

TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 7 - Transformadas em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

Capítulo 1 - Algumas Motivações e Interpretações.

1.1 Sinal e Séries de Fourier.....	2
1.2 Período $T \neq 1$	9
1.3 Energia de um Sinal e Energia Espectral.....	10
1.4 Planetas, Hiparcus-Ptolomeu e a Transformada de Fourier.....	17
1.5 Transformada de Fourier.....	17

Capítulo 2 - Ferramentas.

2.1 Integral de Riemann (Caracterização).....	20
2.2 Integral de Riemann X Integral de Lebesgue.....	20
2.3 Números Complexos.....	20
2.4 Séries e Somas Não Ordenadas.....	9
2.5 Exponencial Complexa.....	10
2.6 Segundo TVM para Integrais. Função Teste. O δ de Dirac.....	30
2.7 Teorema de Fubini (em retângulos).....	10
2.8 Continuidade Uniforme. Sequências e Séries de Funções (e de Potências).....	10
2.9 Integral Imprópria na Reta.....	30
2.10 Integral Imprópria no Plano e Respectivos Tonelli e Fubini.....	30
2.11 A integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$	30
2.12 Continuidade e Derivação sob o Signo de Integral.....	30
2.13 Integral sobre Curvas em \mathbb{C}	30
2.14 Índice de uma Curva.....	30
2.15 Método das Frações Parciais em \mathbb{C} , para Quociente de Analíticas.....	30
2.16 A Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left \frac{\sin t}{t} \right dt = \infty$ e a Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$	30

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

3.1	Introdução.....	20
3.2	Definições e Propriedades Básicas.....	10
3.3	Exemplos de Transformadas de Fourier.....	10
3.4	O Lema de Riemann-Lebesgue.....	10
3.5	Decaimento x Suavidade.....	10
3.6	Gaussianas e Aproximação.....	10
3.7	A Transformada de Fourier Inversa.....	10
3.8	Fórmulas de Parseval e Plancherel.....	10
3.9	Fórmula para a Soma de Poisson.....	10
3.10	Teorema de Paley-Wiener.....	10

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

4.1	Introdução.....	10
4.2	A Transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right](\xi) = \Pi(\xi)$	20
4.3	A Fórmula de Inversão de Fourier Revisitada.....	10
4.4	A Identidade $\widehat{1} = \delta$	10
4.5	A Função de Heaviside $H(t)$	10

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

5.1	Convolução.....	20
5.2	Aproximação da Identidade.....	10

Capítulo 6 - Funções Testes e o Espaço das Distribuições.

6.1 Funções Testes.....	20
6.2 Distribuições.....	10
6.3 Derivação, Translação, Dilatação e Multiplicação por Funções	10
6.4 A Derivada $H' = \delta$ e Derivada de Função X Derivada de Distribuição.....	10
6.5 Convergência.....	10
6.6 Convolução e Aproximação.....	10
6.7 Propriedades da Convolução.....	10
6.8 Caracterização da Continuidade de uma Distribuição.....	10

Capítulo 7 - Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas.

7.1 Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	20
7.2 Distribuições Temperadas: $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	10
7.3 Transformadas de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	10
7.4 A Identidade $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$	10
7.5 A Transformada de Fourier $\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\xi}\right)$	10
7.6 A Transformada de Fourier do Seno Cardinal (revisitada).....	10
7.7 As fórmulas $\widehat{e^{2\pi i a t}} = \delta(t-a)$, $\widehat{1} = \delta$ (revisitada) e $\widehat{\delta} = 1$	10

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Capítulo 7 - Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e Distribuições Temperadas.

7.1 Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Também indicamos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, brevemente, por \mathcal{S} .

Definição. Seja (φ_n) uma sequência de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dizemos que φ_n converge a φ , se $j \rightarrow \infty$, se

$$x^j \varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{\text{uniformemente}} x^j \varphi^{(k)}(x) \text{ se } n \rightarrow \infty, \text{ para quaisquer } j \text{ e } k.$$

Notação:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \text{ se } n \rightarrow \infty \text{ ou, brevemente, } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi.$$

Dada φ em \mathcal{S} e dados j e k , ambos naturais, seja

$$p_{j,k}(\varphi) = \|x^j \varphi^{(k)}\|_\infty = \sup \{|x^j \varphi^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Cada função

$$p_{j,k} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$$

é uma semi-norma (cheque).

Sejam (φ_n) em \mathcal{S} e φ em \mathcal{S} . Seja j e k dois números naturais arbitrários e fixados. São então equivalentes as afirmações abaixo.

- (1) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ se $n \rightarrow \infty$.
- (2) $x^j \varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{\text{uniformemente}} x^j \varphi^{(k)}(x)$ se $n \rightarrow \infty$.
- (3) $p_{j,k}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

A afirmação (3) revela que a convergência em \mathcal{S} é determinada pela família (enumerável ou contável) de semi-normas $\{p_{j,k} : j \text{ e } k \text{ são naturais}\}$.

Teorema 7.1. Suponha que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Seja x a variável espacial na reta. Então

- (a) $D\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, onde D é o operador derivação na variável x .
- (b) $M\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, com M o operador multiplicação por x [i.e., $M(\varphi)(x) = x\varphi(x)$].
- (c) $\widehat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$.

Prova.

(a) Segue de

$$p_{j,k}(\varphi') = p_{j,k+1}(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

(b) Segue da identidade $D^k[x\varphi(x)] = kD^{k-1}\varphi + xD^k\varphi$ e então de

$$p_{j,k}(x\varphi) \leq kp_{j,k-1}(\varphi) + p_{j+1,k}(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

(c) Sejam j e k dois números naturais e φ em \mathcal{S} . Então temos

$$\xi^j \left(\frac{d}{d\xi} \right)^k \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{(-2\pi i)^k}{(2\pi i)^j} \mathcal{F} \left\{ \frac{d^j}{dx^j} [x^k \varphi(x)] \right\}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} p_{j,k}(\widehat{\varphi}) &\leq \frac{\|D^j [x^k \varphi(x)]\|_1}{(2\pi)^{j-k}} \\ &\leq \frac{\left\| \frac{1}{1+x^2} \right\|_1 \|(1+x^2)D^j [x^k \varphi(x)]\|_\infty}{(2\pi)^{j-k}} \\ &\leq \pi \frac{p_{0,j}(M^k \varphi) + p_{2,j}(M^k \varphi)}{(2\pi)^{j-k}}. \end{aligned}$$

Por (b) temos que $M^k \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ se $n \rightarrow \infty$. Portanto, $p_{0,j}[(-2\pi i)^k M^k \varphi_n] \rightarrow 0$ e também $p_{2,j}[(-2\pi i)^k M^k \varphi_n] \rightarrow 0$. Logo, pelos cálculos acima segue

$$p_{j,k}(\widehat{\varphi_n}) \rightarrow 0 \clubsuit$$

Dizemos que a derivação D , a multiplicação M e a transformada de Fourier \mathcal{F} são operadores lineares contínuos em \mathcal{S} .

Corolário 7.2. *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

é bijetora e bicontínua.

Prova.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

7.2 Distribuições Temperadas: $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

7.3 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

7.4 A Identidade $\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$.

Não há ambiguidade entre a definição de transformada de Fourier para funções absolutamente integráveis e a definição de transformada de Fourier para distribuições temperadas.

Sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} R^1 = R^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ com } f \text{ absolutamente integrável (impropriamente)}\} \\ \text{e} \\ C_0 = C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ com } f \text{ contínua e tendendo a } 0 \text{ no infinito}\}. \end{array} \right.$$

Proposição. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integrável e*

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt.$$

Então, temos

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}.$$

Isto é, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} R^1 & \xrightarrow{T} & \mathcal{S}' \\ \mathcal{F} \downarrow & \searrow & \mathcal{F} \downarrow \\ C_0 & \xrightarrow{T} & \mathcal{S}' \end{array}$$

Prova.

Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Por definição da transformada de Fourier em \mathcal{S}' e de T_f , segue

$$\langle \widehat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle = \int f(\tau) \widehat{\varphi}(\tau) d\tau.$$

Pelo teorema de similaridade (ou multiplicação) [3.21] e as hipóteses segue

$$\int f(\tau) \widehat{\varphi}(\tau) d\tau = \int \widehat{f}(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle \clubsuit$$

7.5 A Transformada de Fourier $\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\tau}\right)$

Lema 7.21. A função $\ln|x|$ é absolutamente integrável no sentido impróprio no intervalo $[-1, 1]$. Ainda mais, vale a desigualdade

$$|\ln(x^2 + \epsilon^2)| \leq 1 + x^2 + 2|\ln|x||, \text{ para quaisquer } \epsilon \text{ em } [0, 1] \text{ e } x \neq 0.$$

Prova.

◇ Com a troca de variável $x = e^{-y}$ temos

$$\int_{-1}^1 |\ln|x|| dx = -2 \int_0^1 \ln x dx = -2 \int_{+\infty}^0 (-y)(-e^{-y}) dy = 2 \int_0^{+\infty} ye^{-y} dy < \infty.$$

◇ Suponhamos $0 < x^2 + \epsilon^2 < 1$. A função $\ln(\cdot)$ é estritamente crescente e então

$$|\ln(x^2 + \epsilon^2)| = -\ln(x^2 + \epsilon^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + \epsilon^2}\right) < \ln\frac{1}{x^2} = 2|\ln|x||.$$

Suponhamos $x^2 + \epsilon^2 \geq 1$. É claro que $\ln t < t$ para todo $t > 0$. Então,

$$|\ln(x^2 + \epsilon^2)| = \ln(x^2 + \epsilon^2) \leq \ln(x^2 + 1) \leq 1 + x^2 \clubsuit$$

Proposição 7.22 Seja $H(t)$ a função de Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos que

$$\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} PV\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Solução.

◇ É trivial ver que H define uma distribuição temperada (cheque).

◇ Seja $\epsilon > 0$. Observemos que

$$e^{-\epsilon t} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1 \text{ e } 0 \leq e^{-\epsilon t} \leq 1, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

◊ Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, temos

$$\langle \widehat{H}, \varphi \rangle = \langle H, \widehat{\varphi} \rangle = \int H(t)\widehat{\varphi}(t)dt = \int_0^\infty \widehat{\varphi}(t)dt.$$

Pelo teorema de continuidade sob o sinal de integração segue (cheque)

$$(7.22.1) \quad \langle \widehat{H}, \varphi \rangle = \int_0^\infty \widehat{\varphi}(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t)dt.$$

Pelo teorema de multiplicação (3.21) temos

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t)dt = \int H(t)e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t)dt = \int \mathcal{F}[H(t)e^{-\epsilon t}](\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Pela tabela de transformadas (Capítulo 3, seção 3.3) encontramos

$$\mathcal{F}[H(t)e^{-\epsilon t}](\tau) = \frac{1}{2\pi i\tau + \epsilon}.$$

Donde segue

$$(7.22.2) \quad \int_0^\infty e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t)dt = \int \frac{1}{2\pi i\tau + \epsilon} \varphi(\tau)d\tau = \int \frac{-2\pi i\tau + \epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau)d\tau \\ = -\frac{i}{4\pi} \int \frac{8\pi^2\tau}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau)d\tau + \int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau)d\tau.$$

Analisemos as duas últimas integrais separadamente.

◊ A penúltima integral em (7.22.2). Temos

$$\int \frac{8\pi^2\tau}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau)d\tau = \int \frac{d}{d\tau} \left[\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2) \right] \varphi(\tau)d\tau \\ = \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2) \varphi(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2) \varphi'(\tau)d\tau \\ = - \int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2) \varphi'(\tau)d\tau.$$

Claramente $(\epsilon, \tau) \mapsto [\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)]\varphi'(\tau)$ é contínua em $[0, +\infty) \times \{\tau : \tau \neq 0\}$.

Pelo lema 7.21 segue a desigualdade

$$|\ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2)]\varphi'(\tau)| \leq \left[1 + 4\pi^2\tau^2 + 2|\ln 2\pi|\tau| \right] |\varphi'(\tau)|,$$

em que a função à direita é integrável em toda a reta. Então, pelo teorema da continuidade sob o sinal de integração segue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \ln(4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2) \varphi'(\tau)d\tau = \int \ln(4\pi^2\tau^2) \varphi'(\tau)d\tau = 2 \int \ln(2\pi|\tau|) \varphi'(\tau)d\tau,$$

com todas estas integrais em destaque finitas.

◊ A penúltima integral em (7.22.2). Temos

$$\int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int \psi_\epsilon(\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

onde

$$\psi(\tau) = \frac{2}{4\pi^2\tau^2 + 1}, \quad \psi_\epsilon(\tau) = \frac{1}{\epsilon} \psi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) = \frac{2\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2}$$

$$\text{e} \quad \int \psi(\tau) d\tau = \frac{\arctan(2\pi\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}{\pi} = 1.$$

Então, pelo Teorema de convergência pontual 5.6, itens (i) ou (iii), segue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau) d\tau = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

[Para outra argumentação, vide comentário a esta proposição.]

◊ Resumo parcial. Com as integrais até aqui analisadas e (7.22.2), obtemos

$$(7.22.3) \quad \int_0^\infty e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int \ln(2\pi|\tau|) \varphi'(\tau) d\tau + \frac{\varphi(0)}{2}.$$

◊ O δ de Dirac já surgiu. A seguir, computamos a integral convergente

$$\begin{aligned} \int \ln(2\pi|\tau|) \varphi'(\tau) d\tau &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-a} \ln(-2\pi\tau) \varphi'(\tau) d\tau + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^{+\infty} \ln(2\pi\tau) \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\ln(-2\pi\tau) \varphi(\tau) \Big|_{-\infty}^{-a} - \int_{-\infty}^{-a} \frac{-2\pi}{-2\pi\tau} \varphi(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[\ln(2\pi\tau) \varphi(\tau) \Big|_b^{+\infty} - \int_b^{+\infty} \frac{2\pi}{2\pi\tau} \varphi(\tau) d\tau \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\ln(2\pi a) \varphi(-a) - \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right] \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[-\ln(2\pi b) \varphi(b) - \int_b^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Não é possível continuar os cálculos com a e b independentes um do outro.

Consideremos $a = b$. Então segue

$$\begin{aligned} \int \ln(2\pi|\tau|) \varphi'(\tau) d\tau &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\ln(2\pi a) \varphi(-a) - \ln(2\pi a) \varphi(a) - \int_{|\tau| \geq a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-2a \ln(2\pi a) \frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{2a} - \int_{|\tau| \geq a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

É trivial ver que [com a troca $2\pi a = e^{-y}$ no segundo limite abaixo]

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{2a} = \varphi'(0) \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} 2a \ln(2\pi a) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}(-y)}{\pi} = 0.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Donde segue

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{|\tau| \geq a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Isto é,

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -VP \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Como **valor principal de Cauchy para distribuição**, escrevemos

$$\int \ln(2\pi|\tau|)\varphi'(\tau)d\tau = -VP \left(\frac{1}{\tau} \right) (\varphi).$$

Substituindo tal fórmula em (7.22.3) encontramos

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t} \widehat{\varphi}(t) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{i}{2\pi} VP \left(\frac{1}{\tau} \right) (\varphi) + \frac{\delta}{2}(\varphi).$$

Portanto, pela equação (7.22.1) concluímos que

$$\langle \widehat{H}, \varphi \rangle = -\frac{i}{2\pi} VP \left(\frac{1}{\tau} \right) (\varphi) + \frac{\delta}{2}(\varphi).$$

Isto é,

$$\widehat{H} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} VP \left(\frac{1}{\tau} \right) \clubsuit$$

Comentário. O limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau) d\tau$$

também pode ser analisada integrando por partes. Notemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{\epsilon}{4\pi^2\tau^2 + \epsilon^2} \varphi(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d \left[\arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \right]}{d\tau} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi'(\tau) d\tau \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Pelo teorema da continuidade sob o sinal de integral segue (cheque)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi'(\tau) d\tau \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \varphi'(\tau) d\tau = -\frac{\varphi(0)}{4}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi'(\tau) d\tau \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 \varphi'(\tau) d\tau = -\frac{\varphi(0)}{4}.$$

Por fim, encontramos

$$-\frac{1}{2\pi} \int \arctan \left(\frac{2\pi\tau}{\epsilon} \right) \varphi'(\tau) d\tau \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4} \int \operatorname{sgn}(\tau) \varphi'(\tau) d\tau = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

7.6 A Transformada de Fourier do Seno Cardinal (revisitada).

Seja

$$f(t) = \text{sinc}(\pi t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

No Exemplo 3.4 vimos que a transformada de Fourier da função retangular é

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \text{sinc}(\pi\xi) = f(\xi).$$

No capítulo 4, seção 4.2 mostramos (como valor principal) a identidade

$$\mathcal{F}[\text{sinc}(\pi t)](\xi) = \begin{cases} \Pi(\xi), & \text{se } \xi \neq \pm\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mostremos que tal transformada de Fourier coincide com a função retangular Π no sentido de distribuições.

Seja φ no espaço de Schwartz. No sentido de distribuições temos

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{\Pi}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \Pi, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle.$$

A mudança de variável $t \mapsto -t$ mostra que (cheque, desenvolvendo as integrais)

$$\langle \Pi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \Pi^-, \widehat{\varphi}^- \rangle.$$

A função Π é par e satisfaz $\Pi^- = \Pi$. Logo,

$$\langle \Pi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \Pi, \widehat{\varphi}^- \rangle.$$

Substituindo tal identidade na definição de \widehat{f} chegamos a

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle \Pi, \widehat{\varphi}^- \rangle.$$

A fórmula de inversão (Corolário 3.26) garante $\widehat{\widehat{\varphi}^-} = \varphi$. Obtemos então

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle \Pi, \varphi \rangle.$$

Isto é,

$$\widehat{f} = \Pi \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

7.7 As fórmulas $\widehat{e^{2\pi iat}} = \delta(t-a)$, $\widehat{1} = \delta$ (revisitada) e $\widehat{\delta} = 1$.

Sejam a um ponto na reta, φ no espaço de Schwartz e t a variável na reta. Então,

$$\langle \mathcal{F}[e^{2\pi iat}], \varphi \rangle = \int e^{2\pi ia\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Pela propriedade translação-modulação segue

$$e^{2\pi ia\xi} \widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi).$$

Logo,

$$\langle \mathcal{F}[e^{2\pi iat}], \varphi \rangle = \int \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi) d\xi.$$

Pela propriedade de integração (Corolário 3.23) segue

$$\int \mathcal{F}[\varphi(t+a)](\xi) d\xi = \varphi(0+a) = \varphi(a).$$

Logo,

$$\langle \mathcal{F}[e^{2\pi iat}], \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Por outro lado (convença-se com a notação integral para distribuições),

$$\langle \delta(t-a), \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(t+a) \rangle = \varphi(0+a) = \varphi(a).$$

Logo,

$$\langle \mathcal{F}[e^{2\pi iat}], \varphi \rangle = \langle \delta(t-a), \varphi \rangle \quad \text{e então} \quad \boxed{\mathcal{F}[e^{2\pi iat}] = \delta(t-a)}.$$

Em particular, no ponto $a = 0$ temos [reveja Capítulo 4, seção 4.4]

$$\boxed{\widehat{1} = \delta}.$$

Por fim, temos

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int e^{-2\pi i0t} \varphi(t) dt = \int \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Logo,

$$\boxed{\widehat{\delta} = 1}.$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999
5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

∅

Departamento de Matemática

Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>