TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 5 - Convolução e Aproximação)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade

5.1 Convolução

Na seção 3.6 *Aproximação por Gaussianas*, já utilizamos um caso particular e simples de produto de convolução. Veremos agora casos mais gerais. Analogamente ao que foi comentado na seção 3.6, uma interpretação para o produto de convolução deriva do segundo TVM para integrais (vide Capítulo 2 - Ferramentas). Dadas duas funções f e g, onde supomos $g \geq 0$ e a integral de g estritamente positiva, o segundo TVM para integrais diz que sob certas hipóteses temos

$$\frac{\int f(t)g(t)dt}{\int g(t)dt} = f(t_0), \text{ para algum } t_0.$$

Então, o quociente de integrais acima pode ser interpretado como a **média ponderada** de f pelo peso g. Consideremos então uma família de funções pesos (g_ϵ) e com a integral de cada peso valendo 1. Suponhamos ainda que conforme $\epsilon \to 0$ então os pesos g_ϵ "se concentram mais e mais" em torno da origem. [Por exemplo, suponhamos que g_ϵ tende ao δ de Dirac.] Então, devemos esperar que

$$\int f(t)g_\epsilon(t)dt \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0).$$

Desta forma, devemos também esperar que

$$\int f(\tau - t)g_\epsilon(t)dt \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(\tau).$$

É esta última integral que inspira o **produto de convolução**.

Uma outra característica do produto de convolução é que $f * g$ **suaviza** f e também g. Ainda mais, $f * g$ herda as propriedades de suavidade de g e de f. Por exemplo, se g é derivável então $f * g$ é derivável [e satisfaz $D(f * g) = f * Dg$].

Definição. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. O produto de convolução de f por g, nesta ordem, no ponto τ é dado por (se a integral existe)

$$(f * g)(\tau) = \int f(\tau - t)g(t)dt.$$

O nome "convolução" reflete que a operação $*$ de certa forma "mistura" ou "envolve" ou "entrelaça" as funções f e g, como as figuras abaixo bem ilustram. O adjetivo "produto" se justifica devido a semelhanças com o produto convencional.

É trivial ver que o produto de convolução é **comutativo** (analogamente ao produto usual) nos pontos em que ele existe. Com a mudança $s = \tau - t$, temos

$$(f * g)(\tau) = \int f(\tau - t)g(t)dt = \int f(s)g(\tau - s)ds = (g * f)(\tau).$$

O **suporte** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é o conjunto

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad [\text{o menor fechado contendo } \{x : f(x) \neq 0\}].$$

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que $f * g$ existe. É simples ver que (cheque)

$$\boxed{\mathrm{supp}(f * g) \subset \ \mathrm{supp(f)} + \mathrm{supp(g)}.}$$

Exemplo 5.1. Computemos o produto de convolução

$$(f * g)(x) = \int f(u)g(x - u)du,$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução.

A convolução envolve uma translação e uma reflexão. Para visualiza-la, mantemos estática a função de menor suporte, a função f (coincidentemente a mais simples), e refletimos e "deslizamos" a função g.

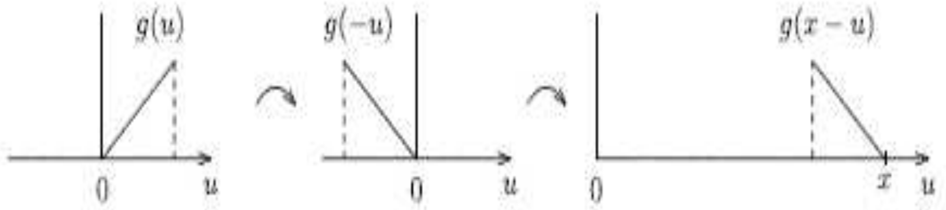

Figura 1: O gráfico de g sob efeito de reflexão e então de translação.

Se o ponto x está distante da origem [i.e., se o suporte da função $u \mapsto g(x-u)$ não intersecta o suporte $[0,1]$ da função f], então temos

$$(f * g)(x) = 0.$$

Assim, movendo x desde $-\infty$ até $+\infty$, só teremos algum trabalho de cálculo nos casos em que os suportes de $u \mapsto g(x - u)$ e $f(u)$ se intersectam.

As figuras a seguir mostram que temos então apenas cinco casos a analisar.

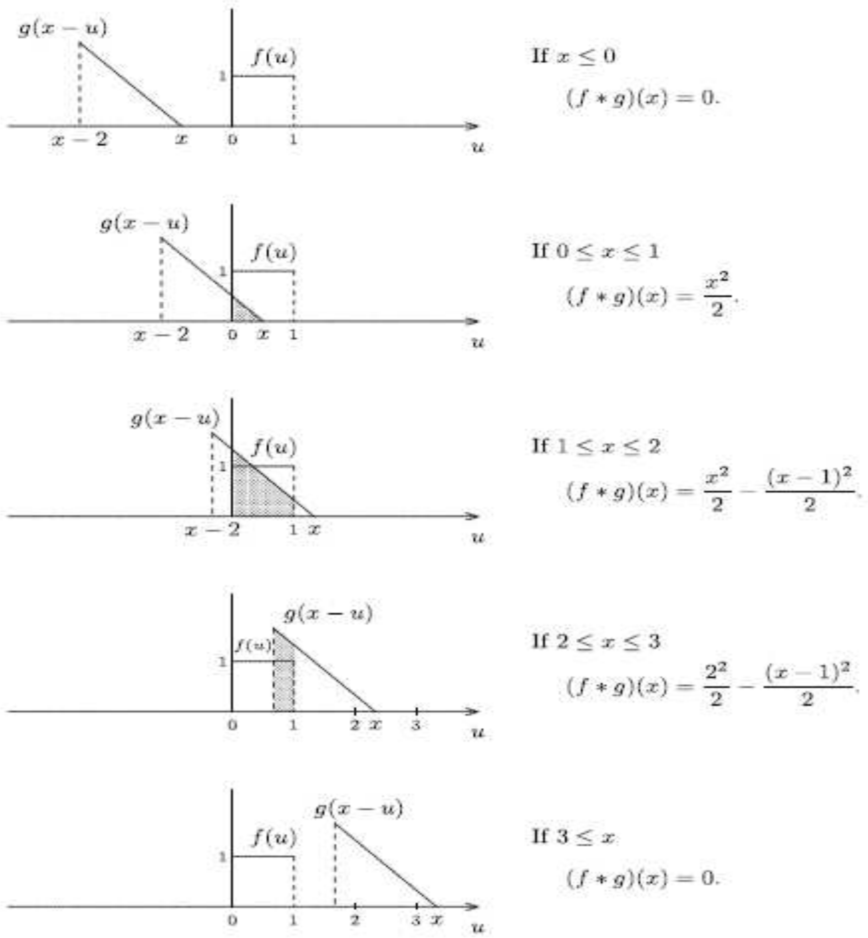

Figura 2: O produto de convolução $(f * g)(x)$ ♣

Existem várias condições que garantem a existência do produto de convolução $f * g$. Um par de condições simples, razoavelmente abrangentes e simétrica é: f e g absolutamente integráveis e limitadas. [Logo mais, veremos outras condições.]

Para ilustrar que $f * g$ suaviza f e g, vejamos que sob as condições acima $f * g$ é uniformemente contínua (e absolutamente integrável).

Lema 5.2 (Bilinearidade/Distributividade). *Sejam f, g e h funções tais que existem os produtos $f * g$ e $h * g$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, existe $(f + \lambda h) * g$ e temos*

$$(f + \lambda h) * g = f * g + \lambda(h * g) \quad e \quad f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Isto é, o produto de convolução é linear na primeira variável e distributivo em relação à soma. Analogamente, quanto à segunda variável.

Prova. Exercício.

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ limitada, definimos a **norma do sup** por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 5.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integráveis. Suponhamos que g é limitada. Então, está bem definida em todo ponto a convolução*

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy,$$

a qual é absolutamente integrável, uniformemente contínua, limitada e satisfaz

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Prova. Em quatro passos.

- Bem definida, limitada e a desigualdade. Fixado x na reta, temos

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \le \|g\|_\infty \int |f(x-y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Donde segue $|f * g(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ (pela desigualdade triangular integral).

- Redução ao caso $f \ge 0$ e $g \ge 0$. No que segue, a bilinearidade do produto de convolução permite decompor f e g em suas partes reais e imaginárias e estas em suas partes positivas e negativas e supor $f \ge 0$ e $g \ge 0$ (cheque).

- Continuidade uniforme. Seja $\epsilon > 0$. O Lema 3.17 garante $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ contínua e de suporte compacto (e uniformemente contínua, cheque), com

$$\|f - p\|_1 < \epsilon.$$

Seja x arbitrário em $\mathbb{R}$. Seja h tal que $|h| < 1$. Temos

$$f*g(x+h)-f*g(x) = p*g(x+h)-p*g(x)+[(f-p)*g(x+h)-(f-p)*g(x)].$$

Seja $M > 0$ um majorante da função $g = |g|$. Pelo primeiro passo segue

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \le |p * g(x+h) - p * g(x)| + 2\epsilon M.$$

A continuidade uniforme de p garante um $\delta > 0$ para o qual temos

$$|p(t+h) - p(t)| < \epsilon, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R} \text{ e } |h| < \delta.$$

Então, para todo $|h| < \delta$ segue

$$|p * g(x+h) - p * g(x)| = \left| \int [p(x+h-y) - p(x-y)]g(y)dy \right| \le \epsilon \|g\|_1$$

A continuidade uniforme de $f * g$ segue de

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \le \epsilon \|g\|_1 + 2\epsilon M, \text{ para quaisquer } x \text{ e } |h| < \delta.$$

◇ Integrabilidade absoluta. Adaptemos a prova da continuidade para a função produto usual $(x,y) \mapsto xy$ de números reai. O Lema 3.17 garante existirem p_n e q_n, funções contínuas de suporte compacto tais que

$$0 \leq p_n \leq f \quad \text{e} \quad 0 \leq q_n \leq g, \quad \text{satisfazendo}$$

$$\|f - p_n\|_1 \leq \frac{1}{n(1+\|g\|_\infty)} \quad \text{e} \quad \|g - q_n\|_1 \leq \frac{1}{n(1+\|p_n\|_\infty)}.$$

[Note que q_n depende de p_n.] Pelo primeiro passo segue

$$\|f * g - p_n * q_n\|_\infty \leq \|f - p_n\|_1\|g\|_\infty + \|p_n\|_\infty\|g - q_n\|_1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$p_n * q_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} f * g.$$

Fixemos $r > 0$. Segue

$$(5.3.1) \qquad \int_{-r}^{r} p_n * q_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-r}^{r} f * g(x)dx.$$

O suporte de $p_n * q_n$ está contido em um quadrado [o qual depende de n]. O teorema de Fubini para contínuas garante os cômputos [exceto quando indicados, é supérfluo indicar os limites de integração nas integrais abaixo]

$$\int_{-r}^{r} p_n * q_n(x)dx \leq \int\int p_n(x-y)q_n(y)dydx = \int\int p_n(x-y)q_n(y)dxdy$$

$$= \left(\int p_n(x)dx\right)\left(\int q_n(y)dy\right) \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Esta última desigualdade vale para todo n . Por (5.3.1) segue

$$\int_{-r}^{r} f * g(x)dx \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Logo, por definição, a convolução $f * g$ é (absolutamente) integrável e

$$\int f * g(x)dx \leq \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(y)dy\right) \clubsuit$$

Esta última desigualdade é útil para provar o importante corolário que segue.

Comentário. A hipótese "f ou g limitada" é essencial, ao usarmos a integral de Riemann. Vide *Fourier Analysis*, T. W. Körner, Appendix C, pp. 570-572.

Corolário 5.4. *Sejam f e g como nas hipóteses do teorema e $\xi \in \mathbb{R}$. Então segue*

(a) $$\int (f * g)(x)dx = \Big(\int f(x)dx\Big)\Big(\int g(y)dy\Big).$$

(b) $$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(c) $$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \quad \textbf{[Teorema da Convolução]}.$$

Prova. Para (a) e (c), sigamos a notação na prova do teorema.

(a) Podemos supor $f \ge 0$ e $g \ge 0$ (cheque). Evidentemente temos
$$\int f * g(x)dx \ge \int p_n * q_n(x)dx = \Big(\int p_n(x)dx\Big)\Big(\int q_n(y)dy\Big), \text{ para todo } n.$$
Impondo $n \to \infty$ segue [usando que $\|f - p_n\|_1$ e $\|g - q_n\|_1$ tendem a zero]
$$\int f * g(x)dx \ge \Big(\int f(x)dx\Big)\Big(\int g(y)dy\Big).$$
A desigualdade contrária já foi mostrada ao final da prova do teorema.

(b) Pela desigualdade triangular para integrais obtemos $\|f * g\|_1 \le \|\,|f| * |g|\,\|_1$. Pelo item (a) segue $\|\,|f| * |g|\,\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$.

(c) Podemos supor $f \ge 0$ e $g \ge 0$ (cheque). Inicialmente, vejamos que a fórmula é válida para p_n e q_n. O teorema de Fubini para contínuas garante
$$\begin{aligned}\widehat{p_n * q_n}(\xi) &= \int e^{-2\pi i \xi x}(p_n * q_n)(x)dx = \int\int e^{-2\pi i \xi x} p_n(x-y)q_n(y)dydx \\ &= \int\int e^{-2\pi i \xi x} p_n(x-y)q_n(y)dxdy = \int\int e^{-2\pi i \xi (t+y)} p_n(t)q_n(y)dtdy \\ &= \int e^{-2\pi i \xi y} q_n(y) \int e^{-2\pi i \xi t} p_n(t)dtdy \\ &= \widehat{p_n}(\xi)\widehat{q_n}(\xi).\end{aligned}$$
A seguir, utilizemos a trivial desigualdade $|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$. Encontramos $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{p_n}(\xi)| = |\widehat{f - p_n}(\xi)| \le \|f - p_n\|_1$. Analogamente para g e q_n. Logo,
$$\widehat{p_n}(\xi) \longrightarrow \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{q_n}(\xi) \longrightarrow \widehat{g}(\xi) \quad \text{e} \quad \widehat{p_n * q_n}(\xi) \longrightarrow \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$
Para finalizar, notemos que [utilizando $\|p_n\| \le \|f\|_1$ na segunda desigualdade]
$$\begin{aligned}|\widehat{f * g}(\xi) - \widehat{p_n * q_n}(\xi)| &\le \|f * g - p_n * g_n\|_1 \\ &\le \|f - p_n\|_1\|g\|_1 + \|f\|_1\|g - q_n\|_1.\end{aligned}$$
Donde segue que $\widehat{p_n * q_n}(\xi) \to \widehat{f * g}(\xi)$ e $\widehat{p_n * q_n}(\xi) \to \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ ♣

Comentários.

◇ Parte da importância do produto de convolução para o cálculo de médias ponderadas e também em teoria da probabilidade pode ser antecipada com a seguinte observação. Suponhamos $f \geq 0$ e $g \geq 0$, ambas satisfazendo

$$\int f(x)dx = 1 \quad \text{e} \quad \int g(y)dy = 1.$$

Então, é claro que temos $f * g \geq 0$ e, pelo Corolário 4.5 (a) temos

$$\int f * g(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(y)dy\right) = 1.$$

Funções positivas e com integral valendo 1 são importantes em vários ramos da Matemática. Em teoria da probabilidade, são ditas distribuições de probabilidade.

◇ Dadas f e $g \geq 0$, com a integral de g valendo 1 e g concentrada perto da origem, então $y \mapsto g(x-y)$ está concentrada perto da origem e a convolução

$$f * g(x) = g * f(x) = \int g(x-y)f(y)dy$$

computa a média ponderada de f em uma vizinhança do ponto x [ponderada pela *refletida e arrastada* g].

◇ Seja $r > 0$. Consideremos a função

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & \text{se } -r \leq y \leq r, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que a integral de g em toda a reta vale 1. Neste caso, temos

$$(f * g)(x) = g * f(x) = \int g(x-y)f(y)dy = \frac{1}{2a}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy$$

que é a tradicional média de f no intervalo $[x-r, x+r]$.

◇ **Associatividade.** Dadas f, g e h absolutamente integráveis e limitadas, temos

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Por favor, cheque.

◇ **O substantivo produto.** Cada um dos três itens do Corolário 5.4 colabora com chamarmos a operação convolução de produto de convolução.

O item (a) estabelece

$$\int (f * g)(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(y)dy\right).$$

Esta propriedade não é válida para o produto usual de funções. Curiosamente, é comum estudantes de Cálculo I ansiarem por uma propriedade deste quilate.

O item (b) estabelece

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$$

e pode ser visto em analogia com propriedades da álgebra das matrizes reais e quadradas $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ [ou da álgebra $M_{n\times n}(\mathbb{C})$]. Dadas duas matrizes quadradas A e B, é conhecida a propriedade

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Obviamente, para a álgebra dos números reais (ou complexos) temos a identidade $|ab| = |a||b|$ com a e b números reais. Entretanto, para outras álgebras pode ser que não tenhamos uma tal identidade. Álgebras com a propriedade *módulo do produto menor ou igual ao produto dos módulos* (além de algumas outras condições) são muito estudadas (uma área de pesquisa). As álgebras com tal propriedade e que são completas (isto é, as sequências de Cauchy são convergentes) são chamadas álgebras de Banach. O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integráveis, munido da operação adição e da operação produto de convolução, forma uma álgebra (comutativa) de Banach.

O item (c) estabelece

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Esta propriedade é decisiva para vermos a convolução como um produto. Pois ela mostra que o produto de convolução corresponde, no domínio-frequência, ao produto usual. Mais especificamente, via transformada de Fourier segue que o produto de convolução corresponde ao produto usual de transformadas de Fourier.

◇ **O elemento neutro no produto de convolução.** Antecipamos aqui (e mostraremos ainda neste capítulo) que existe um objeto g satisfazendo

$$(g * f)(t) = f(t), \quad \text{para toda } f \text{ absolutamente integrável e contínua.}$$

No momento, façamos alguns cálculos ingênuos com tal equação. Computando a transformada de Fourier encontramos

$$\widehat{g}\widehat{f} = \widehat{f}.$$

Donde segue $\widehat{g} = 1$. Então, com a transformada de Fourier inversa obtemos

$$g(t) = \int e^{2\pi i t\xi} d\xi.$$

Ora, tal integral não existe. Logo mais, com distribuições temperadas, daremos um sentido a tal conta.

Vejamos uma outra abordagem. Desejamos validar a equação

$$\int g(t-\xi)f(\xi)d\xi = \int g(\xi)f(t-\xi)d\xi = f(t).$$

Porém, sabemos que dada as gaussianas φ_ϵ [vide capítulo 3] temos

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \varphi_\epsilon(\xi)f(t-\xi)d\xi = f(t-0) = f(t).$$

Donde segue

$$g = \lim \varphi_\epsilon = \delta \qquad [\text{o } \delta \text{ de Dirac}].$$

Com a teoria das distribuições temperadas mostraremos que

$$(\delta * f)(t) = f(t) \ \text{ para toda } f \text{ no espaço de Schwartz.}$$

Com tal fórmula, segue então

$$\widehat{\delta} = 1.$$

◇ **A divisão.** Dadas h e f absolutamente integráveis tais que $h = f * g$ para alguma função desconhecida g , obtemos a equação

$$\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Donde segue

$$\widehat{g} = \frac{\widehat{h}}{\widehat{f}}.$$

Tal quociente tem problemas nas regiões em que $\widehat{f}$ se anula. O cômputo de g é chamado de **deconvolução** e é muito importante em aplicações, na teoria de **filtros** (um tópico pouco abordado nestas notas).

O Teorema 5.3 mostrou que dadas f e g absolutamente integráveis e limitadas, então $f * g$ é mais suave que f e g. De fato, $f * g$ é uniformemente contínua. A seguir, mostremos que $f * g$ herda propriedades de suavidade.

Teorema 5.5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ no espaço de Schwartz. Então, $f * g$ é infinitamente derivável e temos*

$$\frac{d^n}{dt^n}(f * g) = f * \left(\frac{d^n g}{dt^n}\right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prova.

Escrevamos

$$f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$$

e $h(x,y) = g(x-y)f(y)$. Existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$|h(x,y)| + \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| \leq A|f(y)| + B|f(y)|.$$

O teorema da derivação sob o sinal de integração (Capítulo 2, seção 2.10) garante que $f * g$ é derivável e

$$(f * g)'(x) = \int g'(x-y)f(y)dy = \left(f * \frac{dg}{dx}\right)(x).$$

A conclusão segue por indução já que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é fechado por derivação ♣

Comentário.

◇ O resultado acima pode ser facilmente melhorado. Por exemplo, suponhamos que a função f é de classe C^n e que a função g é de classe C^m, com todas as derivadas de f e de g absolutamente integráveis e limitadas. Então, a argumentação na prova do Teorema 5.5 mostra que $f * g$ é de classe C^{n+m} e satisfaz

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(f * g) = \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) * \left(\frac{d^m g}{dx^m}\right).$$

5.2 Aproximação da Identidade

O produto de convolução pode ser utilizado tanto para aproximar pontualmente como em norma (ou em semi-norma). Vejamos dois resultados a respeito.

Definição. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é* contínua por partes *se ela é contínua em todo ponto exceto em um conjunto enumerável X de descontinuidades isoladas, do tipo salto (descontinuidades de primeira espécie). Isto é, para cada ponto (isolado) $x \in X$, existem (como números) os limites laterais à esquerda e à direita, $f(x-)$ e $f(x+)$, e estes satisfazem*

$$f(x-) \neq f(x+), \qquad \textit{onde } f(x\pm) = \lim_{x\to x^{\pm}} f(x).$$

Aproximação da Identidade. Seja $\epsilon > 0$ (em geral $0 < \epsilon < 1$). Dada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável, seja

(5.6.1) $$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Então, φ_ϵ é obtida contraindo o gráfico de φ na direção x pelo fator ϵ ao passo que na direção y estica o gráfico de φ pelo fator $1/\epsilon$. Se o valor da integral de φ é igual a 1, a família de funções $\{\varphi_\epsilon\}$ é dita uma aproximação da identidade.

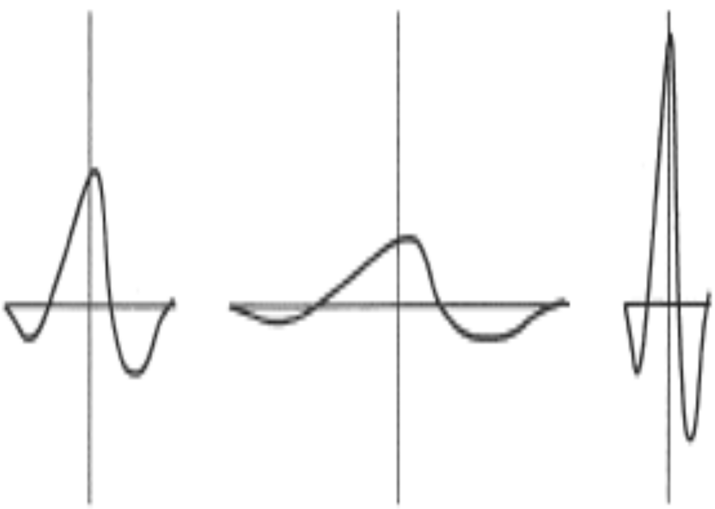

Figura 3: A função φ, a função $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2})$ e a função $\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = 2\varphi(2x)$, com gráficos ordenados da esquerda para a direita.

Vejamos que a área de φ_ϵ independe de ϵ. De fato, temos

$$\int \varphi_\epsilon(x)dx = \int \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \int \frac{1}{\epsilon}\varphi(y)\epsilon dy = \int \varphi(x)dx.$$

Teorema 5.6 (Convergência pontual). *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e tal que*

$$\int \varphi(x)dx = 1.$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua por partes. Suponha que uma das três condições ocorre:

(i) *f limitada,*

(ii) *φ com suporte compacto,*

(iii) *f é absolutamente integrável e $\varphi(x)$ descresce mais rapidamente que $1/(x^2)$ no infinito.*

Seja φ_ϵ como em (5.6.1), acima. Então, as seguintes propriedades são verdadeiras.

(a) *A convolução $f * \varphi_\epsilon$ está bem definida.*

(b) *Seja α o valor da integral de φ sobre $(-\infty, 0]$. Similarmente, seja β o valor da integral de φ sobre $[0, \infty)$. Para todo x na reta, temos*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \varphi_\epsilon(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-) \qquad [\textit{com } \alpha + \beta = 1].$$

(c) *Se f é contínua no ponto x, então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f * \varphi_\epsilon(x) = f(x).$$

(d) *Se f é contínua em um intervalo aberto J, então*

$$f * \varphi_\epsilon \xrightarrow{\textit{uniformemente}} f \textit{ em todo intervalo compacto dentro de } J.$$

Prova. Notemos que f é Riemann-integrável em intervalos limitados.

(a) Se f é limitada, é óbvio que $f * \varphi_\epsilon$ está bem definida. Se φ tem suporte compacto, também é óbvio que $f * \varphi_\epsilon$ está bem definida.

No caso restante, notemos que φ é integrável em intervalos limitados e que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é limitada (cheque). Logo, cada φ_ϵ é limitada. Portanto, como f é absolutamente integrável, segue que $f * \varphi_\epsilon$ está bem definida.

(b) Fixemos um arbitrário x na reta. Escrevamos

$$f * \varphi_\epsilon(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x+)]\varphi_\epsilon(y)dy$$
$$+ \int_{0}^{+\infty} [f(x-y) - f(x-)]\varphi_\epsilon(y)dy.$$

Basta então mostrarmos que as integrais no lado direito tendem 0 se $\epsilon \to 0$. Mostremos que este é o caso para a segunda integral [a análise da primeira integral é redutível à primeira, trocando $f(x)$ por $g(x) = f(-x)$, cheque].

Dado $\delta > 0$, seja $c > 0$ e pequeno o suficiente tal que

$$|f(x-y) - f(x-)| < \delta \text{ se } 0 < y < c.$$

Dividamos a segunda integral nos trechos $[0, c]$ e $[c, \infty)$. No inicial temos

$$\left| \int_0^c [f(x-y) - f(x-)]\varphi_\epsilon(y)dy \right| \leq \delta \int_0^{c/\epsilon} |\varphi(t)|dt \leq \delta \|\varphi\|_1.$$

A análise neste trecho está completa.

Agora, estimemos no trecho $[c, \infty)$. Neste intervalo, há três possibilidades.

- O caso f limitada. Então segue

$$\left| \int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)]\varphi_\epsilon(y)dy \right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{c/\epsilon}^{\infty} |\varphi(y)|dy.$$

  Se $\epsilon \to 0$, o lado direito obviamente tende a 0.

- O caso φ com suporte compacto em $[-R, R]$. Seja ϵ tal que

$$0 < \epsilon < \frac{c}{R}.$$

  Dado $y > c$, temos

$$\frac{y}{\epsilon} > c\frac{R}{c} = R.$$

  Donde segue $\varphi_\epsilon(y) = 0$. Logo,

$$\int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)]\varphi_\epsilon(y)dy = 0.$$

  A conclusão é então óbvia.

$\diamond$ O caso f absolutamente integrável e φ decrescente mais rapidamente que $1/(x^2)$, no infinito. Neste caso segue

$$\left|\int_c^\infty [f(x-y)-f(x-)]\varphi_\epsilon(y)dy\right| \le \int_c^\infty |f(x-y)\varphi_\epsilon(y)|dy$$
$$+|f(x-)|\int_c^\infty |\varphi_\epsilon(y)|dy.$$

Já vimos [caso f limitada] que a última integral tende a 0 se $\epsilon \to 0$. Estimemos a penúltima. Por hipótese, existem $C > 0$ e $m > 0$ tais que

$$|\varphi(t)| \le \frac{C}{|t|^2}, \quad \text{para todo } |t| > m.$$

Para

$$0 < \epsilon < \frac{c}{m} \quad \text{e} \quad y \ge c, \quad \text{temos } \frac{y}{\epsilon} > m.$$

Donde segue

$$\int_c^\infty |f(x-y)\varphi_\epsilon(y)|dy \le \int_c^\infty |f(x-y)|\left(\frac{1}{\epsilon}C\frac{\epsilon^2}{y^2}\right)dy \le \frac{\epsilon C}{c^2}\|f\|_1,$$

que tende a 0 se $\epsilon \to 0$.

A análise no trecho $[c,\infty)$ está completa.

(c) Segue imediatamente de (a).

(d) Seja $[a,b]$ contido em J. Existem a' e b' tais que

$$[a,b] \subset (a',b') \subset [a',b'] \subset J.$$

Devido à continuidade uniforme de f no intervalo $[a',b']$, segue que dado $\delta > 0$ podemos então encontrar um $c > 0$ tal que temos

$$|f(x-y)-f(x)| < \delta \quad \text{para arbitrários } x \in [a,b] \text{ e } 0 \le y < c.$$

Assim, para todo $x \in [a,b]$ segue (analogamente aos cômputos já feitos)

$$|f * \varphi_\epsilon(x) - f(x)| \le \delta \int_{|y|\le c} |\varphi_\epsilon(y)|dy + \int_{|y|\ge c} |f(x-y)-f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dy.$$

A penúltima parcela à direita é majorada por $\delta\|\varphi\|_1$. Pelo provado em (b), a última parcela integral tende a 0 se $\epsilon \to 0$, independentemente de x ♣

Comentários sobre o teorema.

- ⋄ A hipótese sobre o decaimento de $\varphi(x)$ [decaimento mais rápido que $1/(x^2)$] é razoavelmente abrangente. Em muitas situações é utilizada uma função gaussiana, ou uma função no espaço de Schwartz ou mesmo uma função de classe C^∞ e de suporte compacto.

- ⋄ Uma importante função que é utilizada em aproximação da identidade e que tem decaimento exatamente como $1/(x^2)$ é a função

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

  Tal função surge, por exemplo, no estudo de equações diferenciais parciais (problema de Dirichlet no semi-plano).

- ⋄ Claramente, o teorema também vale se $\varphi(x)$ decai mais rapidamente que

$$\frac{1}{|x|^{1+d}}, \text{ com } 0 < d < 1.$$

O conceito abaixo é equivalente a *aproximações da identidade* e é utilizado em muitos textos.

Sequências de Dirac. Dada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável, com o valor da integral de φ igual a 1, a sequência de funções

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx), \text{ onde } x \in \mathbb{R},$$

é dita uma sequência de Dirac. Notemos que

$$\int \varphi_n(x)dx = \int n\varphi(nx)dx = \int \varphi(y)dy = 1.$$

A seguir, vejamos um resultado sobre aproximação em "norma" (no nosso caso, com a integral de Riemann, temos de fato uma semi-norma).

Teorema 5.7 (Convergência na semi-norma $\|.\|_1$). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável. Consideremos uma aproximação da identidade (φ_ϵ), com φ contínua e limitada (e absolutamente integrável). Então,*

$$\|f * \varphi_\epsilon - f\|_1 \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

Prova.

- Questão bem posta. Pelo Teorema 5.3 segue que $f * \varphi_n$ é absolutamente integrável (e uniformemente contínua e limitada).

- Redução. Seja $\delta > 0$. Pelo Lema 3.17 (e seu comentário), existe uma função (poligonal) contínua $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com suporte compacto e tal que

  $$\|f - p\|_1 < \epsilon.$$

  Então, temos

  $$\|f * \varphi_\epsilon - f\|_1 \leq \|p * \varphi_\epsilon - p\|_1 + \|(f - p) * \varphi_\epsilon - (f - p)\|_1.$$

  Logo, pelo Corolário 4.5 (b) segue

  $$\|(f - p) * \varphi_\epsilon - (f - p)\|_1 \leq \delta\|\varphi\|_1 + \delta.$$

  Logo, podemos supor f contínua e de suporte compacto.

- Quatro condições para aplicar o teorema de Fubini. Seja f contínua e de suporte compacto (logo, uniformemente contínua). Temos então

  $$f * \varphi_\epsilon(x) - f(x) = \int [f(x - y) - f(x)]\varphi_\epsilon(y)dy.$$

  Condição 1. É evidente a continuidade no plano da função

  $$(x, y) \mapsto |f(x - y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|.$$

  Condição 2. Seja $M = \|f\|_\infty$. É fácil ver que é contínua a função integral

  $$x \mapsto \int |f(x - y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dy,$$

  pois temos $|f(x - y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)| \leq 2M|\varphi_\epsilon(y)|$ para todo x e $|\varphi_\epsilon(y)|$ é integrável, como pedido no teorema da continuidade sob o sinal de integração.

Condição 3. Verifiquemos a continuidade da função integral

$$y \mapsto \int |f(x-y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dx = |\varphi_\epsilon(y)| \int |f(x-y) - f(x)|dx.$$

Obviamente $|\varphi_\epsilon(y)|$ é contínua. Mostremos que o fator integral restante

$$y \mapsto \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 = \int |f(x-y) - f(x)|dx$$

é contínuo (uniformemente). Seja $r > 0$ tal que

$$\text{supp}(f) \subset [-r, r].$$

Dado um ponto y, é claro que $x \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ tem suporte compacto. Se $|h| < 1$, o suporte de $t \mapsto |f(t-h) - f(t)|$ está contido em $[-r-1, r+1]$

A função f é uniformemente contínua na reta. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que $|f(t-h) - f(t)| \leq \epsilon$ para quaisquer t na reta e $|h| < \delta$.

Seja h tal que $|h| < \delta$. Utilizando a desigualdade numérica $||a| - |b|| \leq |a-b|$ e a mudança de variável $t = x - y$ encerramos tal passo com

$$\begin{aligned}
&\left| \int |f(x-y-h) - f(x)|dx - \int |f(x-y) - f(x)|dx \right| \\
&\qquad\qquad \leq \int \Big| |f(x-y-h) - f(x)| - |f(x-y) - f(x)| \Big| dx \\
&\qquad\qquad \leq \int |f(x-y-h) - f(x-y)|dx \\
&\qquad\qquad = \int |f(t-h) - f(t)|dt \\
&\qquad\qquad = \int_{-r-1}^{r+1} |f(t-h) - f(t)|dt \\
&\qquad\qquad \leq \epsilon 2(r+1).
\end{aligned}$$

Condição 4 (Finitude de uma integral iterada). Com a mudança $y = \epsilon t$ temos

$$\int \int |f(x-y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dxdy = \int |\varphi(t)|\|f(\cdot - \epsilon t) - f(\cdot)\|_1 dt < \infty,$$

pois a função (contínua)

$$\Phi(\epsilon, t) = |\varphi(t)|\|f(\cdot - \epsilon t) - f(\cdot)\|_1 \quad \text{satisfaz} \quad \Phi(\epsilon, t) \leq |\varphi(t)| 2\|f\|_1.$$

◇ Pelo teorema de Fubini (para integrais de funções contínuas no plano) e a prova da Condição 4, segue

$$\begin{aligned}\int |f * \varphi_\epsilon(x) - f(x)|dx &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dydx \\ &= \int \int |f(x-y) - f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dxdy \\ &= \int \Phi(\epsilon, t)dt.\end{aligned}$$

Já vimos que Φ é contínua e satisfaz $|\Phi(\epsilon,t)| \leq |\varphi(t)|2\|f\|_1$ para quaisquer $\epsilon > 0$ e t. Pelo teorema da continuidade sob o sinal de integração segue

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \Phi(\epsilon,t)dt = \int \Phi(0,t)dt = 0 \clubsuit$$

Comentários.

◇ Trocando a hipótese φ *limitada* pela hipótese φ *de suporte compacto*, e mantendo todas as demais hipóteses do Teorema 5.6, evidentemente temos uma versão mais fraca (mas bastante útil) deste teorema. Esta versão admite uma prova razoavelmente fácil (cheque).

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Beerends, R.J. & ter Morsche, H. G. & van den Berg, J. C. & van de Vrie, E. M., *Fourier and Laplace Transform*, Cambridge University Press, 2003.
3. Boggess, A. & Narcowich, F. J., *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, 2nd ed., Wiley, 2009.
4. Folland, G. B. *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1992.
5. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
6. Köerner, T. W. *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
7. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
9. Osgood, B., *The Fourier Transform and its Applications*, Lectures Notes - Electrical Engineering Department - Stanford University - CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. [free PDF on the internet].
10. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
11. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2003.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`