Ano 2017

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA PARA FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS (APENAS), NO PLANO

Extraído de "The Implicit Function Theorem when the partial Jacobian matrix is only continuous at the base point". Real Analysis Exchange Vol 41(2), 2016, pp. 377–388.
Disponível em http://arxiv.org/abs/1312.2445v1 (2013).

Oswaldo Rio Branco de Oliveira
http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

No que segue, utilizamos o resultado abaixo.

Propriedade de Darboux (Teorema do valor intermediário para derivadas). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável. O conjunto imagem da função derivada, dado por $f'\big([a,b]\big) = \{f'(x) : x \in [a,b]\}$, é um intervalo.*

Prova. Vide https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DARBOUX.pdf ♣

O teorema da função implícita é um resultado local. Podemos então simplificar a notação para a prova supondo a função definida em $\mathbb{R}^2$.

Teorema da Função Implícita (no plano). *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ em todo ponto, e um ponto (a,b) tal que $F(a,b) = 0$. Então, existe um retângulo aberto $X \times Y$ centrado em (a,b) e satisfazendo o que segue.*

- *Para cada x em X, existe um único $y = f(x)$ em Y tal que $F(x,y) = 0$.*
- *Temos $f(a) = b$. A função $f : X \to Y$ é diferenciável e satisfaz*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big)}, \text{ para todo } x \text{ em } X.$$

Ainda, se $\nabla F(x,y)$ é contínua em (a,b), então $f'(x)$ é contínua em $x = a$.

Prova. Dividamos a prova em três partes: existência e unicidade, continuidade e diferenciabilidade.

◇ Existência e Unicidade. A derivada da função $\varphi(y) = F(a,y)$ não se anula. Pela Propriedade de Darboux podemos supor $\varphi' > 0$ em todo ponto. Assim, φ é estritamente crescente e pela continuidade de F existe um retângulo não degenerado $X \times [b_1, b_2]$, centrado em (a,b) e com X aberto, tal que

$$F\Big|_{X\times\{b_1\}} < 0 \text{ (na base)} \quad \text{e} \quad F\Big|_{X\times\{b_2\}} > 0 \text{ (no topo)}.$$

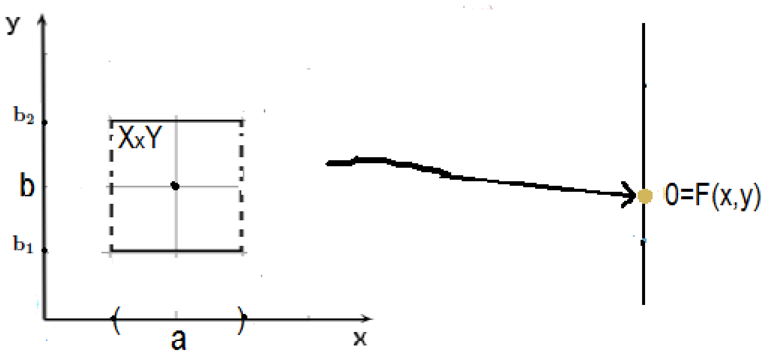

Figura 1: O teorema da função implícita.

Fixando um arbitrário x em X, a função

$$\psi(y) = F(x,y)$$

satisfaz $\psi(b_1) < 0 < \psi(b_2)$. Pelo TVM existe $\eta \in Y = (b_1, b_2)$ tal que

$$\psi'(\eta) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,\eta) > 0.$$

Pela Propriedade de Darboux temos $\psi'(y) > 0$ em todo $y \in Y$. Pelo TVI,

existe um único $y = f(x) \in Y$ *tal que* $F\big(x, f(x)\big) = 0$.

◇ Continuidade. Sejam $\overline{b_1}$ e $\overline{b_2}$ tais que $b_1 < \overline{b_1} < b < \overline{b_2} < b_2$. Pelo visto acima, existe um intervalo aberto X', contido em X e contendo a, tal que $f(x)$ pertence ao intervalo aberto $(\overline{b_1}, \overline{b_2})$, para todo $x \in X'$. Logo, f é contínua em $x = a$. Por fim, dado a' em X, seja $b' = f(a')$. Então, $f : X \to Y$ é uma solução do problema $F\big(x, h(x)\big) = 0$, para todo x em X, com a condição $h(a') = b'$. Assim, pelo que acabamos de mostrar, f é contínua em $x = a'$.

- Diferenciabilidade. Fixemos x em X. Denotemos $\nabla F(x,f(x)) = (\alpha,\beta)$.

  Como F é diferenciável no ponto $\big(x,f(x)\big)$, temos
$$\begin{cases} F[x+h,f(x)+k]-F[x,f(x)] = \alpha h+\beta k+E(h,k)\|(h,k)\|, \\ \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k)=0. \end{cases}$$
  Logo [lembrando que $F[x,f(x)]=0$ para todo x no domínio de f],
$$\begin{aligned} 0 &= F[x+h,f(x+h)]-F[x,f(x)] = \\ &= \alpha h+\beta[f(x+h)-f(x)]+E[h,f(x+h)-f(x)]\,\big\|\big(h,f(x+h)-f(x)\big)\big\|. \end{aligned}$$
  Dividindo por $h\neq 0$, simplificamos os cômputos com as notações
$$\mathcal{D}(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ \text{ e } \ \mathcal{E}(h)=E[h,f(x+h)-f(x)]\frac{|h|}{h}.$$
  Assim, temos
$$0=\alpha+\beta\mathcal{D}(h)+\mathcal{E}(h)\|\big(1,\mathcal{D}(h)\big)\| \text{ com, pois } f \text{ é contínua, } \ \mathcal{E}(h)\xrightarrow{h\to 0} 0.$$
  Lembrando que $\mathcal{D}=\mathcal{D}(h)$ e $\mathcal{E}=\mathcal{E}(h)$ são funções de $h\neq 0$, escrevemos
$$\alpha+\beta\mathcal{D}=-\mathcal{E}\|(1,\mathcal{D})\|.$$
  A seguir, elevando ao quadrado encontramos
$$\alpha^2+2\alpha\beta\mathcal{D}+\beta^2\mathcal{D}^2=\mathcal{E}^2(1+\mathcal{D}^2)$$
  e então
$$(\beta^2-\mathcal{E}^2)\mathcal{D}^2+2\alpha\beta\mathcal{D}+(\alpha^2-\mathcal{E}^2)=0.$$
  Como $\mathcal{E}(h)\xrightarrow{h\to 0} 0$, podemos usar a formula quadrática e obtemos
$$\mathcal{D}=\frac{-2\alpha\beta\pm\sqrt{4\alpha^2\beta^2-4(\beta^2-\mathcal{E}^2)(\alpha^2-\mathcal{E}^2)}}{2(\beta^2-\mathcal{E}^2)}\xrightarrow{h\to 0}\frac{-2\alpha\beta}{2\beta^2}=-\frac{\alpha}{\beta}\ \clubsuit$$

Provemos que localmente, em (a,b), a curva de nível 0 de F é o gráfico de f.

Corolário. *Com a notação acima temos, com $Gr(f)$ gráfico de f,*
$$\big\{(x,y)\in X\times Y : F(x,y)=0\big\}=Gr(f)=\big\{\big(x,f(x)\big) : x\in X\big\}.$$

Prova. Imediata$\clubsuit$

Comentário. O teorema da função implícita também vale para $F(x,y)=c$ com c um número na imagem de F, mantidas as demais hipóteses sobre F. De fato, basta aplicar o resultado provado acima para a função $G(x,y)=F(x,y)-c$.

SOLUÇÃO (IMPLÍCITA) MAXIMAL

Sejam Ω um aberto no plano e (x,y) a variável no plano.

Teorema (Solução maximal). *Consideremos $F:\Omega\to\mathbb{R}$ diferenciável, com $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ em todo ponto de Ω. Fixemos $(a,b)\in\Omega$ e $c=F(a,b)$. Vale o que segue.*

(1) *Se as funções $y_1:I_1\to\mathbb{R}$ e $y_2:I_2\to\mathbb{R}$, onde I_1 e I_2 são intervalos abertos contendo o ponto a, são soluções do problema*

$$(P)\quad\begin{cases}F(x,y(x))=c\\ y(a)=b,\end{cases}$$

então temos $y_1=y_2$ na intersecção $I_1\cap I_2$.

(2) *Toda solução de (P) é estendível a um mesmo* **intervalo maximal** *(máximo domínio conexo da solução). Tal intervalo é aberto e denotado $I=(\omega^-,\omega^+)$.*

(3) *A solução de (P) no intervalo maximal é única (e dita* **solução maximal***).*

Prova.

Notemos que $I_1\cap I_2$ é um intervalo aberto contendo a.

(1) Seja

$$O=\{x\in I_1\cap I_2 : y_1(x)=y_2(x)\}\subset I_1\cap I_2.$$

Temos $O\neq\varnothing$ pois $a\in O$. Pelo teorema das funções implícitas, as funções y_1 e y_2 são diferenciáveis (cheque) e contínuas. Logo, O é fechado em $I_1\cap I_2$.

Dado $\alpha\in O$, seja $\beta=y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$. Temos $F(\alpha,\beta)=c$.

Pelo teorema da função implícita segue que existe um intervalo aberto I_3 contendo α (podemos supor $I_3\subset I_1\cap I_2$) tal que o problema

$$\begin{cases}F(x,y(x))=c\\ y(\alpha)=\beta\end{cases}$$

tem solução única. Donde então segue $y_1=y_2$ em I_3.

Portanto temos $I_3\subset O$ e O é aberto.

Assim, O é não vazio, aberto e fechado em $I_1\cap I_2$. Como $I_1\cap I_2$ é um intervalo, e então conexo, concluímos

$$O=I_1\cap I_2 \quad\text{e}\quad y_1=y_2 \text{ em } I_1\cap I_2.$$

(2) Consideremos todas as soluções $y_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}$, onde I_λ é um intervalo aberto contendo o ponto a, do problema original

$$(P) \quad \begin{cases} F(x, y(x)) = c \\ y(a) = b. \end{cases}$$

A união $I = \bigcup I_\lambda$ é um aberto e um intervalo (cheque). Escrevamos

$$I = (\omega^-, \omega^+).$$

Por (1) segue que está bem definida a função

$$\mathcal{Y} : (\omega^-, \omega^+) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } \mathcal{Y}(x) = y_\lambda(x) \text{ se } x \in I_\lambda.$$

É claro que a função $\mathcal{Y}$ é uma solução do problema (P).

Vejamos que $I = (\omega^-, \omega^+)$ é o maior intervalo em que há uma solução de (P). Suponhamos, por contradição, que J é um intervalo (arbitrário) contendo propriamente I e que existe uma solução $\mathcal{Z} : J \to \mathbb{R}$ do problema (P).

Podemos então supor sem perda de generalidade que $\omega^+ \in J$. Como temos $F(x, \mathcal{Z}(x)) = c$ para todo $x \in J$, concluímos que

$$\boxed{(\omega^+, \mathcal{Z}(\omega^+)) \in \Omega \quad \text{e} \quad F(\omega^+, \mathcal{Z}(\omega^+)) = c.}$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma solução do problema

$$\begin{cases} F(x, y(x)) = c \\ y(\omega^+) = \mathcal{Z}(\omega^+) \end{cases}$$

em algum intervalo aberto $(\omega^+ - r, \omega^+ + r)$, onde $r > 0$.

Definamos a função

$$\mathcal{W}(x) = \begin{cases} \mathcal{Y}(x), & \text{se } x \in (\omega^-, \omega^+) \\ \mathcal{Z}(x), & \text{se } x \in [\omega^+, \omega^+ + r). \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} F(x, \mathcal{W}(x)) = c \\ \mathcal{W}(a) = \mathcal{Y}(a) = b. \end{cases}$$

Donde segue $(\omega^-, \omega^+ + r) \subset (\omega^-, \omega^+)$ ↯

(3) Segue trivialmente de (1)♣

REFERÊNCIAS

1. de Oliveira, O. R. B., *The implicit and the inverse function theorems: easy proofs*, Real Analysis Exchange Vol. 39(1), 2013/2014, pp. 229-240.

   Available at `http://arxiv.org/abs/1212.2066` (2012)

2. de Oliveira, O. R. B., *The Implicit Function Theorem when the partial Jacobian matrix is only continuous at the base point*, Real Analysis Exchange Vol 41(2), 2016, pp. 377–388.

   Available at `http://arxiv.org/abs/1312.2445v1` (2013).

3. de Oliveira, O. R. B., *The implicit function theorem for maps that are only differentiable: an elementary proof*, Real Analysis Exchange Vol 43(2), 2018, pp. 429–444.

   Available at `http://arxiv.org/abs/arXiv:1708.02065` (2017)

4. U. Dini, *Lezione di Analisi Infinitesimale*, volume 1, Pisa, 1907, 197–241.

5. Figueiredo, D. G. e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, 3ª ed., IMPA, 2008.

6. P. M. Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, 2nd ed., Pure and Applied Undergraduate Texts vol. 5, American Mathematical Society, Providence, 2009.

7. S. G. Krantz and H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem - History, Theory, and Applications*, Birkhaüser, Boston, 2002.

8. J. Saint Raymond, Local inversion for differentiable functions and the Darboux property, *Mathematika*, **49** (2002), 141–158.

Departamento de Matemática - Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`