x > 1$*, então* $\ln x > 0$*.*

(b) Estritamente crescente.

(c) Infinitamente derivável, com

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad \frac{d^m \ln}{dx^m}(x) = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)\,!}{x^m}, m \geq 1.$$

(d) Dados $x > 0$ *e* $y > 0$*, temos*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln \frac{1}{y} = -\ln y \quad e \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

(e) Dados $x > 0$*,* $y > 0$ *e* $r \in \mathbb{Q}$*, temos*

$$\ln(x^r) = r \ln(x).$$

Prova.

(a) É claro que $\ln(1) = 0$ e que $\ln(x) > 0$ se $x > 1$. Se $0 < x < 1$, temos

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0.$$

(b) Se $x_2 > x_1 > 0$, então

$$\ln(x_2) = \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}dt > \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt = \ln(x_1).$$

(c) A primeira derivada é trivial. A fórmula geral segue por indução (cheque).

(d) Temos,

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \log(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt.$$

Nesta última integral, a mudança de variável de t para s, onde

$$t = sx \quad \text{e} \quad \frac{dt}{ds} = t'(s) = x,$$

acarreta

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{1}{t(s)}t'(s)ds = \int_1^y \frac{x}{sx}ds = \int_1^y \frac{1}{s}ds = \ln(y).$$

A prova de $\ln xy = \ln x + \ln y$ está completa. A seguir, temos

$$0 = \ln(1) = \ln\left(y\frac{1}{y}\right) = \ln(y) + \ln\frac{1}{y} \quad \text{e então} \quad \ln\frac{1}{y} = -\ln y.$$

Logo,

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

(e) Pela propriedade $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, a afirmação (e) vale se $r = n \in \mathbb{N}$.

Ainda mais, escrevendo $0 = \ln 1 = \ln(x^n x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n})$ obtemos $\ln(x^{-n}) = -\ln(x^n) = -n\ln x$. Logo, (e) vale se $r = -n$ e $n \in \mathbb{N}$.

Se $r = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}^*$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, temos as três seguintes identidades: $p\ \ln\ x = \ln\ x^p = \ln\,(x^{\frac{p}{q}})^q = q\ \ln\ x^{\frac{p}{q}}$. Donde segue,

$$\ln\ x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\ln(x)\clubsuit$$

Corolário. *A função* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é inversível e a inversa é contínua.*

Prova.

Sobre o conjunto imagem $\ln\big((0,+\infty)\big)$, a função $\ln(\,.\,)$ é obviamente sobrejetora. Já mostramos que a função $\ln(\,.\,)$ é estritamente crescente, e portanto injetora, e contínua. Pelo teorema do valor intermediário, a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo.

Assim, a imagem $\ln\big((0,+\infty)\big)$ é um intervalo. Como $\ln(\,.\,)$ é estritamente crescente, a imagem $\ln\big((0,+\infty)\big)$ é um intervalo aberto (a, b).

É então fácil ver que $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ pois, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \ln 2^{\pm n} = \lim_{n\to+\infty} \Big[\pm\, n \ln 2\Big] = \pm\infty.$$

Vimos que $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, estritamente crescente e bijetora.

A seguir, mostremos que a função inversa $\ln^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é contínua. Consideremos um número $y_0 \in \mathbb{R}$ e um intervalo $J = [a, b] \subset (0, \infty)$ tal que $\ln^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Como a função $\ln(\,.\,)$ é estritamente crescente concluímos que $y_0 \in I = (\ln a, \ln b)$. Donde segue $\ln^{-1}(I) \subset (a, b)$ ♣

Definição. Indicamos por e o único número real tal que

$$\boxed{\ln e = 1.}$$

Definição. A função exponencial real $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é a inversa da função logaritmo. Isto é,

$$\boxed{\exp(x) = \ln^{-1}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

Teorema. *A função exponencial real é uma bijeção crescente de* $\mathbb{R}$ *sobre* $(0, +\infty)$*, com as seguintes propriedades.*

(a) Infinitamente diferenciável e $\exp'(x) = \exp(x)$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

(b) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$*, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

(c) Se $r \in \mathbb{Q}$ *então,* $\exp(r) = e^r$*.*

Prova.

(a) Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Consideremos o quociente de Newton

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0.$$

Sejam $y = \exp(x)$ e $k = \exp(x+h) - \exp(x)$. Notemos que $k \neq 0$, pois a função exponencial é bijetora. Evidentemente, $y \neq 0$. Temos também $x = \ln y$, $\exp(x+h) = y + k$, $x + h = \ln(y+k)$ e $h = \ln(y+k) - \ln(y)$. Logo,

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{k}{\ln(y+k)-\ln(y)} = \frac{1}{\frac{\ln(y+k)-\ln(y)}{k}}.$$

Se $h \to 0$, então $k \to 0$. Ainda,

$$\lim_{k\to 0} \frac{\ln(y+k)-\ln(y)}{k} = \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = y = \exp(x) \quad \text{ e } \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

(b) Segue das identidades

$$\ln[\exp(x+y)] = x+y \quad \text{e} \quad \ln[\exp(x)\exp(y)] = \ln[\exp(x)]+\ln[\exp(y)] = x+y.$$

(c) Segue das identidades

$$\ln e^r = r\ln(e) = r.1 = r \quad \text{ e } \quad \ln\exp(r) = r \clubsuit$$

Devido à propriedade $\exp(r) = e^r$, para todo racional r, e à continuidade da função $\exp(x)$, introduzimos a seguinte **notação para a função exponencial**,

$$\boxed{\exp(x) = e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

Definição. Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, e $x \in \mathbb{R}$, pomos

$$\boxed{a^x = e^{x\ln a}}.$$

Proposição. *Seja x um número real arbitrário. Temos,*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Prova.

Consideremos a função $f(x) = \exp(x)$, um natural $n \in \mathbb{N}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$. Pela fórmula de Taylor[2], com resto de Lagrange, existe um ponto $\bar{x}$ entre 0 e x tal que

$$e^x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad .$$

Podemos supor que $x \in [-R, R]$, com $R > 0$ e fixo. Neste caso, temos

$$\bar{x} \in [-R, R], \text{ com } f^{(j)}(x) = e^x, \; f^{(j)}(0) = 1, \; f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}} \text{ e}$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{\bar{x}} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Para a n-ésima soma parcial

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

obtemos

$$|\, e^x - S_n(x)| \leq e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } |\,x| \leq R.$$

Nesta condições (i.e., para $x \in [-R, R]$), vale (cheque)

$$\lim_{n \to +\infty} e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Donde segue que $S_n(x)$ converge a $\exp(x)$. Isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = e^x.$$

[Adendo. Para quem esta familiarizado com convergência uniforme. A sequência $S_n(x)$ converge uniformemente em $[-R, R]$ pois $\lim_{n\to+\infty} \frac{R^n}{n!} = 0$.] ♣

[2]O inglês B. Taylor (1685-1731) a publicou em 1715. Porém, já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

Teorema. *O número* **e** *é irracional e*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\right).$$

Prova.

Pela Proposição anterior, no ponto $x=1$, basta mostrarmos que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e, \text{ se } x\to+\infty.$$

Como $\ln'(y)=1/y$, temos $1=\ln'(1)$ e portanto, pela definição de derivada,

$$1=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)-\ln 1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Assim,

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}e^{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=e^1=e.$$

Substituindo, nesta última identidade, o valor $y=1/x$, encontramos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Quanto à irracionalidade de e, notemos que se

$$s_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

então,

$$\begin{aligned} e-s_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\,n!}. \end{aligned}$$

Supondo e racional, escrevendo

$$e=\frac{p}{q},\ \text{com } p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N} \text{ e } \operatorname{mdc}(p,q)=1,\ \text{segue } 0<q!(e-s_q)<\frac{1}{q},$$

com o número $q!\,e$ e o número

$$q!s_q=q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

inteiros. Logo, $q!\,(e-s_q)$ é um inteiro entre 0 e 1 $\lightning$

Verificando que $0 < e - s_7 < 10^{-4}$, obtemos as primeiras três casas decimais de

$$e = 2,718\ldots.$$

A função e^x tem limite 0 em $-\infty$ e limite $+\infty$ em $+\infty$, derivadas primeira e segunda estritamente positivas, é estritamente crescente e com concavidade voltada para cima. Os gráficos de e^x e $\ln x$, funções inversas uma da outra, são simétricos em relação à bissetriz principal (vide figura abaixo).

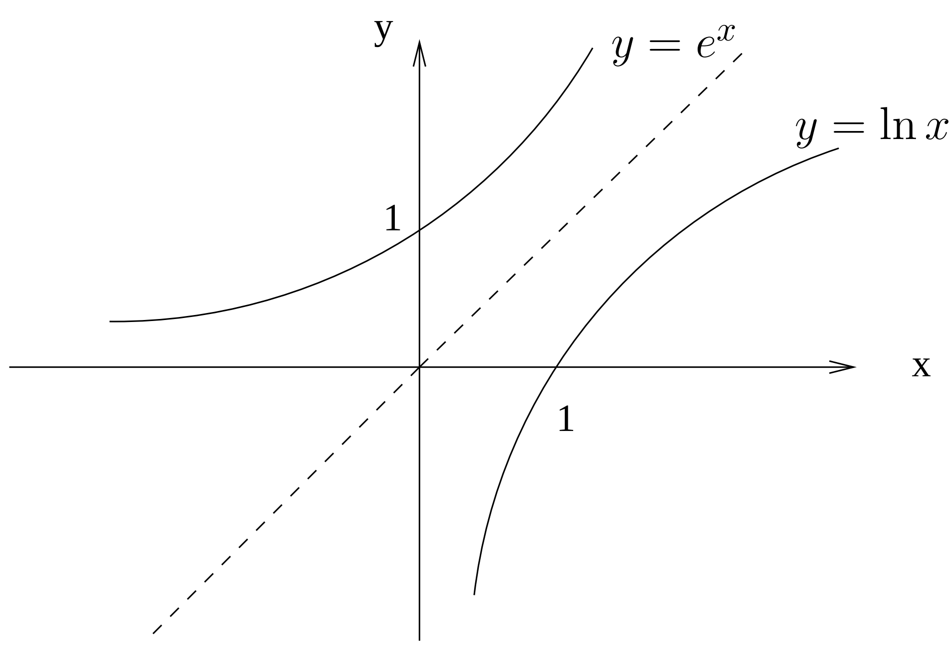

Figura 7: Gráficos de $y = e^x$ e $y = \ln x$

Comentários sobre e e π.

(Extraído, na maior parte, de Spivak "Calculus").

Os números e e π são mais sofisticados que o outrora desafiador irracional $\sqrt{2}$, o qual satisfaz $x^2 - 2 = 0$. São chamados **algébricos** os números x que satisfazem uma equação polinomial da forma,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,, a_i \in \mathbb{Z}\,, 0 \leq i \leq n\,, \text{ com } a_0 \neq 0.$$

Por exemplo,

$$\sqrt[7]{4 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{11}}$$

é algébrico mas não provaremos este fato aqui. Números não algébricos são chamados **transcendentes** e e e π são dois exemplos. O número π surgiu na antiguidade, como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O número e é "recente", sendo o escocês John Neper (1550-1617) e Jacques Bernoulli, citado na introdução deste capítulo, dois dos principais nomes ligados a sua origem.

Neper objetivava simplificar operações com grandes números. Para manter próximos os termos numa progressão de potências inteiras de um número dado é mister toma-lo próximo de 1. Neper escolheu $1 - 10^{-7} = 0,9999999$ e, para simplificar, multiplicou cada potência por 10^7. Então, se

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L,$$

o número L é o **logaritmo de Neper** de N. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos algo próximo de um sistema de logaritmos de base $1/e$ pois $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ é próximo de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Desde a Grécia antiga, procurou-se obter a "quadratura do círculo" por meio de régua e compasso. Isto é, a partir de um círculo de raio 1 contruir um quadrado de igual área. Para tal é necessário um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$. O comprimento de um segmento construtível a partir da unidade com régua e compasso (**número construtível**) , pode ser obtido a partir das operações elementares, $+$, $-$, . e $\div$ e, ainda, $\sqrt{\cdot}$ e é portanto um número algébrico.

Em 1882 o matemático alemão C. Lindemann (1852-1939) mostrou que π é transcendente e consequentemente não construtível e irracional.

A prova acima de que e é irracional é bem mais simples que a "elementar" da irracionalidade de π [vide Spivak, "Calculus"]. Existe uma prova simples de que π é transcendente, porém tal prova requer métodos avançados em álgebra (Teoria de Galois [3]). Isto não deve causar surpresa pois é comum que argumentos "elementares" sejam mais difíceis que os argumentos "avançados".

Em 1844 o matemático francês J. Liouville (1809-1882) mostrou que e não é construtível e em 1873 seu compatriota C. Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de e, para a qual existe uma prova elementar, baseada numa idéia do germânico D. Hilbert (1862-1943) [vide Spivak, "Calculus"].

Cabe salientar que as provas da transcendência de e e π são praticamente as mesmas o que surprende visto que tais números tem origens bem distintas. Obviamente tal fato é curioso afinal, qual relação pode haver entre e e π? A resposta a esta questão surge com a apresentação da função exponencial complexa e a fórmula de Euler (em cursos de uma variável complexa).

As notações e e π (e também i para $\sqrt{-1}$) devem-se a Euler. Provavelmente a letra e tenha sido adotada por ser a primeira letra de exponencial.

[3]Évariste Galois (1811-1832), jovem francês, escreveu parte de suas descobertas na noite anterior à sua morte em duelo por motivo passional. Liouville as publicou em 1846.

18. Desigualdades de Cauchy-Schwarz.

Lema. A Desigualdade Clássica de Cauchy-Schwarz. (Cauchy, 1821). *Sejam $(a_1,\ldots,a_n)$ e $(b_1,\ldots,b_n)$ duas n-uplas de números reais. Então, segue*

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\,\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Prova.

Utilizemos a desigualdade $xy \leq (x^2+y^2)/2$ (cheque). Temos então,

$$\begin{aligned}(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right) = \sum_{i,j} a_ib_ja_jb_i \\ &\leq \sum_{i,j} \frac{a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2}{2} \\ &= \sum_{i,j} a_i^2b_j^2 \\ &= (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)\ \clubsuit\end{aligned}$$

A seguir, vejamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais.

Teorema. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz. (Bunyakovski 1859 para integrais simples, Schwarz 1885 para integrais duplas). *Consideremos duas funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integráveis. Então segue*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\,.$$

Prova. Já vimos que f^2, g^2 e fg são integráveis.

Seja $\sum f(c_i)g(c_i)\Delta x_i$ uma arbitrária soma de Riemann de f. A desigualdade clássica de Cauchy-Schwarz garante

$$\begin{aligned}\left|\sum f(c_i)g(c_i)\Delta x_i\right| &\leq \sum \left|f(c_i)\sqrt{\Delta x_i}\right|\,\left|g(c_i)\sqrt{\Delta x_i}\right| \\ &\leq \sqrt{\sum f^2(c_i)\Delta x_i}\,\sqrt{\sum g^2(c_i)\Delta x_i}.\end{aligned}$$

Imponhamos que a norma da partição $\{x_0=a\leq\cdots\leq x_n=b\}$ tende a zero. Então, no limite encontramos

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\ \clubsuit$$

19. Primeiro TVM para Integrais, Generalizado. (Versão fina.)

Motivação. Suponhamos que a média final M em um curso se dê pela média ponderada das notas $n_1, \ldots, n_k$, com respectivos pesos $p_1, \ldots, p_k$. Então,

$$M = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}.$$

Teorema. Primeiro TVM para Integrais, Generalizado. (Versão fina.) *Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável com uma quantidade finita de descontinuidades e, ainda, $p \geq 0$ e*

$$\int_a^b p(x)\, dx > 0.$$

Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(**) \qquad \int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(c) \int_a^b p(x)\, dx.$$

Adendo. *A hipótese "com uma quantidade finita de descontinuidades" é supérflua, se empregarmos uma teoria de integração mais sofisticada (Integral de Lebesgue).*

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ o mínimo de f e $M = f(x_2)$ o máximo de f. Se $x \in [a, b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda $mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}.$$

- ◇ Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo teorema do valor intermediário existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que $f(c) = \gamma$.

- ◇ Caso 2. Se $\gamma = M$ então segue

  $$\int_a^b [M - f(x)]p(x)\, dx = 0.$$

  Donde, pela desigualdade $[M - f(x)]p(x) \geq 0$ e o teorema de positividade, obtemos $[M - f(x)]p(x) = 0$ em todo ponto de continuidade de p.

  A função p não se anula em algum intervalo aberto J (caso contrário, p admite uma sequência de somas de Riemann que converge a $0 \lightning$ - cheque).

  Logo, f é constante e igual a M em J. Todo ponto $c \in J$ satisfaz (**).

- ◇ Caso 3. Se $\gamma = m$, basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e p ♣

Interpretação aritmética para o "primeiro TVM para integrais, generalizado." Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e uma função (peso) integrável $p : [a,b] \to [0,\infty)$ com uma quantidade finita de descontinuidades e tal que

$$\int_a^b p(x)dx > 0.$$

Então, a função f, ponderada pelo peso p, assume em algum ponto c a sua média ponderada. Isto é, temos

$$\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} = f(c).$$

Comentário.

◇ O primeiro teorema do valor médio para integrais, generalizado, nos permite tanto demonstrar o primeiro TVM para integrais assim como fundamentar a interpretação aritmética para o primeiro TVM para integrais.

Vejamos. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, consideremos a função integrável e estritamente positiva

$$p(x) = 1 \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Evidentemente, a média de f ponderada pela função constante $p = 1$ é apenas e tão somente a **média aritmética de** f.

Pelo primeiro TVM para integrais, generalizado, segue que existe um ponto c tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b 1.f(x)dx}{\int_a^b 1dx}.$$

Donde então segue a identidade

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \clubsuit$$

20. Funções Degrau (Escada) e Degrau Suave, e Aproximação.

Figura 8: *Walk like a step function.*

Lema. *Consideremos a função escada (com dois degraus e crescente)*

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } x \leq 0, \\ 1, & \textit{se } 0 < x. \end{cases}$$

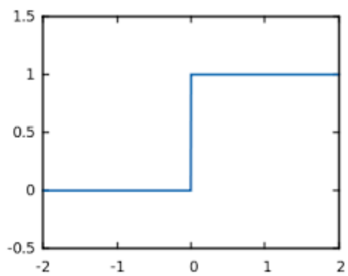

Figura 9: Esboço da função escada $E = E(x)$ sobre $[-2, 2]$.

Definamos então a função escada suave (ou realística)

$$e(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } x \leq 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & \textit{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \textit{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

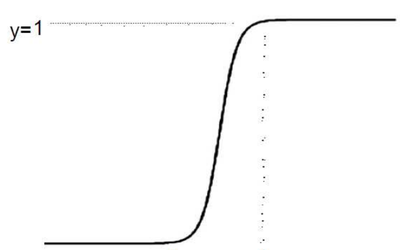

Figura 10: Gráfico da *escada suave* $e = e(x)$.

A função $e(x)$ é de classe C^1, crescente e $0 \leq e(x) \leq E(x)$ na reta. Ainda,

$$\int_{-2}^{2} |E(x) - e(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

Prova.

- ⋄ É trivial ver que a função $e = e(x)$ está bem definida e é contínua.

- ⋄ A função e é crescente. Dado x intervalo aberto $(0,1)$, segue

$$e'(x) = 6x(1-x) > 0.$$

  Concluímos então que $e = e(x)$ é crescente em $[-2,2]$.

- ⋄ A função $e = e(x)$ é de classe C^1. É trivial ver que $e'_+(0) = 0$ e $e'_-(1) = 0$. É óbvio que $e'_-(0) = 0$ e $e'_+(1) = 0$. Logo, a função $e'(x)$ é contínua.

- ⋄ A função $E : [0,1] \to \mathbb{R}$ é integrável. De fato, dado $\epsilon > 0$ e uma partição $\{x_0 = 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = 1\}$ com norma menor que ϵ, temos

$$\sum (M_i - m_i)\Delta x_1 = (1-0)\Delta x_1 + 0\Delta x_2 + \cdots + 0\Delta x_n = \Delta x_1 < \epsilon$$

  Onde m_i e M_i são o inf e o sup de E em $[x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

- ⋄ É óbvio que $E : [-2,0] \cup [0,1] \cup [1,2] \to \mathbb{R}$ é integrável. É trivial ver que

$$\int_{-2}^{2} E(x)dx - \int_{-2}^{2} e(x)dx = 2 - \int_{0}^{1} (3x^2 - 2x^3)dx - 1 = \frac{1}{2} \clubsuit$$

Corolário 1. *Seja $0 < \epsilon < 1$. A função*

$$\phi_\epsilon(s) = e\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$$

é uma escada suave (de classe C^1) crescente, nula para todo $s \leq 0$ e identicamente 1 para todo $s \geq \epsilon$. Ainda mais, satisfaz $0 \leq \phi_\epsilon \leq E \leq 1$ e

$$\int_{2}^{2} |E(x) - \phi_\epsilon(x)|dx = \frac{\epsilon}{2}.$$

Prova.

As cinco afirmações iniciais são evidentes. Para finalizar, temos

$$\int_{-2}^{2} [E(s) - \phi_\epsilon(s)]ds = 2 - \left[(2-\epsilon) + \int_{0}^{\epsilon} e\left(\frac{s}{\epsilon}\right) dx\right] = \epsilon - \epsilon \int_{0}^{1} e(x)dx = \frac{\epsilon}{2} \clubsuit$$

Dizemos que $E : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma **função escada (ou degrau)** se existe uma partição $\{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ tal que $E = E(x)$ é constante em cada subintervalo aberto (x_{i-1}, x_i). Isto é, dado $i = 1, \ldots, n$ existe um real c_i satisfazendo

$$E(x) = c_i \text{ para todo } x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Os valores $E(x_0), \ldots, E(x_n)$ são arbitrários.

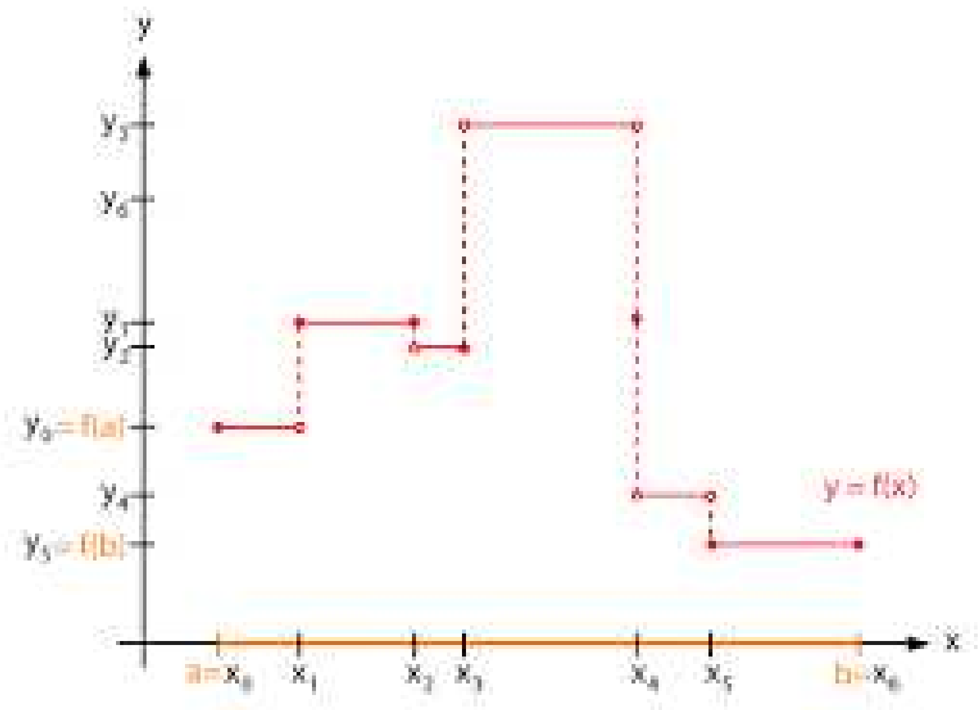

Figura 11: Exemplo de uma função escada $y = f(x)$.

Corolário 2. *Seja $E : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função escada arbitrária. Então, dado $\epsilon > 0$ existe uma função escada $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ suave (i.e., de classe C^1) satisfazendo*

$$\int_a^b |E(x) - e(x)| dx < \epsilon.$$

Ainda, mantida a notação acima na definição de função escada, podemos escolher a função $e = e(x)$ tal que temos

$$Imagem(e) = \big[\min\{c_1, \ldots, c_n\}, \max\{c_1, \ldots, c_n\}\big].$$

Ainda mais, se E é crescente então podemos supor que e é crescente. [Vale afirmação análoga para E decrescente.]

Prova.

◇ Seja $E_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ dada por $E_i(x) = c_i$ se $x \in [x_{i-1}, x_i)$ e $E_i(x_i) = c_{i+1}$, para cada $i = 1, \ldots, n$, com $E_n(x_n) = c_n$. Segue então, pela prova do lema (quarta afirmação), que cada E_i é integrável (logo, E também) e que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |E(x) - E_i(x)|dx = 0.$$

◇ Pelo corolário anterior existe $e_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ monótona suave e tal que $e_i(x_{i-1}) = c_i$, $e_i(x_i) = c_{i+1}$ e $e_i'(x_{i-1}) = e_i'(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ (cheque), com $e_n(x) = c_n$ para todo $x \in [x_{n-1}, x_n]$, e satisfazendo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |E_i(x) - e_i(x)|dx < \frac{\epsilon}{n}, \text{ se } i = 1, \ldots, n.$$

Dado $i = 1, \ldots, n-1$, a imagem da função e_i é $[c_{i-1}, c_i]$ ou $[c_i, c_{i-1}]$. A imagem de e_n é apenas $\{c_n\}$.

◇ Definamos $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $e(x) = e_i(x)$ se $x \in [x_{i-1}, x_i]$. A função $e = e(x)$ está bem definida e é de classe C^1 (cheque).

A imagem de e é exatamente o intervalo $[\min\{c_1, \ldots, c_n\}, \max\{c_1, \ldots, c_n\}]$.

◇ A função $\overline{E} : [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $\overline{E}(x) = E_i(x)$ se $x \in [x_{i-1}, x_i]$, está bem definida. Já vimos que cada E_i é integrável. Logo, $\overline{E}$ também. Ainda mais,

$$\int_a^b |\overline{E}(x) - e(x)|dx = \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} |E_i(x) - e_i(x)|dx < \epsilon.$$

É claro que temos $\overline{E}(x) = E(x)$ para quaisquer $x \in (x_{i-1}, x_i)$ e $i = 1, \ldots, n$. Logo, pela prova do lema (quarta afirmação) segue

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\overline{E}(x) - E(x)|dx = 0, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Por fim, pelas duas últimas fórmulas em destaque segue

$$\int_a^b |e(x) - E(x)|dx \leq \int_a^b |e(x) - \overline{E}(x)|dx + \int_a^b |\overline{E}(x) - E(x)|dx < \epsilon + 0.$$

É evidente que se E é crescente/decrescente então e é crescente/decrescente ♣

Vejamos como aproximar funções monótonas descontínuas. Os casos monótona crescente e monótona decrescente são análogos.

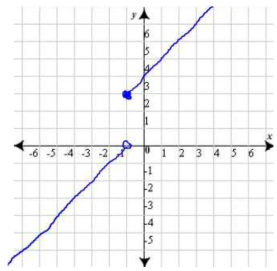

Figura 12: Exemplo de uma função crescente e descontínua (em um ponto).

Corolário 3. *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então, dado $\epsilon > 0$ existe uma função escada suave (de classe C^1) e crescente, $e : [a,b] \to \mathbb{R}$, satisfazendo*

$$\int_a^b |\varphi(x) - e(x)| dx < \epsilon \ \ e \ \ Imagem(e) = \big[\varphi(a), \varphi(b)\big].$$

Prova. Podemos supor φ não identicamente nula.

◇ Temos $|\varphi(x)| \leq M = \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(b)|\} \neq 0$ em todo x de $[a,b]$.

Já vimos que φ é integrável. Logo, fixado $N \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, para toda partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ de norma $|\mathcal{P}| < (NM)^{-1}$ temos

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - [\varphi(x_0)\Delta x_1 + \cdots + \varphi(x_{n-2})\Delta x_{n-1} + \varphi(x_n)\Delta x_n] \right| < \frac{1}{N}.$$

Definamos a função escada E por $E(x) = \varphi(x_{i-1})$, para cada $x \in [x_{i-1}, x_i)$ e $i = 1, \ldots, n-1$, e por $E(x) = \varphi(x_n) = \varphi(b)$ para cada $x \in [x_{n-1}, b]$.

Donde segue $E(a) = \varphi(a)$ e $E(x) \leq \varphi(x)$ no sub-intervalo $[a, x_{n-1}]$. É claro que a função E é crescente no intervalo $[a,b]$.

Então, pela prova do lema (quarta afirmação) e a aditividade da integral sobre intervalos, segue

$$\varphi(x_0)\Delta x_1 + \cdots + \varphi(x_{n-2})\Delta x_{n-1} + \varphi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} E(x)dx = \int_a^b E(x)dx.$$

Encontramos então

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b E(x)dx \right| \leq \frac{1}{N}.$$

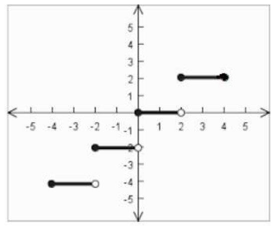

Figura 13: Exemplo para a função escada E, com $[a,b]=[-4,4]$.

Ao longo do intervalo $[a,b]$ temos $|E| \leq M$ e $|\varphi| \leq M$. Ao longo do subintervalo $[a, x_{n-1}]$ temos $E \leq \varphi$ e então $|\varphi - E| = \varphi - E$. Devido a tais observações, à desigualdade destacada imediatamente acima e à hipótese sobre a norma da partição, encontramos

$$\begin{aligned}\int_a^b |\varphi(x) - E(x)|dx &= \int_a^b (\varphi - E)dx + \int_{x_{n-1}}^b \big[|\varphi - E| - (\varphi - E)\big]dx \\ &\leq \frac{1}{N} + 4M\Delta x_n \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{4}{N}.\end{aligned}$$

O Lema, o Corolário 1 e o Corolário 2, todos nesta seção, garantem existir uma função degrau e definida em $[a,b]$ e tal que

$$\begin{cases} e = e(x) \text{ é crescente e de classe } C^1, \\ e(a) = E(a) = \varphi(a) \text{ e } e(b) = E(b) = \varphi(b), \end{cases}$$

e, ainda,

$$\int_a^b |E(x) - e(x)|dx < \frac{1}{N}.$$

Por fim, a desigualdade triangular para números mostra

$$\int_a^b |\varphi(x) - e(x)|dx \leq \int_a^b |\varphi - E|dx + \int_a^b |E - e|dx \leq \frac{5}{N} + \frac{1}{N}.$$

Isto mostra que basta escolhermos um natural N tal que

$$\frac{6}{N} < \epsilon \clubsuit$$

21. Segundo TVM para Integrais.

Teorema (Segundo TVM para Integrais). *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona. Então, existe $\lambda \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)\int_a^\lambda f(x)dx + p(b)\int_\lambda^b f(x)dx.$$

Prova. Podemos supor $p = p(x)$ não identicamente nula.

- $\diamond$ Já vimos que toda função monótona e definida em $[a,b]$ é integrável e que o produto de integráveis é integrável. Logo, fp é integrável.

- $\diamond$ Trocando o "peso" p por $-p$, se necessário, podemos supor p crescente.

- $\diamond$ Podemos supor $p(b) = 0$, sem perda de generalidade. Pois, provado este caso particular, dada uma p qualquer e crescente temos que existe λ tal que

$$\int_a^b f(x)[p(x)-p(b)]dx = [p(a)-p(b)]\int_a^\lambda f(x)dx + 0.$$

Donde segue

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)\int_a^\lambda f(x)dx + p(b)\int_\lambda^b f(x)dx.$$

- $\diamond$ A seguir, seja $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, com $p(b) = 0$. Logo, $p(a) < 0$.

- $\diamond$ O caso com p derivável e com derivada contínua (i.e., p de classe C^1). Seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Integração por partes nos conduz a

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(x)p(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)p'(x)dx$$

$$= (0-0) - \int_a^b F(x)p'(x)dx.$$

Pelo primeiro TVM para integrais (generalizado) obtemos

$$\int_a^b F(x)p'(x)dx = F(\lambda)\int_a^b p'(x)dx = -p(a)\int_a^\lambda f(x)dx, \ \text{ para algum } \lambda \in (a,b).$$

Donde segue, encerrando este caso,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)\int_a^\lambda f(x)dx, \quad \text{para algum } \lambda \in (a,b).$$

$\diamond$ O caso geral (i.e., p crescente e $p(b) = 0$). Seja $N \in \mathbb{N}$.

O terceiro corolário na seção *Funções degrau (escada) e degrau suave, e aproximação* garante existir uma função degrau de classe C^1 e crescente $e_N : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |p(x) - e_N(x)|dx < \frac{1}{N}, \text{ com } e_N(a) = p(a), \quad e_N(b) = 0 = p(b).$$

Escrevamos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f[p - e_N]dx + \int_a^b fe_N dx.$$

Seja M uma constante satisfazendo $|f(x)| \leq M$ em todo ponto x de $[a,b]$. A desigualdade triangular para integrais mostra

$$\left|\int_a^b f(p - e_N)dx\right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

Pelo caso já provado [e_N é monótona, de classe C^1 e $e_N(b) = 0$], obtemos

$$\int_a^b fe_N\,dx = e_N(a)\int_a^{\lambda_N} fe_N\,dx, \text{ para algum } \lambda_N \in (a,b).$$

Como $e_N(a) = p(a)$, encontramos

$$\int_a^b fp\,dx = \lim_{N \to +\infty} p(a)\int_a^{\lambda_N} fe_N\,dx.$$

A sequência λ_N admite subsequência convergente a algum valor $\lambda \in [a,b]$. Logo, podemos supor sem perda de generalidade (cheque) que

$$\lambda_N \xrightarrow{N \to +\infty} \lambda \in [a,b].$$

A desigualdade triangular para integrais mostra

$$\left|\int_a^{\lambda_N} f(p - e_N)dx\right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

A continuidade da integral mostra que

$$\int_a^{\lambda_N} fp\,dx \xrightarrow{N \to +\infty} \int_a^{\lambda} fp\,dx.$$

Logo,

$$\int_a^{\lambda_N} fe_N\,dx \xrightarrow{N \to +\infty} \int_a^{\lambda} fp\,dx.$$

Por fim, concluímos que

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \lim_{N \to +\infty} p(a)\int_a^{\lambda_N} f(x)e_N(x)dx = p(a)\int_a^{\lambda} f(x)p(x)dx \clubsuit$$

22. O TVM de Bonnet.

Teorema (O TVM de Bonnet - 1849). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e uma função $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ estritamente positiva, decrescente e contínua. Então, temos*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)\int_a^c f(x)dx, \text{ para algum } c \in [a,b].$$

Prova.

- ◇ Podemos supor, sem perda de generalidade, p não constante.

- ◇ O caso p derivável, com derivada p' contínua. Logo, $p' \leq 0$. Seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Integrando por partes (e utilizando que f é contínua) encontramos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)p(b) - F(a)p(a) - \int_a^b F(x)p'(x)dx \quad \text{e} \quad F(a) = 0.$$

Pelo TVM-generalizado para integrais, existe $c_1 \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b F(x)p'(x)dx = F(c_1)\big[p(b) - p(a)\big].$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)p(b) + F(c_1)\big[p(a) - p(b)\big].$$

Donde segue

$$\frac{1}{p(a)}\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)\frac{p(b)}{p(a)} + F(c_1)\left[1 - \frac{p(b)}{p(a)}\right], \quad \text{com} \quad 0 < \frac{p(b)}{p(a)} < 1.$$

Assim, o número no lado esquerdo da identidade acima está entre $F(b)$ e $F(c_1)$. Pelo teorema do valor intermediario, existe c entre c_1 e b tal que

$$\frac{1}{p(a)}\int_a^b f(x)p(x)dx = F(c), \quad \text{onde} \quad F(c) = \int_a^c f(x)dx.$$

◇ O caso geral, onde $p = p(x) > 0$ é decrescente e contínua.

Seja $N \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Weierstrass, a função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada. Seja $M > 0$ tal que temos $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$.

O terceiro corolário na seção *Funções degrau (escada) e degrau suave, e aproximação* garante existir uma função escada suave (de classe C^1) decrescente e estritamente positiva $e_N : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |p(x) - e_N(x)|dx < \frac{1}{N}, \quad \text{com} \quad e_N(a) = p(a) \text{ e } e_N(b) = p(b).$$

Escrevamos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f(p - e_N)dx + \int_a^b fe_N\, dx.$$

Pela desigualdade triangular para integrais segue

$$\left| \int_a^b f(p - e_N)dx \right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

Pelo primeiro caso temos

$$\int_a^b f(x)e_N(x)dx = e_N(a) \int_a^{\lambda_N} f(x)dx.$$

Já vimos que $e_N(a) = p(a)$. A sequência $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ está contida em $[a, b]$ e tem portanto uma subsequência convergente a algum $\lambda \in [a, b]$. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\lambda_N \xrightarrow{N \to +\infty} \lambda \in [a, b].$$

Então, pelo continuidade da integral segue

$$\int_a^{\lambda_N} f(x)dx \xrightarrow{N \to +\infty} \int_a^{\lambda} f(x)dx.$$

Concluímos então que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \left[\int_a^b f(p - e_N)dx + \int_a^b fe_N\, dx \right] = p(a) \int_a^{\lambda} f(x)dx \clubsuit$$

23. Lema de Riemann-Lebesgue.

O lema de Riemann-Lebesgue é um resultado sobre *integrais oscilatórias* e é muito importante em Teoria dos Sinais e no estudo das séries de Fourier, Transformada de Fourier e em Análise Harmônica.

A grosso modo, o lema de Riemann-Lebegue afirma que a integral de uma função que oscila bastante, vide gráfico abaixo, é pequena. Dito de outra forma, o valor da integral tende a 0 se a frequência ω tende ao infinito.

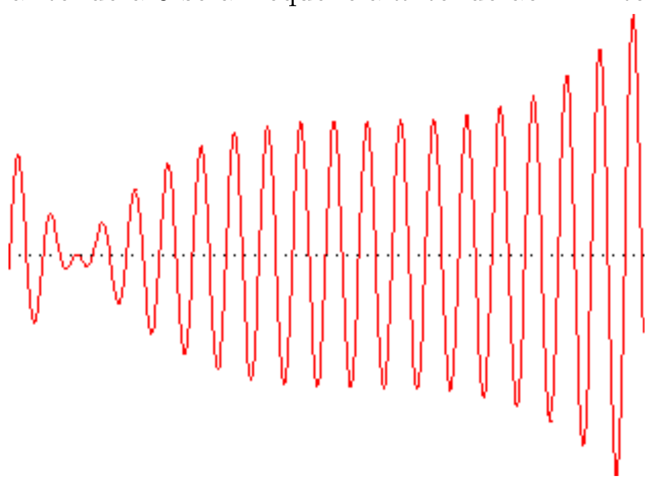

Figura 14: Ilustração ao Lema de Riemann-Lebesgue.

Exemplo (Motivação). *Fixemos um intervalo* $[a, b]$ *na reta. Então, temos*

$$\int_a^b \sin(\omega x)dx \longrightarrow 0 \;\; se \;\; |\omega| \to +\infty.$$

Prova.

Segue de

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_a^b \sin(\omega x)dx = \lim_{\omega\to\pm\pm\infty} -\frac{\cos(\omega x)}{\omega}\Big|_a^b = \lim_{\omega\to\pm\infty} \frac{\cos(a\omega) - \cos(b\omega)}{\omega} = 0 \clubsuit$$

Generalizemos este exemplo.

Dizemos que $E : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma **função escada (ou degrau)** se existe uma partição $\{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ tal que $E = E(x)$ é constante em cada subintervalo aberto (a_{i-1}, a_i). Isto é, dado $i = 1, \ldots, n$ existe um real c_i satisfazendo $E(x) = c_i$ para todo $x \in (a_{i-1}, a_i)$. Os valores $E(a_0), \ldots, E(a_n)$ são arbitrários.

Exemplo. *Seja $E : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada. Então,*

$$\int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx \longrightarrow 0 \ \ \textit{se} \ \ |\omega| \to +\infty.$$

Prova.

Caso 1. Suponhamos $E(x) = c$ em (a,b), com c uma constante real. É trivial ver que a função $E : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável (cheque) e que

$$\int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx = c\int_a^b \sin(\omega x)dx.$$

Pelo exemplo anterior segue então que

$$\int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx \longrightarrow 0 \ \ \text{se} \ \ |\omega| \to +\infty.$$

Caso 2. Seja $E : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada arbitrária. Este caso segue trivialmente do caso 1 (cheque)♣

Teorema (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então,*

$$\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx \longrightarrow 0 \ \textit{se} \ |\omega| \to \infty.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ tal que

$$0 \leq \sum M_i \Delta x_i - \int_a^b f(x)dx < \epsilon,$$

onde M_i é o sup de f no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Seja $E(x) = M_i$, para quaisquer $x \in (x_{i-1}, x_i)$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. É trivial ver que

$$\int_a^b E(x)dx = \sum M_i \Delta x_i.$$

Pelo exemplo acima, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos

$$\left|\int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx\right| < \epsilon \text{ para todo } |\omega| > N.$$

Concluímos esta prova observando que para todo $|\omega| > N$ temos

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx - \int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx\right| + \left|\int_a^b E(x)\sin(\omega x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |E(x) - f(x)|dx + \epsilon = \int_a^b [E(x) - f(x)]dx + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon ♣$$

24. Continuidade Uniforme. Integrabilidade das Funções Contínuas.

Nesta seção consideramos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Pelo Teorema de Weierstrass f assume valor mínimo e valor máximo, ambos em $[a, b]$, e a função f é limitada. Sendo assim, podemos trocar os conceitos de ínfimo e supremo nas definições das somas inferior e superior de Darboux pelos conceitos de mínimo e máximo, respectivamente.

Com tal troca, dada $\mathcal{P} = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$, uma partição de $[a, b]$, a soma inferior de Darboux e a soma superior de Darboux de f e em relação à partição $\mathcal{P}$ são, respectivamente,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\,, \quad m_i = \min\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \ \text{ e}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,, \quad M_i = \max\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\,\}.$$

Notação. Dado $A \subset [a, b]$, definimos

$$\min_A f = \min\{f(x) : x \in A\} \ \text{ e } \ \max_A f = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

Observação 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Valem as propriedades abaixo.*

(a) Se I e J são subintervalos de $[a, b]$ e $I \subset J$, então

$$\min_J f \leq \min_I f \leq \max_I f \leq \max_J f.$$

(b) Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são partições de $[a, b]$ então, ordenando $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ temos que $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é também uma partição de $[a, b]$.

(c) Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são partições de $[a, b]$ então

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

(d) Se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a, b]$ e $\mathcal{E}$ é uma escolha qualquer subordinada à partição $\mathcal{P}$, então

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Prova. Basta, na Observação 1, na seção *Somas de Darboux e o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond*, trocar inf por min e trocar sup por max♣

No que segue, utilizando o *método de exaustão* - precursor do cálculo integral - que remonta a Eudoxu e Arquimedes, mostramos que existem o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que f é integrável.

Proposição. *Se f é contínua em $[a,b]$ então existem*

$$\begin{cases} \alpha = \sup\{s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\} \\ e \\ \beta = \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\} \end{cases}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova.

Já provamos uma proposição mais forte, para funções limitadas, na seção *Somas de Darboux e o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond*. Observemos que o teorema de Weierstrass estabelece que toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada$\clubsuit$

Proposição. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma sequência contida em X e convergente a $x_0 \in X$, então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge a $f(x_0)$.*

Prova.

Dado um arbitrário $\epsilon > 0$, por hipótese existe algum $\delta > 0$ garantindo que temos $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos $|x_n - x_0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Sendo assim, temos

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \clubsuit$$

Definição. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, é* uniformemente contínua *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo a condição abaixo.*

$$\textit{Se } |x - y| < \delta, \textit{ onde } x \in X \textit{ e } y \in X, \textit{ então } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Teorema (Heine, 1872).[4] *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Prova. Por contradição.

Suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, existem x_n e y_n em $[a,b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \text{ e } \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Sendo limitada, (x_n) admite subsequência convergente (x_{n_k}) e reenumerando esta, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que (x_n) converge a x. Notemos que como temos $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então segue $x \in [a,b]$. Ainda mais, como

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que a sequência (y_n) também converge a x. Concluímos então que

$$0 = \lim_{n \to +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \ \lightning$$

Teorema. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição com $|\mathcal{P}| < \delta$.

Sejam m_i e M_i, o inf e o sup de f em $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente.

Segue

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon.$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, f é integrável♣

[4] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.

25. Integrabilidade de Funções com Conjunto Finito de Descontinuidades.

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com um número finito de descontinuidades. Particionemos $[a, b]$ em uma quantidade finita de sub-intervalos tal que f é descontínua no máximo nos pontos extremos destes sub-intervalos.

Então, pelo que já provamos até aqui, a função f é integrável em $[a, b]$ se e somente f é integrável em cada um destes sub-intervalos.

Em um ponto de descontinuidade $p \in (a, b)$ podem existir os limites laterais à direita e à esquerda, e ao menos um destes limites assumir um valor distinto de $f(p)$ (neste caso, a descontinuidade é dita de *primeira espécie* ou de *tipo salto*) ou pode não existir ao menos um dos limites laterais (neste caso, a descontinuidade é dita de *segunda espécie*).

A função abaixo tem descontinuidades de tipo salto em $x = -2$ e em $x = 3$.

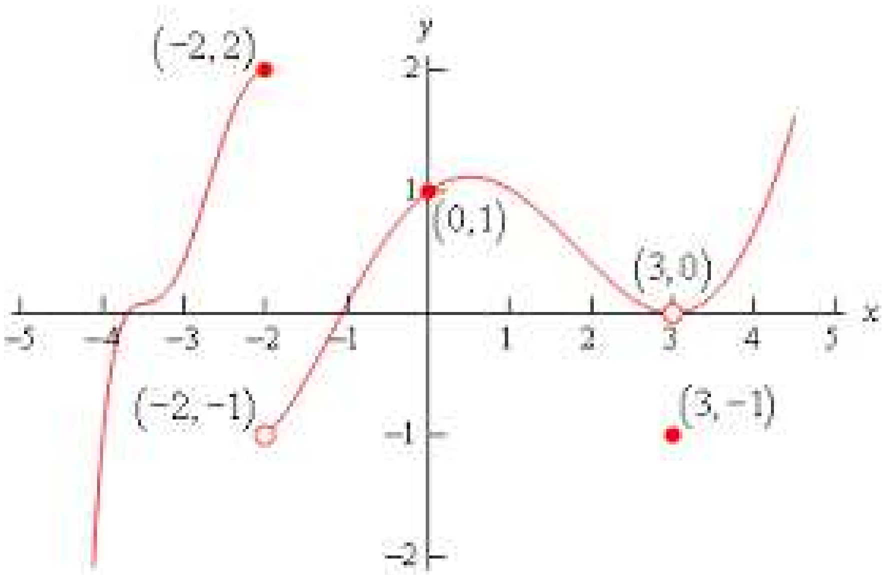

Figura 15: Duas descontinuidades de *tipo salto*.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0,$$

tem descontinuidade de segunda espécie em $x = 0$, não importa o valor que se atribua a $f(0)$. Vide gráfico abaixo.

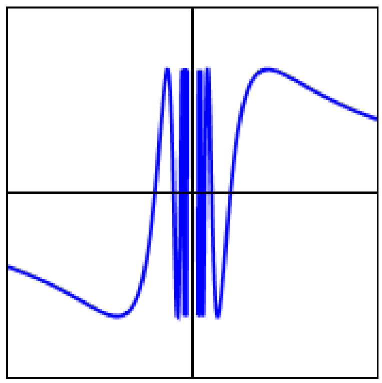

Figura 16: Não existem os limites laterais $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \sin \frac{1}{x}$.

Teorema. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e com um número finito de descontinuidades. Então, f é integrável.*

Prova.

Pelos comentários prévios, podemos supor f descontínua em $x = a$ e $x = b$.

Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x em $[a, b]$.

Seja $\epsilon > 0$. Consideremos dois sub-intervalos disjuntos $[a, \alpha]$ e $[\beta, b]$, onde

$$0 < \alpha - a < \frac{\epsilon}{6M} \quad \text{e} \quad 0 < b - \beta < \frac{\epsilon}{6M}.$$

Como f é contínua em $[\alpha, \beta]$, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[\alpha, \beta]$ tal que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, $\mathcal{P} \cup \{a, b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e

$$S(f, \mathcal{P} \cup \{a, b\}) - s(f, \mathcal{P} \cup \{a, b\}) \leq 2M(\alpha - a) + [S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})] + 2M(b - \beta)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, f é integrável♣

26. Integrabilidade da composição $\varphi \circ f$.

Teorema. *Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável e* $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ *contínua, tais que Imagem*$(f) = f([a, b]) \subset [c, d]$. *Então, a composição* $\varphi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável.*

Prova.

Existe M tal que $|\varphi(y))| \leq M$ para todo y em $[c, d]$.

Seja $\epsilon > 0$. Notemos que φ é uniformemente contínua e existe $\delta > 0$ tal que

$$|y - y'| < \delta \ \text{ implica } \ |\varphi(y) - \varphi(y')| < \epsilon.$$

Como f é integrável, existe uma partição $\{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ tal que

$$\sum (M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon\delta,$$

onde m_i e M_i são os respectivos inf e sup de f no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Para a composição $\varphi \circ f$, consideremos a soma

$$\sum (N_i - n_i)\Delta x_i,$$

onde n_i e N_i são o inf e o sup de $\varphi \circ f$ no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Escrevamos

$$\sum (N_i - n_i)\Delta x_i = \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (N_i - n_i)\Delta x_i + \sum_{i:(M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i)\Delta x_i.$$

É trivial ver que

$$\epsilon\delta \geq \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \delta \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} \Delta x_i \quad \text{e então} \quad \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} \Delta x_i \leq \epsilon.$$

É trivial ver que $N_i - n_i \leq \epsilon$. Segue

$$\sum_{(M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i)\Delta x_i \leq \epsilon(b - a).$$

É trivial ver que $N_i - n_i \leq 2M$. Segue

$$\sum (N_i - n_i)\Delta x_i = \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (N_i - n_i)\Delta x_i + \sum_{(M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i)\Delta x_i \leq 2M\epsilon + \epsilon(b - a).$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, $\varphi \circ f$ é integrável♣

Atenção. Se f é contínua e φ integrável, pode ocorrer $\varphi \circ f$ não integrável. Vide Jintan Lu, *Is the composite function integrable?* em Referências.

27. Teorema da Substituição-Mudança de Variável Generalizado.

A versão mais simples deste teorema supõe as funções e as derivadas envolvidas contínuas em intervalos fechados, com a inversa da mudança de variável derivável.

Comentário baseado em T. M. Apostol *Análisis Matemático*, pp. 199–200. A versão mais geral do *Teorema da Substituição-Mudança de Variável* (na integral de Riemann uni-dimensional) não requer a continuidade das funções envolvidas e não requer que a substituição seja inversível. Tal versão tem a forma

$$\int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(G(t)\big)g(t)dt,$$

com f integrável no intervalo $G\big([\alpha, \beta]\big)$ e a substituição $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ da forma

$$G(t) = G(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} g(\tau)d\tau,$$

para alguma g integrável em $[\alpha, \beta]$. Destaquemos que a identidade $G'(t) = g(t)$ é válida nos pontos de continuidade de g mas não é assegurada nos demais pontos. A primeira prova da versão geral deve-se a H. Kestelman (1961). Na mesma revista, no mesmo número, R. Davies, simplifica a prova de Kestelman. Desde então, muitos artigos foram e tem sido publicados sobre esta versão geral.

O livro de T. M. Apostol não prova a versão geral. A prova de Kestelman utiliza o conceito *medida nula*, que advém da teoria da medida de Lebesgue.

A versão que provamos a seguir, apresenta as seguintes características.

- É de simples enunciado e com prova muito elementar.
- Se aplica em alguns casos em que a "versão geral" não se aplica.
- É mais forte que as em *Basic Real Analysis*, A. W. Knapp, pp. 37–38 (a prova nestas notas tem semelhanças e várias diferenças com relação à prova em tal livro) e em W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, p. 133.
- Não consta nos livros em Referências.

Nesta prova admitimos partições

$$\mathcal{X} = \{a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\},$$

com pontos repetidos. Vários autores (Knapp, Lang, Rudin, Spivak, etc.) assim procedem. Uma vantagem destas é que a integral de uma função sobre um só ponto é automaticamente zero. Quanto a investigar a existência e o valor da integral de uma dada função, tanto faz que a partição tenha ou não pontos repetidos.

Teorema (Teorema da Mudança de Variável Generalizado). *Sejam*

$$f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ integrável e } \varphi : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta]$$

sobrejetora, crescente (não necessariamente estritamente crescente) e contínua. Suponhamos φ derivável em (a, b). As seguintes afirmações são verdadeiras.

- *Se φ' é integrável em $[a, b]$, então o produto $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável em $[a, b]$.*
- *Se o produto $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável em $[a, b]$, então vale a* fórmula

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Prova.

◇ A hipótese φ contínua é supérflua. Dado $t \in [a, b]$, seja $x = \varphi(t) \in [\alpha, \beta]$. Sejam x' e x'' tais que $x \in [x', x''] \subset [\alpha, \beta]$. Como φ é sobrejetora e crescente, existem t' e t'', ambos em $[a, b]$ e $t' \leq t''$, tais que $\varphi(t') = x'$ e $\varphi(t'') = x''$. Como φ é crescente, temos $\varphi\big([t', t'']\big) \subset [x', x'']$. Logo, φ é contínua [notemos que se $x' < x$ então $t' < t$ e, analogamente, se $x < x''$ então $t < t''$].

◇ A função φ é uniformemente contínua. Trivial.

◇ Temos $\varphi' \geq 0$ no intervalo aberto (a, b). Óbvio, pois φ é crescente.

◇ Para integrar φ', é claro que podemos definir $\varphi'(a)$ e $\varphi'(b)$ arbitrariamente.

- $\diamond$ Seja $\mathcal{T} = \{a = t_0 \leq \cdots \leq t_n = b\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[a, b]$ e seja $\mathcal{X} = \{\alpha = x_0 \leq \cdots \leq x_n = \beta\}$ a partição do intervalo $[\alpha, \beta]$ dada por $\mathcal{X} = \varphi(\mathcal{T})$. Isto é, suponhamos $x_i = \varphi(t_i)$ para cada $i = 0, \ldots, n$.

  Pelo TVM, existe $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

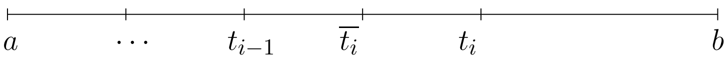

Figura 17: O ponto $\overline{t_i}$ relaciona comprimentos: $\Delta x_i = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

- $\diamond$ Se $|\mathcal{T}| \to 0$, então $|\mathcal{X}| \to 0$. Segue da continuidade uniforme de φ pois dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que temos $|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq \delta_1$ se $|t - \tau| \leq \delta_2$.

- $\diamond$ Se φ' é integrável, então $(f \circ \varphi)\varphi'$ também. Seja $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, arbitrário. Notemos que $\varphi(\tau_i) \in [x_{i-1}, x_i]$. Analisemos a soma de Riemann

$$\sum f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i = \sum f(\varphi(\tau_i))\Delta x_i + \sum f(\varphi(\tau_i))\big[\varphi'(\tau_i)) - \varphi'(\overline{t_i})\big]\Delta t_i.$$

  Se $|\mathcal{T}| \to 0$ então $|\mathcal{X}| \to 0$ e a primeira soma no lado direito tende a $\int_\alpha^\beta f dx$.

  Seja M uma constante tal que $|f| \leq M$ (existe, pois f é limitada). Segue

$$\Big|\sum f(\varphi(\tau_i))\big[\varphi'(\tau_i)) - \varphi'(\overline{t_i})\big]\Delta t_i\Big| \leq M\big[S(\varphi', \mathcal{T}) - s(\varphi', \mathcal{T})\big] \xrightarrow{|\mathcal{T}| \to 0} 0.$$

  Logo, $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável (o valor da integral é igual ao da integral de f).

- $\diamond$ Se $(f \circ \varphi)\varphi'$ é integrável, o valor de sua integral é igual ao da integral de f.

  Com as notações acima, seja $\tau_i = \overline{t_i}$ e escrevamos $\overline{x_i} = \varphi(\overline{t_i})$.

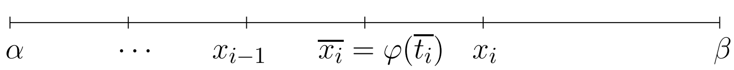

Figura 18: O ponto $\overline{x_i} = \varphi(\overline{t_i})$, onde $\Delta x_i = \varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i$.

  Segue então

$$\sum f(\varphi(\overline{t_i}))\varphi'(\overline{t_i})\Delta t_i = \sum f(\overline{x_i})\Delta x_i.$$

  Se $|\mathcal{T}| \to 0$, por definição o lado esquerdo converge à integral de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

  Se $|\mathcal{T}| \to 0$, então $|\mathcal{X}| \to 0$. Portanto, o lado direito tende à integral de f ♣

Corolário. *Mantidas as demais hipóteses no teorema acima, suponhamos φ monótona (isto é, crescente ou decrescente). Então segue*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Prova.

◇ O caso φ crescente já está provado. Suponhamos φ decrescente. Então,

$$\psi(s) = \varphi(a+b-s), \text{ onde } t \in [a,b]$$

é crescente. Pelo teorema segue

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(\psi(s)\big)\psi'(s)ds = -\int_a^b f\big(\varphi(a+b-s)\big)\varphi'(a+b-s))ds.$$

Logo, com a troca de variável $t = a+b-s$ obtemos

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx = \int_b^a f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \clubsuit$$

A seguir, vejamos um exemplo que distingue esta versão da "versão geral".

Exemplo (Um exemplo em que o teorema acima se aplica mas a "versão geral" não). Consideremos o par de funções

$$f(x) = x, \text{ se } x \in [0,1], \quad \text{ e } \quad \varphi(t) = \sqrt{t} \text{ se } t \in [0,1].$$

Obviamente f é integrável. Ainda, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ é sobretora, crescente e contínua. Ainda, a função derivada φ' está definida no intervalo aberto $(0,1)$ e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

É trivial ver que φ' não é limitada e portanto não é integrável em $(0,1)$.

É trivial ver que a função

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

é integrável. Logo, pelo teorema demonstrado acima segue

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}dt.$$

Por outro lado, φ' não é integrável em $(0,1)$ e então não podemos escrever

$$\sqrt{t} = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Desta forma, a "versão geral" (com $g = \varphi'$) não se aplica neste caso $\clubsuit$

28. Uma Função C^∞ mas não Aproximável via Fórmula de Taylor.

Exemplo. Uma função de classe C^∞ mas não analítica. A função

$$\Lambda(x) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0\,, \end{cases}$$

é tal que $\Lambda^{(n)}(0) = 0$ para todo n e de classe C^∞ na reta.

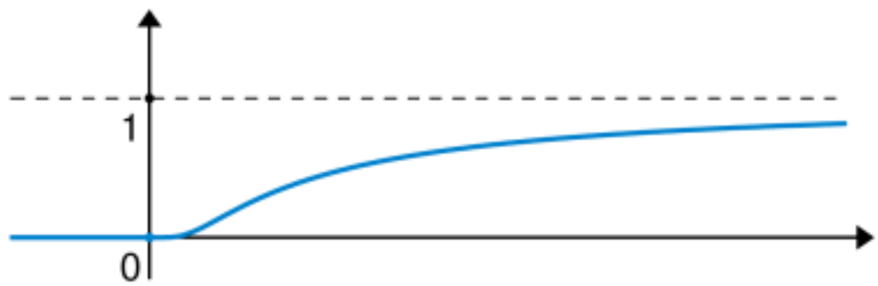

Figura 19: Gráfico de $\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$, com $\Lambda(x) = 0$ se $x \leq 0$.

Verificação. Seja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

É claro que $\Lambda(1) = e^{-1}$. É também claro que

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada $\Lambda^{(n)}$ [com $\Lambda^{(0)} = \Lambda$] satisfaz

$$\Lambda^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0, \text{ com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x\to 0^+} \Lambda^{(n)}(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{-y} P_n(y) = \lim_{y\to +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\Lambda^{(n)}(x) - 0}{x - 0} &= \lim_{y\to +\infty} y e^{-y} P_n(y) \\ &= \lim_{y\to +\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por indução segue que $\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda^{(3)}, \ldots$ são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo, Λ é infinitamente derivável♣

29. O δ de Dirac.

Definição. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **suporte** de f é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função f não se anula. Temos a notação

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Exemplo. Seja $\Lambda = \Lambda(x)$ como no exemplo na seção *Uma Função C^∞ mas não Aproximável via Fórmula de Taylor*. Consideremos a função

$$\Phi(x) \ = \Lambda(1 - x^2).$$

A função Φ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \ \text{ e } \ \text{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

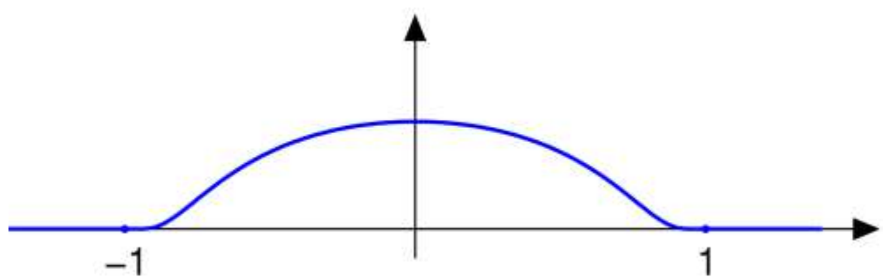

Figura 20: Gráfico da função Φ.

A expressão para Φ é

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \clubsuit \end{cases}$$

A seguir, consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \Phi(x)dx > 0.$$

Definamos a função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Dado um arbitrário $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}.$$

A função φ_ϵ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(\varphi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, \epsilon].$$

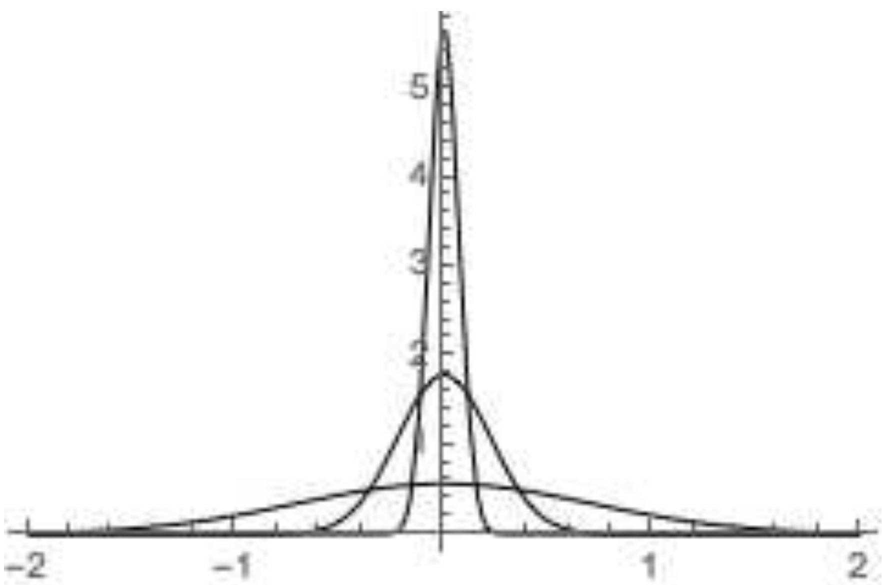

Figura 21: Ilustração para o gráfico de φ_ϵ, conforme $\epsilon \to 0^+$.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\epsilon}\epsilon\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\epsilon}dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Teorema. *Seja* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{onde}\ 0 < \epsilon < 1,$$

acima definidas. Então,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0).$$

Prova.

O primeiro TVM para integrais, generalizado, garante a existência de um ponto $\overline{x} \in [-\epsilon, \epsilon]$, com $\overline{x} = \overline{x}(\epsilon)$ dependendo de ϵ, tal que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx$$
$$= f(\overline{x}).$$

Como f é contínua na origem, temos que

$$f(\overline{x}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0)\clubsuit$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitamente derivável e de suporte compacto (i.e., f é identicamente nula no complementar de algum intervalo fechado e limitado) definimos o δ **de Dirac**

$$\delta(f) = f(0).$$

Dizemos que a família de funções

$$\{\varphi_\epsilon : \ 0\epsilon < 1\}$$

se aproxima do δ de Dirac, se $\epsilon \to 0$. Escrevemos então

$$\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} \delta.$$

30. A Primitiva $\int e^{-x^2}dx$ não é Elementar .

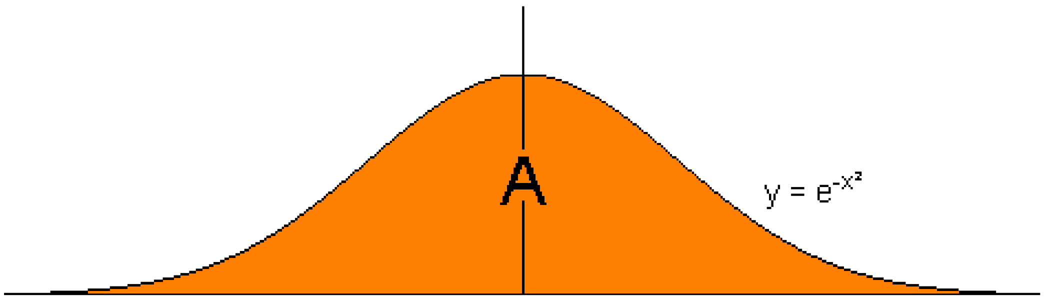

Figura 22: O gráfico de e^{-x^2} e a região A entre tal gráfico e o eixo Ox.

Uma função elementar, é uma função de uma variável (real ou complexa) que pode ser expressa com as quatro operações básicas da artimétrica, e pela composição da exponenciação, do logaritmo, das constantes e da radiciação.

As funções trigonométricas e as funções seno e cosseno hiperbólicos e suas inversas são também elementares pois todas elas são exprimíveis pela função exponencial complexa e pelo logaritmo.

O conjunto das funções elementares é fechado pelas quatro operações básicas, pela composição e pela derivação.

As funções elementares são analíticas exceto em um conjunto finito de pontos.

O conjunto das funções elementares não é fechado por limites, somas infinitas e integração.

O seguinte teorema se deve a Liouville.

Teorema (Liouville). *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções racionais, com $g(x)$ não constante. Suponhamos que*

$$\int f(x)e^{g(x)}dx$$

é uma função elementar. Então, existe uma função racional $R(x)$ tal que

$$\int f(x)e^{g(x)}dx = R(x)e^{g(x)}.$$

Utilizemos tal teorema de Liouville para provarmos o próximo resultado.

Corolário. *A primitiva*

$$\int e^{-x^2}dx$$

não é elementar.

Prova.

Suponhamos que a primitiva acima é elementar. Então, pelo teorema de Liouville existe uma função racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

com P e Q polinômios e Q não nulo, e com P e Q sem raízes em comum, satisfazendo

$$\int e^{-x^2}dx = \frac{P(x)}{Q(x)}e^{-x^2}.$$

Obviamente $P(x)$ é não nulo. Derivando tal identidade encontramos

$$e^{-x^2} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}e^{-x^2} + \frac{P(x)}{Q(x)}\left(-2xe^{-x^2}\right).$$

Donde segue

$$Q^2(x) = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) - 2xP(x)Q(x), \text{ para todo } x.$$

- ◇ O caso $Q(x)$ uma constante c, com $c \neq 0$. Então encontramos

  $$c^2 = cP'(x) - 2cxP(x),$$

  o que é impossível pois grau$(c^2) = 0$ e grau$[cP'(x) - 2cxP(x)] \geq 1$.

- ◇ O caso $Q(x)$ não constante. A identidada polinomial acima obtida é válida para todo x em $\mathbb{R}$. Logo, ela vale também para todo z em $\mathbb{C}$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ [com existência garantida pelo TFA] tal que

  $$Q(\alpha) = 0.$$

  Seja m a multiplicidade algébrica de α como raíz de $Q(z)$. Pela identidade que estamos utilizando segue que

  $$(z-\alpha)^m \text{ divide } Q'.$$

  Logo, α é raíz de multiplicidade $m+1$ de $Q(z)$ $\lightning$

A prova está encerrada♣

31. Teorema de Caracterização da Integral de Riemann.

A - Continuidade e Oscilação.

A descontinuidade de uma função em um ponto pode ser de *primeira espécie*, também dita de tipo "salto" (os limites laterais existem e são distintos), ou de *segunda espécie* (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de $[a, b]$.

Definição. Seja $p \in [a, b]$. Para cada $r > 0$ sejam

$$m(f, p, r) = \inf_{x \in [p-r, p+r]} f(x) \quad \text{e} \quad M(f, p, r) = \sup_{x \in [p-r, p+r]} f(x).$$

A notação acima subentende que x pertence a $[a, b]$, o domínio de f.

Também escrevemos (abusando da notação)

$$\begin{cases} m(f, p, r) = \inf \Big\{ f(x) : \ x \in [p-r, p+r] \Big\} = \inf f\big([p-r, p+r]\big) \\ \\ M(f, p, r) = \sup \Big\{ f(x) : \ x \in [p-r, p+r] \Big\} = \sup f\big([p-r, p+r]\big). \end{cases}$$

Fixado p no intervalo $[a, b]$, é fácil ver que

$$\begin{cases} m(f, p, r) \text{ é uma função crescente se } r \to 0 \\ \\ M(f, p, r) \text{ é uma função decrescente se } r \to 0. \end{cases}$$

Assim, a diferença $M(f, p, r) - m(f, p, r)$ é **decrescente se** $r \to 0$.

Consequentemente, sempre existe a oscilação de f em p:

$$\boxed{\operatorname{osc}(f, p) = \lim_{r \to 0} [M(f, p, r) - m(f, p, r)].}$$

Definição. Um subconjunto F da reta é dito **fechado** se para toda sequência $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de F e convergente a um ponto x da reta (escrevemos $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$), então tal ponto limite x pertence ao subconjunto F.

Propriedades da Oscilação. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vale o que segue.*

(i) f é contínua em p se e só se $osc\,(f, p) = 0$.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, é um fechado o conjunto

$$F = \Big\{p \in [a, b] : \ osc\,(f, p) \geq \epsilon\Big\}.$$

Prova.

(i) $(\Rightarrow)$ Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ se $x \in [p - \delta, p + \delta]$ (e $x \in [a, b]$). Logo, $M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) \leq 2\epsilon$. Donde segue, $\text{osc}\,(f, p) \leq 2\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\text{osc}\,(f, p) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Solicitamos ao leitor.

(ii) Seja $(p_n) = (p_1, p_2, \ldots)$ uma sequência de pontos pertencentes ao conjunto F e tal que $p_n \xrightarrow{n\to+\infty} p$, onde $p \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que $p \in F$.

Por hipótese, temos $a \leq p_n \leq b$ para todo n. Logo, é trivial ver que p satisfaz $a \leq p \leq b$. Isto é, $p \in [a, b]$.

Seja $r > 0$. Como $p_n \to p$, então existe algum j tal que $p_j \in (p - r, p + r)$.

Então, existe $0 < d < r$ tal que $[p_j - d, p_j + d] \subset (p - r, p + r)$.

Segue $m(f, p, r) \leq m(f, p_j, d) \leq M(f, p_j, d) \leq M(f, p, r)$. Assim, e lembrando que a oscilação é uma função decrescente se $r \to 0^+$, encontramos

$$M(f, p, r) - m(f, p, r) \geq M(f, p_j, d) - m(f, p_j, d) \geq \text{osc}(f, p_j) \geq \epsilon$$

para todo $r > 0$. Donde segue $\text{osc}(f, p) \geq \epsilon$. Logo, $p \in F$ e F é fechado$\clubsuit$

Observação. Seja D o conjunto de descontinuidades da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com f limitada. Dado $\epsilon > 0$, seja

$$D_\epsilon = \{p \in [a, b] : \ \text{osc}(f, p) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup \cdots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \cdots .$$

B - Conteúdo Nulo, Compactos e Medida Nula.

Definição. Seja D um conjunto, com $D \subset \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^2$.

- Um retângulo fechado e limitado tem a forma $[a, b] \times [c, d]$.
- O conjunto D é **compacto** se D é fechado e limitado. Logo, um intervalo/retângulo J é fechado e limitado se e somente se J é compacto.
- D tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita de intervalos/retângulos compactos $J_1, \ldots, J_k$ tal que $D \subset J_1 \cup \cdots \cup J_k$ e

  $$\sum_{i=1}^{k} m(J_i) < \epsilon\,,$$

  onde $\mathrm{m}(J_i)$ é o comprimento/área do intervalo/retângulo J_i.
- D tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção contável de intervalos/retângulos compactos $J_1, J_2, J_3, \ldots$ tal que $D \subset J_1 \cup J_2 \cup \cdots$ e

  $$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(J_i) \leq \epsilon \ \ [\text{isto é, } m(J_1) + \cdots + m(J_k) \leq \epsilon\,, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}].$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "intervalos/retângulos compactos" pela condição "intervalos/retângulos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

Exemplo. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então, f é integrável se e somente se o gráfico de f, denotado $\mathrm{Gr}(f)$, tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^2$.

Solução. Utilizemos as notações para as somas de Darboux. Sabemos que a função f é integrável se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\{a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ determinando sub-intervalos $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \big(M_i - m_i\big) m(J_i) < \epsilon.$$

Por fim, a coleção de retângulos $R_i = J_i \times [m_i, M_i]$ recobre $\mathrm{Gr}(f)$ e satisfaz

$$\sum_{i=1}^{n} m(R_i) = \sum_{i=1}^{n} m(J_i)(M_i - m_i) < \epsilon \clubsuit$$

Lema 1. *Seja K compacto, com $K \subset \mathbb{R}^2$ ou $K \subset \mathbb{R}$. Seja $R_1, R_2, R_3, \ldots$ uma coleção contável de retângulos/intervalos abertos cobrindo K. Isto é,*

$$K \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cdots .$$

Então, tal cobertura admite subcobertura finita. Isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset R_1 \cup \cdots \cup R_N.$$

Prova.

Suponhamos, por absurdo, que não. Então, para todo n existe um ponto

$$p_n \in K \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_n).$$

A sequência $(p_1, p_2, \ldots)$ está contida em K que é limitado (pois compacto). Logo, $(p_1, p_2, \ldots)$ admite uma subsequência convergente $(p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots)$ a um ponto p.

O conjunto K é fechado (pois compacto) e $p_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} p$. Logo, $p \in K$. Segue então que existe j tal que $p \in R_j$. Como R_j é um retângulo/intervalo aberto e $p_{n_k} \to p$, segue que para todo k grande o suficiente temos $p_{n_k} \in R_j$ ↯

Lema 2. *Seja K um conjunto compacto e de medida nula, com $K \subset \mathbb{R}$ ou $K \subset \mathbb{R}^2$. Então, K tem conteúdo nulo.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de retângulos/intervalos abertos tal que

$$K \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cdots \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m(R_k) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo Lema 1, existe N tal que $K \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_N$. É óbvio que $m(R_1) + \cdots + m(R_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ♣

Lema 3. *Seja $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^2$. Então, $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ tem medida nula.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

Como X_1 tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de retângulos $R_1^1, R_2^1, R_3^1, \ldots$ satisfazendo

$$X_1 \subset R_1^1 \cup R_2^1 \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice j arbitrário em $\mathbb{N}$, existe uma coleção enumerável de retângulos $R_1^j, R_2^j, R_3^j, \ldots$ satisfazendo

$$X_j \subset R_1^j \cup R_2^j \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto contável, segue que a coleção de retângulos $\mathcal{C} = \{R_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de retângulos em $\mathcal{C}$ está contida em alguma sub-coleção finita do tipo $\{R_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\}$, para N suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m(R_i^j) &= \sum_{i=1}^{N} m(R_i^1) + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^2) + \cdots + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^N) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^N} \\
&= \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N} \right) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(R_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo, X tem medida nula ♣

C - O Teorema de Lebesgue.

Teorema de Caracterização (Lebesgue). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Então, f é integrável se e somente se D tem medida nula.*

Prova.

($\Rightarrow$) Já vimos que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup \cdots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \cdots \text{, onde } D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : \text{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Como a união contável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula. Fixemos n.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição tal que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja $\mathcal{C}$ a coleção dos sub-intervalos $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ que contém algum ponto de $D_{\frac{1}{n}}$ em seu interior [isto é, a intersecção$(x_{i-1}, x_i) \cap D_{\frac{1}{n}}$ é não vazia]. Para todo J_i em $\mathcal{C}$ temos $M_i - m_i \geq 1/n$. Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{J_i \in \mathcal{C}} m(J_i) \leq \sum_{J_i \in \mathcal{C}} (M_i - m_i) m(J_i) \leq S(f,P) - s(f,P) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde segue

$$\sum_{J_i \in \mathcal{C}} m(J_i) < \epsilon.$$

É claro que $D_{\frac{1}{n}}$ está contido na união dos sub-intervalos em $\mathcal{C}$ com as extremidades $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Cada $\{x_i\} = [x_i, x_i]$ é um sub-intervalo de comprimento 0. Assim, cobrimos $D_{\frac{1}{n}}$ por um número finito de sub-intervalos cuja soma dos comprimentos é menor que ϵ. Logo, $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ temos que $D_\epsilon = \{x \in [a,b] : \text{ osc}(f,x) \geq \epsilon\}$ está contido em D e portanto tem medida nula. Pela Propriedade da oscilação (ii) segue que D_ϵ é compacto. Então, pelo Lema 2 segue que D_ϵ tem conteúdo nulo.

Consideremos (pois existe) uma quantidade finita de sub-intervalos abertos $I_1, \ldots, I_l$ que recobre D_ϵ e tal que $m(I_1) + \cdots + m(I_l) < \epsilon$.

Seja x um ponto arbitrário em $[a,b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_l)$. Temos $\operatorname{osc}(f,x) < \epsilon$. Logo, existe um sub-intervalo aberto I_x centrado em x e tal que a oscilação de f no conjunto $I_x \cap [a,b]$ é menor que ϵ. Isto é,

$$\left(\sup_{I_x \cap [a,b]} f - \inf_{I_x \cap [a,b]} f \right) < \epsilon.$$

Então, como a reunião de tais sub-intervalos abertos I_x recobre o conjunto

$$K = [a,b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_l),$$

e K é compacto (pois fechado e limitado, cheque), temos que existem $I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}$ tais que $K \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_m}$ (cheque).

Consideremos a coleção de sub-intervalos abertos

$$\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_l, I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}\}.$$

É óbvio que $[a,b]$ está contido na união dos sub-intervalos em $\mathcal{I}$. Seja (cheque) $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$ tal que cada sub-intervalo J determinado por $\mathcal{P}$ está contido em um dos sub-intervalos da coleção $\mathcal{I}$. Separemos os sub-intervalos determinados por $\mathcal{P}$ em duas coleções disjuntas: $\mathcal{J}_1$ contém os sub-intervalos contidos em algum I_j, onde $1 \leq j \leq l$, e a coleção $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$.

Sejam M_J e m_J o supremo e o ínfimo de f retrita a J, respectivamente. Seja M tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x em $[a,b]$.

Se J pertence a $\mathcal{J}_2$, então J está contido em algum sub-intervalo I_{x_j}, com $1 \leq j \leq m$, e temos $M_J - m_J < \epsilon$.

Se $J \in \mathcal{J}_1$, então $0 \leq M_J - m_J \leq 2M$. Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{J \in \mathcal{J}_1} (M_J - m_J) m(J) \;+\; \sum_{J \in \mathcal{J}_2} (M_J - m_J) m(J) \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^{l} m(I_j) \;+\; \epsilon \sum_{J \in \mathcal{J}_2} m(J) \\ &\leq 2M\epsilon \;+\; \epsilon\,(b-a) \clubsuit \end{aligned}$$

D - Um Importante Teste de Integrabilidade.

A demonstração do *Teorema de Lebesgue para a Caracterização das Integrais de Riemann* revela um importante teste de integrabilidade baseado na oscilação.

Teste de Integrabilidade. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então, f é integrável se e somente se f é limitada e para todo par $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$ existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que o comprimento total dos sub-intervalos $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ com oscilação osc$(f, J_i) > \eta$ é menor que ϵ. Isto é,*

$$\sum_{i:\, osc(f,J_i)>\eta} m(J_i) \ < \ \epsilon.$$

Prova.

◇ Utilizemos as notações usuais para somas de Darboux. Dada uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ de $[a,b]$, sejam $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $m(J_i) = \Delta x_i$. É claro que a oscilação de f no sub-intervalo J_i é $\text{osc}(f, J_i) = M_i - m_i$.

($\Rightarrow$) Neste caso, existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ tal que

$$\sum (M_i - m_i) m(J_i) < \epsilon\eta.$$

Seja $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\eta = \{i : \text{osc}(f, J_i) > \eta\}$. Segue

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \eta m(J_i) \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} \text{osc}(f, J_i) m(J_i) < \epsilon\eta.$$

Logo,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} m(J_i) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \cdots \leq x_n = b\}$ tal que

$$\sum_{i:\, \text{osc}(f,J_i)>\epsilon} m(J_i) \ < \ \epsilon.$$

Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Segue

$$\begin{aligned}\sum (M_i - m_i) m(J_i) &= \sum_{i:\, \text{osc}(f,J_i)>\epsilon} (M_i - m_i) m(J_i) + \sum_{i:\, \text{osc}(f,J_i)\leq\epsilon} \text{osc}(f, J_i) m(J_i) \\ &\leq 2M\epsilon + \epsilon(b-a).\end{aligned}$$

Logo, f é integrável♣

E - Aplicação do Teorema de Lebesgue.

Exemplos. *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$. Valem as propriedades,*

(i) fg é integrável em $[a,b]$.

(ii) Suponhamos f positiva [isto é, $f \geq 0$]. Então, temos

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

se e somente se f é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.

Prova.

(i) Sejam $D(fg)$, $D(f)$ e $D(g)$, os conjuntos das descontinuidades de fg, f e g, respectivamente. É óbvio que $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$. Pelo Teorema de Lebesgue, $D(f)$ e $D(g)$ tem medida nula. Pelo Lema 3, o conjunto $D(fg)$ tem medida nula. O Teorema de Lebesgue mostra que fg é integrável.

(ii) ($\Rightarrow$) Seja x_0 um ponto de continuidade de f. Existe um sub-intervalo J, com $x_0 \in J \subset [a,b]$ e $m(J) > 0$, satisfazendo

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \in J.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0)}{2} m(J) \leq \underline{\int_a^b} f dx = \int_a^b f dx = 0.$$

Portanto, $f(x_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{P}$ uma partição (de pontos distintos) de $[a,b]$. Indiquemos por J_i os sub-intervalos determinados por $\mathcal{P}$. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula, segue que f não é descontínua em todos os pontos de J_i. Logo, f é contínua em ao menos um ponto de J_i. Devido à hipótese, f é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de f em relação a tal partição,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_i m_i m(J_i) = 0.$$

Como esta soma inferior é arbitrária e f é integrável, concluímos que a integral de f é zero$\clubsuit$

32. A identidade $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Esta seção utiliza coordenadas polares, integral imprópria e integral dupla.

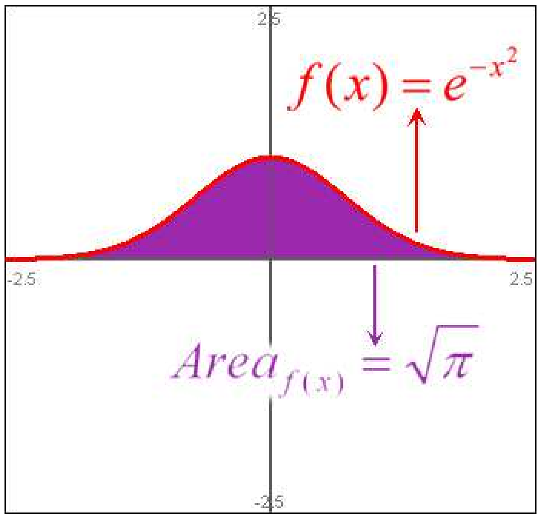

Figura 23: Ilustração para $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Apesar de não termos uma fórmula elementar para a função

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ onde } x \geq 0,$$

conseguimos computar a integral de e^{-x^2} em toda a reta. Notemos que

$$g \text{ é positiva e crescente em } (0, +\infty).$$

Assim, existe (como número real positivo ou como o valor $+\infty$) o limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Como a função positiva e^{-x^2} é par, temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

A seguir, computamos $I^2 = I.I$ e mostramos que $I^2 = \pi$.

Seja $r > 0$ e arbitrário. Notemos que

$$I^2 = I.I = \lim_{r\to+\infty} \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx\right) \left(\int_{r}^{r} e^{-y^2} dy\right)$$
$$= \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{[-r,r]\times[-r,r]} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right].$$

Seja $0 = (0,0)$ a origem do plano $\mathbb{R}^2$. Sejam

$$D(0;r) = \{(,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$$

o disco de centro na origem e de raio r e o quadrado $Q_r = [-r,r] \times [-r,r]$ de centro na origem. Valem as relações

$$D(0;r) \subset Q_r \subset D(0;2r) \subset Q_{2r}.$$

Devido a tais relações, e a desigualdade $e^{-(x^x+y^2)} \geq 0$ em todo ponto (x,y), temos

$$\lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right] = \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right].$$

Donde segue

$$I^2 = \lim_{r\to+\infty} \left[\iint\limits_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right].$$

Utilizando coordenadas polares escrevemos

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \text{com } \rho > 0 \ \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

O determinante da matriz jacobiana da aplicação $J(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ é

$$\det J(\rho,\theta) = \rho.$$

Então, efetuando tal mudança de coordenadas encontramos

$$I^2 = \lim_{r\to\infty} \left[\iint\limits_{[0,r]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \right]$$
$$= \lim_{r\to+\infty} \left(\int_0^r \rho e^{-\rho^2} dr\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$
$$= \lim_{r\to+\infty} \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\Big|_0^r \right) 2\pi = \pi \clubsuit$$

Exercício. Mostre que a função

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ se } x \neq 0\,, \\ 0\,, \text{ se } x = 0\,, \end{cases}$$

satisfaz $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n e é de classe C^∞ na reta.

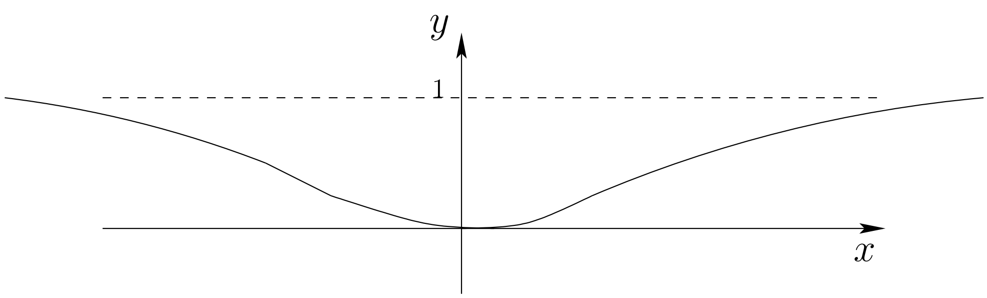

Figura 24: Gráfico de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$, com $f(0) = 0$.

Sugestão.

Por indução, as derivadas $f^{(n)}$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} R_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x \neq 0,$$

onde $R_n(x)$ é uma função racional.

A seguir, adapte a prova apresentada no exemplo na seção *Uma Função* C^∞ *mas não Aproximável via Fórmula de Taylor*.

Referências.

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, segunda ed. (1977), Reverté.
2. Davies, R., *An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration*, Mathematical Gazette, 45 (1961) pp. 23–25.
3. Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol. 1., 5ª edição, LTC, 2001.
4. Hairer E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 2000.
5. Kestelman, H., *Change of variable in Riemann integration*, Mathematical Gazette **45** (1961), 351, pp 17–23.
6. Knapp, A. W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005.
7. Lang, S., *Undergraduate Analysis*, second ed., Springer, China, 1997.
8. Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, 1976.
9. Lu, Jitan, *Is the composite function integrable?*, Amer. Math. Monthly, 106 (8), 1999, pp. 763–766.
10. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.
11. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, 2008.
12. Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Perseus Book, 1965.