TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 7 - Transformadas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

Capítulo 1 - Algumas Motivações e Interpretações.

Capítulo 2 - Ferramentas.

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Capítulo 7 - Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e Distribuições Temperadas.

7.1 Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Também indicamos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, brevemente, por $\mathcal{S}$.

Definição. *Seja (φ_n) uma sequência de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dizemos que φ_n converge a φ, se $j \to \infty$, se*

$$x^j \varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{\text{uniformemente}} x^j \varphi^{(k)}(x) \text{ se } n \to \infty, \quad \text{para quaisquer } j \text{ e } k.$$

Notação:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \text{ se } n \to \infty \quad \text{ou, brevemente,} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi.$$

Dada φ em $\mathcal{S}$ e dados j e k, ambos naturais, seja

$$p_{j,k}(\varphi) = \|x^j \varphi^{(k)}\|_\infty = \sup\left\{|x^j \varphi^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Cada função

$$p_{j,k} : \mathcal{S} \to [0, \infty)$$

é uma semi-norma (cheque).

Sejam (φ_n) em $\mathcal{S}$ e φ em $\mathcal{S}$. Seja j e k dois números naturais arbitrários e fixados. São então equivalentes as afirmações abaixo.

(1) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ se $n \to \infty$.

(2) $x^j \varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{\text{uniformemente}} x^j \varphi^{(k)}(x)$ se $n \to \infty$.

(3) $p_{j,k}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

A afirmação (3) revela que a convergência em $\mathcal{S}$ é determinada pela família (enumerável ou contável) de semi-normas $\{p_{j,k} : j \text{ e } k \text{ são naturais}\}$.

Teorema 7.1. *Suponha que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Seja x a variável espacial na reta. Então*

(a) $D\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, onde D é o operador derivação na variável x.

(b) $M\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, com M o operador multiplicação por x [i.e., $M(\varphi)(x) = x\varphi(x)$].

(c) $\widehat{\varphi_n} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$.

Prova.

(a) Segue de

$$p_{j,k}(\varphi') = p_{j,k+1}(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

(b) Segue da identidade $D^k[x\varphi(x)] = kD^{k-1}\varphi + xD^k\varphi$ e então de

$$p_{j,k}(x\varphi) \leq kp_{j,k-1}(\varphi) + p_{j+1,k}(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

(c) Sejam j e k dois números naturais e φ em $\mathcal{S}$. Então temos

$$\xi^j \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{(-2\pi i)^k}{(2\pi i)^j} \mathcal{F}\left\{\frac{d^j}{dx^j}\left[x^k\varphi(x)\right]\right\}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} p_{j,k}(\widehat{\varphi}) &\leq \frac{\left\|D^j\left[x^k\varphi(x)\right]\right\|_1}{(2\pi)^{j-k}} \\ &\leq \frac{\left\|\frac{1}{1+x^2}\right\|_1 \left\|(1+x^2)D^j\left[x^k\varphi(x)\right]\right\|_\infty}{(2\pi)^{j-k}} \\ &\leq \pi \frac{p_{0,j}(M^k\varphi) + p_{2,j}(M^k\varphi)}{(2\pi)^{j-k}}. \end{aligned}$$

Por (b) temos que $M^k\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ se $n \to \infty$. Portanto, $p_{0,j}[(-2\pi i)^k M^k\varphi_n)] \to 0$ e também $p_{2,j}[(-2\pi i)^k M^k\varphi_n)] \to 0$. Logo, pelos cômputos acima segue

$$p_{j,k}(\widehat{\varphi_n}) \to 0 \clubsuit$$

Dizemos que a derivação D, a multiplicação M e a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ são operadores lineares contínuos em $\mathcal{S}$.

Corolári 7.2. *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

é bijetora e bicontínua.

Prova.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

7.2 Distribuições Temperadas: $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

7.3 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

7.4 A Identidade $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Não há ambiguidade entre a definição de transformada de Fourier para funções absolutamente integráveis e a definição de transformada de Fourier para distribuições temperadas.

Sejam

$$\begin{cases} R^1 = R^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ com } \ f \text{ absolutamente integrável (impropriamente)}\} \\ \text{e} \\ C_0 = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ com } f \text{ contínua e tendendo a } 0 \text{ no infinito}\}. \end{cases}$$

Proposição. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e*

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi t} f(t)dt.$$

Então, temos

$$\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}.$$

Isto é, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} R^1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr] & \mathcal{S}' \arrow[d, "\mathcal{F}"'] \\ C_0 \arrow[r, "T"'] & \mathcal{S}'. \end{tikzcd}$$

Prova.

Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Por definição da transformada de Fourier em $\mathcal{S}'$ e de T_f, segue

$$\left\langle \widehat{T_f}, \varphi \right\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle = \int f(\tau)\widehat{\varphi}(\tau)d\tau.$$

Pelo teorema de similaridade (ou multiplicação) [3.21] e as hipóteses segue

$$\int f(\tau)\widehat{\varphi}(\tau)d\tau = \int \widehat{f}(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \left\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \right\rangle \clubsuit$$

7.5 A Transformada de Fourier $\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\tau}\right)$

Lema 7.21. *A função* $\ln|x|$ *é absolutamente integrável no sentido impróprio no intervalo* $[-1,1]$. *Ainda mais, vale a desigualdade*

$$|\ln(x^2+\epsilon^2)| \le 1 + x^2 + 2\big|\ln|x|\big|, \text{ para quaisquer } \epsilon \text{ em } [0,1] \text{ e } x \neq 0.$$

Prova.

- Com a troca de variável $x = e^{-y}$ temos
$$\int_{-1}^{1} |\ln|x||dx = -2\int_0^1 \ln x dx = -2\int_{+\infty}^{0} (-y)(-e^{-y})dy = 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy < \infty.$$

- Suponhamos $0 < x^2+\epsilon^2 < 1$. A função $\ln(\cdot)$ é estritamente crescente e então
$$|\ln(x^2+\epsilon^2)| = -\ln(x^2+\epsilon^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2+\epsilon^2}\right) < \ln\frac{1}{x^2} = 2|\ln|x||.$$

  Suponhamos $x^2+\epsilon^2 \ge 1$. É claro que $\ln t < t$ para todo $t > 0$. Então,
$$|\ln(x^2+\epsilon^2)| = \ln(x^2+\epsilon^2) \le \ln(x^2+1) \le 1 + x^2 \clubsuit$$

Proposição 7.22 Seja $H(t)$ a função de Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \ge 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos que
$$\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Solução.

- É trivial ver que H define uma distribuição temperada (cheque).

- Seja $\epsilon > 0$. Observemos que
$$e^{-\epsilon t} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 1 \text{ e } 0 \le e^{-\epsilon t} \le 1, \text{ para todo } t \ge 0.$$

◇ Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, temos

$$\left\langle \widehat{H}, \varphi \right\rangle = \langle H, \widehat{\varphi} \rangle = \int H(t)\widehat{\varphi}(t)dt = \int_0^\infty \widehat{\varphi}(t)dt.$$

Pelo teorema de continuidade sob o sinal de integração segue (cheque)

$$\left\langle \widehat{H}, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty \widehat{\varphi}(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt. \tag{7.22.1}$$

Pelo teorema de multiplicação (3.21) temos

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt = \int H(t)e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt = \int \mathcal{F}[H(t)e^{-\epsilon t}](\tau)\varphi(\tau)dt.$$

Pela tabela de transformadas (Capítulo 3, seção 3.3) encontramos

$$\mathcal{F}[H(t)e^{-\epsilon t}](\tau) = \frac{1}{2\pi i\tau + \epsilon}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt &= \int \frac{1}{2\pi i\tau + \epsilon}\varphi(\tau)dt = \int \frac{-2\pi i\tau + \epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau \\ &= -\frac{i}{4\pi}\int \frac{8\pi^2\tau}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau + \int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{7.22.2}$$

Analisemos as duas últimas integrais separadamente.

◇ A penúltima integral em (7.22.2). Temos

$$\begin{aligned} \int \frac{8\pi^2\tau}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau &= \int \frac{d}{d\tau}\Big[\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)\Big]\varphi(\tau)d\tau \\ &= \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)\varphi(\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)\varphi'(\tau)d\tau \\ &= -\int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)\varphi'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Claramente $(\epsilon, \tau) \mapsto [\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)]\varphi'(\tau)$ é contínua em $[0, +\infty) \times \{\tau : \tau \neq 0\}$.

Pelo lema 7.21 segue a desigualdade

$$|\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)]\varphi'(\tau)| \leq \Big[1 + 4\pi^2\tau^2 + 2\big|\ln 2\pi|\tau|\big|\Big]|\varphi'(\tau)|,$$

em que a função à direita é integrável em toda a reta. Então, pelo teorema da continuidade sob o sinal de integração segue

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)\varphi'(\tau)d\tau = \int \ln(4\pi^2\tau^2)\varphi'(\tau)d\tau = 2\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau,$$

com todas estas integrais em destaque finitas.

◇ A penúltima integral em (7.22.2). Temos

$$\int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2+\epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int \psi_\epsilon(\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

onde

$$\psi(\tau) = \frac{2}{4\pi^2\tau^2+1}, \qquad \psi_\epsilon(\tau) = \frac{1}{\epsilon}\psi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) = \frac{2\epsilon}{4\pi^2\tau^2+\epsilon^2}$$

$$\text{e} \qquad \int \psi(\tau)d\tau = \frac{\arctan(2\pi\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}{\pi} = 1.$$

Então, pelo Teorema de convergência pontual 5.6, ítens (i) ou (iii), segue

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2+\epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

[Para outra argumentação, vide comentário a esta proposição.]

◇ Resumo parcial. Com as integrais até aqui analisadas e (7.22.2), obtemos

$$(7.22.3) \qquad \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt \xrightarrow{\epsilon\to 0} \frac{i}{2\pi}\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau + \frac{\varphi(0)}{2}.$$

◇ O δ de Dirac já surgiu. A seguir, computamos a integral convergente

$$\begin{aligned}
\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau &= \lim_{a\to 0^+}\int_{-\infty}^{-a}\ln(-2\pi\tau)\varphi'(\tau)d\tau + \lim_{b\to 0^+}\int_b^{+\infty}\ln(2\pi\tau)\varphi'(\tau)d\tau\\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[\ln(-2\pi\tau)\varphi(\tau)\Big|_{-\infty}^{-a} - \int_{-\infty}^{-a}\frac{-2\pi}{-2\pi\tau}\varphi(\tau)d\tau\right]\\
&\quad + \lim_{b\to 0^+}\left[\ln(2\pi\tau)\varphi(\tau)\Big|_b^{+\infty} - \int_b^{+\infty}\frac{2\pi}{2\pi\tau}\varphi(\tau)d\tau\right]\\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[\ln(2\pi a)\varphi(-a) - \int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right]\\
&\quad + \lim_{b\to 0^+}\left[-\ln(2\pi b)\varphi(b) - \int_b^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right].
\end{aligned}$$

Não é possível continuar os cômputos com a e b independentes um do outro.

Consideremos $a = b$. Então segue

$$\begin{aligned}
\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau &= \lim_{a\to 0^+}\left[\ln(2\pi a)\varphi(-a) - \ln(2\pi a)\varphi(a) - \int_{|\tau|\geq a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right]\\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[-2a\ln(2\pi a)\frac{\varphi(a)-\varphi(-a)}{2a} - \int_{|\tau|\geq a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\right].
\end{aligned}$$

É trivial ver que [com a troca $2\pi a = e^{-y}$ no segundo limite abaixo]

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{\varphi(a)-\varphi(-a)}{2a} = \varphi'(0) \quad \text{e} \quad \lim_{a\to 0^+} 2a\ln(2\pi a) = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}(-y)}{\pi} = 0.$$

Donde segue

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -\lim_{a\to 0^+}\int_{|\tau|\geq a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Isto é,

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -VP\int \frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Como **valor principal de Cauchy para distribuição**, escrevemos

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -VP\left(\frac{1}{\tau}\right)(\varphi).$$

Substituindo tal fórmula em (7.22.3) encontramos

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t}\widehat{\varphi}(t)dt \xrightarrow{\epsilon\to 0} -\frac{i}{2\pi}VP\left(\frac{1}{\tau}\right)(\varphi) + \frac{\delta}{2}(\varphi).$$

Portanto, pela equação (7.22.1) concluímos que

$$\left\langle \widehat{H},\varphi\right\rangle = -\frac{i}{2\pi}VP\left(\frac{1}{\tau}\right)(\varphi) + \frac{\delta}{2}(\varphi).$$

Isto é,

$$\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i}VP\left(\frac{1}{\tau}\right) \clubsuit$$

Comentário. O limite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2+\epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau$$

também pode ser analisada integrando por partes. Notemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2+\epsilon^2}\varphi(\tau)d\tau &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\left[\arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\right]}{d\tau}\varphi(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi(\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi'(\tau)d\tau\right]\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int \arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi'(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Polo teorema da continuidade sob o sinal de integral segue (cheque)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi'(\tau)d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\varphi'(\tau)d\tau = -\frac{\varphi(0)}{4}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi'(\tau)d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}\varphi'(\tau)d\tau = -\frac{\varphi(0)}{4}.$$

Por fim, encontramos

$$-\frac{1}{2\pi}\int \arctan\left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon}\right)\varphi'(\tau)d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{4}\int \operatorname{sgn}(\tau)\varphi'(\tau)d\tau = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

7.6 A Transformada de Fourier do Seno Cardinal (revisitada).

Seja
$$f(t) = \operatorname{sinc}(\pi t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$
No Exemplo 3.4 vimos que a transformada de Fourier da função retangular é

$$\widehat{\Pi}\,(\xi) = \operatorname{sinc}(\pi\xi) = f(\xi).$$

No capítulo 4, seção 4.2 mostramos (como valor principal) a identidade

$$\mathcal{F}\left[\operatorname{sinc}(\pi t)\right](\xi) = \begin{cases} \Pi(\xi), & \text{se } \xi \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mostremos que tal transformada de Fourier coincide com a função retangular Π no sentido de distribuições.

Seja φ no espaço de Schwartz. No sentido de distribuições temos

$$\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \,\widehat{\Pi}\,, \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}} \right\rangle.$$

A mudança de variável $t \mapsto -t$ mostra que (cheque, desenvolvendo as integrais)

$$\left\langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}} \right\rangle = \left\langle \Pi^{-}, \widehat{\widehat{\varphi}}^{-} \right\rangle.$$

A função Π é par e satisfaz $\Pi^{-} = \Pi$. Logo,

$$\left\langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}} \right\rangle = \left\langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}}^{-} \right\rangle.$$

Substituindo tal identidade na definição de $\widehat{f}$ chegamos a

$$\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \left\langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}}^{-} \right\rangle.$$

A fórmula de inversão (Corolário 3.26) garante $\widehat{\widehat{\varphi}}^{-} = \varphi$. Obtemos então

$$\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \left\langle \Pi, \varphi \right\rangle.$$

Isto é,
$$\widehat{f} = \Pi \clubsuit$$

7.7 As fórmulas $\widehat{e^{2\pi i a t}} = \delta(t-a)$, $\widehat{1} = \delta$ (revisitada) e $\widehat{\delta} = 1$.

Sejam a um ponto na reta, φ no espaço de Schwartz e t a variável na reta. Então,

$$\left\langle \mathcal{F}[e^{2\pi i a t}], \varphi \right\rangle = \int e^{2\pi i a \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Pela propriedade translação-modulação segue

$$e^{2\pi i a \xi} \widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi).$$

Logo,

$$\left\langle \mathcal{F}[e^{2\pi i a t}], \varphi \right\rangle = \int \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi) d\xi.$$

Pela propriedade de integração (Corolário 3.23) segue

$$\int \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi) d\xi = \varphi(0+a) = \varphi(a).$$

Logo,

$$\left\langle \mathcal{F}[e^{2\pi i a t}], \varphi \right\rangle = \varphi(a).$$

Por outro lado (convença-se com a notação integral para distribuições),

$$\langle \delta(t-a), \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(t+a) \rangle = \varphi(0+a) = \varphi(a).$$

Logo,

$$\left\langle \mathcal{F}[e^{2\pi i a t}], \varphi \right\rangle = \langle \delta(t-a), \varphi \rangle \quad \text{e então} \quad \boxed{\mathcal{F}[e^{2\pi i a t}] = \delta(t-a)}.$$

Em particular, no ponto $a = 0$ temos [reveja Capítulo 4, seção 4.4]

$$\boxed{\widehat{1} = \delta}.$$

Por fim, temos

$$\left\langle \widehat{\delta}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int e^{-2\pi i 0 t} \varphi(t) dt = \int \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Logo,

$$\boxed{\widehat{\delta} = 1}.$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999
5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

$\varnothing$

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/~oliveira