TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 3 - Transformada de Fourier)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

Capítulo 1 - Introdução.

Capítulo 2 - Ferramentas.

Capítulo 3 - Transformada de Fourier.

Capítulo 4 - A Transformada de Fourier Estendida como Valor Principal.

Capítulo 5 - Produto de Convolução e Aproximação da Identidade.

Capítulo 6 - Funções Testes e o Espaço das Distribuições.

Capítulo 7 - Transformadas de Fourier de Distribuições Temperadas.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

CAPÍTULO 3 - TRANSFORMADA DE FOURIER

3.1 Introdução

O estudo um pouco mais aprofundado da transformada de Fourier envolve espaços de funções mais gerais que o espaço das funções infinitamente deriváveis e rapidamente descrescentes no infinito (logo, funções não periódicas com a exceção da função identicamente nula) e também espaços de funções periódicas.

Ainda mais, a teoria da integração de Riemann é uma ferramenta insuficiente (e por vezes inadequada) para analisar muitas das funções, sinais e impulsos que surgem na prática. Para funções (sinais) mais gerais, é mais adequada a **teoria da integral de Lebesgue**. Para impulsos que não são dados por funções, é mais adequada a **teoria das distribuições**. Como outros exemplos de espaços de funções nos quais podemos definir a transformada de Fourier, temos *o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que são localmente Lebesgue integráveis*. Como exemplos de espaços em que podemos definir a transformada de Fourier e também sua transformada inversa, temos o espaço $L^2(\mathbb{R})$ das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que são Lebesgue mensuráveis e com quadrado $|g|^2$ Lebesgue integrável e o espaço $L^2([0,1])$ das funções $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ que são Lebesgue mensuráveis e com quadrado $|h|^2$ Lebesgue integrável.

O avanço direto aos tópicos mais avançados é um pouco mais delicado e embute o risco de deixar pouco claras algumas idéias fundamentais e simples da teoria da transformada de Fourier. Ainda mais, este texto assume apenas e tão somente fatos básicos da teoria da integração de Riemann.

Desta forma, optamos por apresentar resultados da teoria da transformada de Fourier que podem ser obtidos de forma trivial e rápida das teorias da integração própria e da integração imprópria, ambas de Riemann. Focaremos, em especial, a transformada de Fourier no espaço das funções infinitamente deriváveis e rapidamente decrescentes no infinito. Apresentaremos também resultados simples de provar para a transformada de Fourier de funções absolutamente integráveis.

3.2 Definições e Propriedades Básicas

Definições e Notações. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ arbitrária.

- Dizemos que f se **anula no infinito** se $|f(t)| \to 0$ se $|t| \to \infty$. Indicamos

$$C_0(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}.$$

- Se f é Riemann-integrável no sentido impróprio, escrevemos

$$\int f(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$$

  Se f é absolutamente integrável, a **semi-norma** (semi-norma-1) de f é

$$\|f\|_1 = \int |f(t)|dt.$$

  Se f é p-vezes derivável, s sua p-ésima derivada é

$$D^p f = f^{(p)}.$$

- Se f é de classe C^∞ (infinitamente derivável), dizemos que f é rapidamente decrescente se para quaisquer índices n e m, ambos em $\mathbb{N}$, a função

$$t^m f^{(n)}(t) \quad \text{é limitada.}$$

- O espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que são infinitamente deriváveis e rapidamente decrescentes é denominado **espaço de Schwartz** e é denotado

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

- Se f é limitada, a **norma do sup** de f é

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

- O **suporte** de f é

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{t : f(t) \neq 0\}}.$$

  Isto é, $\operatorname{supp}(f)$ é o menor conjunto fechado que contém $\{t : f(t) \neq 0\}$. O espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ e de suporte compacto é

$$C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Exemplos.

- A **função gaussiana** $f(x) = e^{-x^2}$ é infinitamente derivável e rapidamente decrescente e então pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

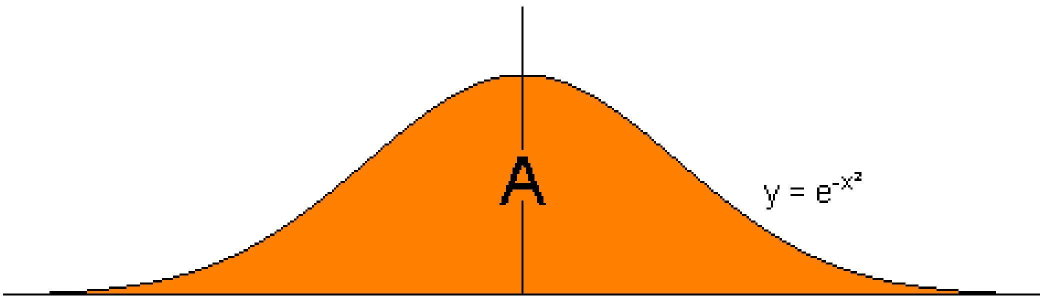

Figura 1: O gráfico da gaussiana e a região entre tal gráfico e o eixo real.

- A função [vide Função Teste em Capítulo 2 - Ferramentas, seção 2.6-B]

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \clubsuit \end{cases}$$

é de classe C^∞ e de suporte compacto e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \ \text{ e } \ \text{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

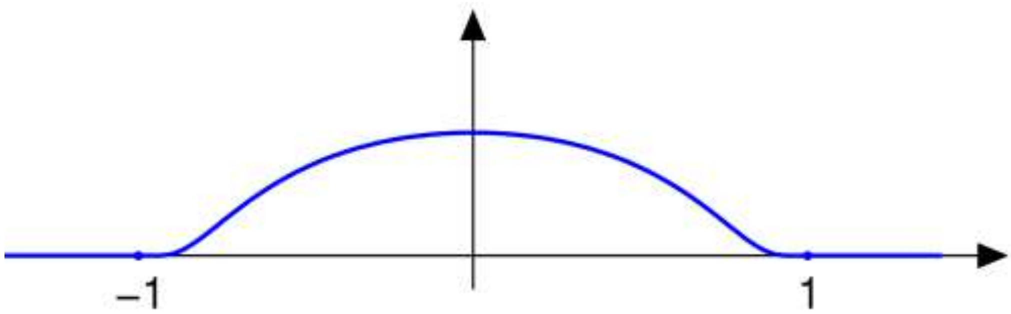

Figura 2: Gráfico da função Φ.

- É óbvio que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Definição. A transformada de Fourier de uma função absolutamente integrável (no sentido impróprio) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.1 (Três Desigualdades). *Sejam θ e ϕ em $\mathbb{R}$. Temos,*

$$\boxed{|\sin\theta| \leq |\theta|}, \quad \boxed{|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|} \quad e \quad \boxed{|e^{i\theta} - e^{i\phi}| \leq |\theta - \phi|.}$$

Prova.

- A primeira é conhecida. Para a segunda temos
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right] = e^{i\frac{\theta}{2}}2i\sin\frac{\theta}{2}.$$
Donde segue, pela primeira, $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$.

- A terceira segue da segunda, pois $e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\phi}\left[e^{i(\theta-\phi)} - 1\right]$ ♣

Proposição 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável. Então,*

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

é uniformemente contínua, limitada e satisfaz

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int |f(t)|dt, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}, \qquad \text{e então} \qquad \|f\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Prova.

- Como temos $|f(t)e^{-2\pi i\xi t}| \leq |f(t)|$ para todo t, segue que $\widehat{f}(\xi)$ está bem definida para toda frequência ξ. As desigualdades anunciadas são triviais.

- Seja $\epsilon > 0$. Como f é absolutamente integrável, então existe $r > 0$ tal que
$$\int_{|t|\geq r} |f(t)|dt \leq \epsilon.$$
Sejam ξ e η, ambos na reta. A desigualdade acima e o Lema 3.1 garantem
$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| &\leq \left|\int_{-r}^{r} f(t)\left[e^{-2\pi i\xi t} - e^{-2\pi i\eta t}\right]dt\right| + \epsilon + \epsilon \\ &\leq (2\pi r\|f\|_1)\,|\xi - \eta| + 2\epsilon.\end{aligned}$$
Tal desigualdade mostra que $\widehat{f}$ é uniformemente contínua (cheque) ♣

Comentário. É então razoável que para computar a tranformada de Fourier inversa de uma g absolutamente integrável, suponhamos g contínua e limitada.

O resultado abaixo é prático para lidar com algumas questões de convergência e que surgem no estudo da transformada de Fourier com a integração de Riemann.

Lema 3.3 (Convergência). *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolutamente integrável. Seja*

$$f_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt, \ \text{onde } \xi \in (-\infty, \infty),$$

para $n = 1, 2, \ldots$. *Então,*

$$f_n \text{ é uniformemente contínua} \quad \text{e} \quad f_n \xrightarrow{uniformemente} \widehat{f}.$$

Prova.

◇ Continuidade uniforme de cada f_n. Pelo Lema 3.1 encontramos

$$|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leq 2\pi|\xi - \eta| \int_{-n}^{n} |tf(t)|dt.$$

◇ Convergência uniforme. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe N tal que

$$\int_{|t|\geq N} |f(t)|dt < \epsilon.$$

Suponhamos $m > n \geq N$. Para todo ξ temos

$$|f_m(\xi) - f_n(\xi)| = \left| \int_{n\leq|t|\leq m} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt \right| \leq \int_N |f(t)|dt < \epsilon \clubsuit$$

A teoria da integração de Lebesgue apresenta resultados de convergência (em particular, o teorema de convergência dominada) mais fortes que a teoria de Riemann. Este é um dos pontos fortes da teoria de Lebesgue e que a torna bastante útil para estudar transformada de Fourier em espaços mais gerais.

Entretanto, a teoria de Lebesgue também tem seus limites. Por exemplo, a tão importante e ressurgente *seno cardinal (não normalizado)*

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \ \text{se } x \neq 0 \ \text{ e } \ \text{sinc}(0) = 1, \ \text{omde } x \in (-\infty, +\infty),$$

não é Lebesgue integrável nem absolutamente integrável no sentido impróprio de Riemann. Mas, podemos computar a sua integral de Riemann imprópria. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \pi \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty.$$

Vide Capítulo2 - Ferramentas, seção 2.16.

Tal integral é chamada uma integral oscilatória.

Exemplo 3.4. A transformada de Fourier da função retângulo (função caixa ou função portão, ou um pulso unitário ou uma função característica ou escada)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é dada por

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \text{sinc}(\pi\xi) = \begin{cases} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}, & \text{se} \quad \xi \neq 0, \\ 1, & \text{se} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

onde sinc$(\cdot)$ é o seno cardinal (não normalizado).

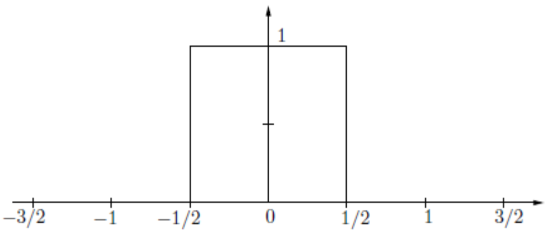

Figura 3: Ilustração ao gráfico de $\Pi(t)$.

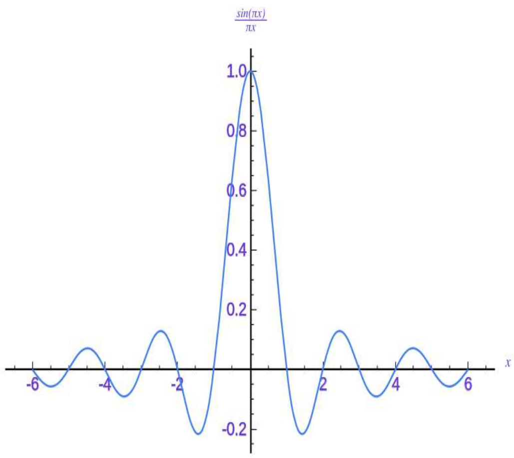

Figura 4: O gráfico do espectro $\widehat{\Pi}(\xi) = \text{sinc}(\pi\xi)$.

Prova.

Temos, como a função cosseno é par e a função seno é ímpar,

$$\widehat{\Pi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{-i2\pi\xi t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi\xi t} dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi\xi t) dt.$$

É trivial ver que

$$2\int_0^{1/2} \cos(2\pi\xi t)\, dt = \begin{cases} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}, & \text{se} \quad \xi \neq 0, \\ 1, & \text{se} \quad \xi = 0 \clubsuit \end{cases}$$

Proposição 3.5. (Linearidade da Transformada de Fourier). *Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integráveis. Sejam α e β arbitrários em $\mathbb{C}$. Então, as funções αf, βg e $\alpha f + \beta g$ são absolutamente integráveis e temos*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g.$$

Prova. Trivial (segue da linearidade da integral) ♣

Proposição 3.6 *O espaço de Schwartz é fechado por derivação e multiplicação por polinômios.*

Prova. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- ◇ Consideremos a função derivada f'. Por definição,

$$t^n (f')^{(m)}(t) = t^n f^{(m+1)}(t)$$

é limitada para quaisquer naturais n e m. Logo, $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- ◇ Consideremos a função $tf(t)$. Dados n e m, temos

$$t^n(tf)^{(m)} = t^n(f + tf')^{(m-1)} = t^n(2f' + tf'')^{(m-2)} = \cdots = t^n(mf^{(m-1)} + tf^{(m)}).$$

Pelo caso anterior, $t^n f^{(m-1)}$ e $t^{n+1} f^{(m)}$ são limitadas. Logo,

$$t^n(tf)^{(m)}$$

é limitada. Portanto, tf pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ♣

Dada f no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$(1 + x^2)|f(x)| \le M \quad \text{e} \quad |f(x)| \le \frac{M}{1 + x^2}.$$

Logo, f é absolutamente integrável (na reta) e portanto a transformada de Fourier

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}$$

está bem definida em todo ponto ξ.

Proposição 3.7. *Seja f em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então, a transformada de Fourier*

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt$$

é derivável e vale a fórmula

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \int f(t)(-2\pi it)e^{-2\pi\xi t}dt, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $r > 0$ tal que

$$\int_{|t|\geq r} |tf(t)|dt < \epsilon.$$

Seja $h \neq 0$. Notemos que $tf(t)$ é absolutamente integrável. Então,

$$\left|\frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} - \int(-2\pi it)f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt\right|$$

$$= \left|\int f(t)e^{-2\pi i\xi t}\left[\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h} + 2\pi it\right]dt\right|$$

$$\leq \int\left|f(t)\frac{\cos(2\pi ht) - \cos 0}{h}\right|dt + \int\left|f(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{h} - 2\pi t\right]\right|dt.$$

◇ O caso da penúltima integral acima. Utilizemos as desigualdades

$$|\sin\theta| \leq |\theta| \quad \text{e} \quad |\sin\theta| \leq 1.$$

O TVM garante um η entre 0 e h tal que

$$\int\left|f(t)\frac{\cos(2\pi ht) - \cos 0}{h}\right|dt \leq \int|f(t)2\pi t\sin(2\pi\eta t)|\,dt$$

$$\leq \int_{-r}^{r}|f(t)2\pi t\sin(2\pi\eta t)|\,dt + \int_{|t|\geq r}|f(t)2\pi t\sin(2\pi\eta t)|\,dt$$

$$\leq 4\pi^2r^2|\eta|\|f\|_1 + 2\pi\epsilon.$$

Isto mostra que podemos escolher h pequeno o suficiente tal que esta integral seja majorada por, digamos, 7ϵ.

- A integral pendente. A função seno cardinal

$$\operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}, \text{ se } \theta \neq 0, \quad \text{e} \quad \operatorname{sinc}(0) = 1,$$

é contínua, tende a 0 se $|\theta| \to \infty$ e existe uma constante M satisfazendo $|\operatorname{sinc}(\theta)| \leq M$ para todo ângulo θ. Então temos

$$\int \left| f(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{h} - 2\pi t\right]\right| dt \leq$$

$$\leq 2\pi \int_{-r}^{r} \left| tf(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{2\pi ht} - 1\right]\right| dt + 2\pi \int_{|t|\geq r} \left| tf(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{2\pi ht} - 1\right]\right| dt.$$

É trivial ver que

$$\int_{|t|\geq r} \left| tf(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{2\pi ht} - 1\right]\right| dt \leq (M+1)\epsilon.$$

Temos também que

$$\int_{-r}^{r} \left| tf(t)\left[\frac{\sin(2\pi ht)}{2\pi ht} - 1\right]\right| dt \leq r\|f\|_1 \sup\left\{|\operatorname{sinc}(\theta) - 1|, \text{ se } |\theta| \leq |2\pi rh|\right\}.$$

Combinando a majoração das integrais acima, concluímos que a transformada de Fourier $\widehat{f}$ é derivável e que vale a fórmula anunciada. Por favor, complete os poucos detalhes restantes ♣

Comentários.

- Na demonstração acima é importante notar que utilizamos apenas que a função $f(t)$ e a função $tf(t)$ são absolutamente integráveis na reta.

- A prova acima evita o Teorema para Diferenciação sob o Sinal de Integração, apresentado em Capítulo 2 - Ferramentas, seção 2.12.

- Mais sobre diferenciação sob o sinal de integral pode ser encontrado em

  `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`.

Proposição 3.8. *Seja f em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seja t a variável no domínio de f. Seja ξ a variável no domínio das transformadas de Fourier. Valem as propriedades abaixo.*

1. Translação no Tempo - Modulação. $\mathcal{F}[f(t+h)] = e^{2\pi ih\xi}\widehat{f}(\xi)$, *dado h na reta.*

2. Modulação - Mudança de Fase. $\mathcal{F}[f(t)e^{-2\pi ith}] = \widehat{f}(\xi+h)$, *fixado h na reta.*

3. Mudança de Escala Temporal. $\mathcal{F}[f(ht)] = \frac{1}{|h|}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right)$, *fixado $h \neq 0$ na reta.*

4. Derivação - Multiplicação Polinomial. $\mathcal{F}[f'(t)] = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$.

5. Multiplicação Polinomial - Derivação. $\mathcal{F}[-2\pi itf(t)] = \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$.

6. Simetria. $\mathcal{F}\left[\overline{f(t)}\right] = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$.

Prova.

1. Temos
$$\int f(t+h)e^{-2\pi it\xi}dt = \int f(s)e^{-2\pi i(s-h)\xi}ds = e^{2\pi ih\xi}\widehat{f}(\xi).$$

2. Temos
$$\int f(t)e^{-2\pi ith}e^{-2\pi it\xi}dt = \int f(t)e^{-2\pi it(h+\xi)}dt = \widehat{f}(\xi+h).$$

3. Segue de
$$\int f(ht)e^{-2\pi i\xi t}dt = \int f(s)\left[e^{-2\pi i\xi\frac{1}{h}t}\right]\frac{1}{h}ds = \frac{1}{|h|}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right).$$

4. Utilizando integração por partes e que $f(t) \to 0$ se $t \to \pm\infty$, segue
$$\int f'(t)e^{-2\pi i\xi t}dt = f(t)e^{-2\pi i\xi t}\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int f(t)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i\xi t}dt = 0 + 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi).$$

5. Segue da Proposição 3.5.

6. É claro que $\overline{f(t)}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e que
$$\int \overline{f(t)}e^{-2\pi i\xi t}dt = \overline{\int f(t)e^{-2\pi i(-\xi)t}\,dt}\,\clubsuit$$

Comentários e exemplos à Proposição 3.8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qualquer.

- ⋄ As propriedades 1, 2 e 3 valem para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável.

- ⋄ Na mesma proposição, a propriedade 4 também vale para f, se a função f é derivável (e f limitada) e as funções f e f' são absolutamente integráveis. Provaremos isto logo mais, na seção Decaimento x Suavidade.

- ⋄ A propriedade 5 evidentemente também vale para f, se as funções $f(t)$ e $tf(t)$ são absolutamente integráveis.

- ⋄ Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. As propriedades 4 e 5 mostram que, a menos de potências de $2\pi i$, a transformada de Fourier permuta o operador derivação D^n [onde $D^n(f) = f^{(n)}$] com o operador multiplicação pela variável sob consideração, o qual denotamos M^p [donde segue $M^p(f) = x^p f(x)$]. Isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{F}D^n(f) = (2\pi i\xi)^n \widehat{f} = (2\pi i)^n M^n \mathcal{F}(f) \text{ e} \\ \mathcal{F}M^n(f) = \mathcal{F}(t^n f) = (-2\pi i)^{-n} D^n \mathcal{F}(f). \end{cases}$$

  Estas características (as propriedades 4 e 5), tornam a transformada Fourier fundamental no estudo de equações diferenciais.

- ⋄ Abaixo ilustramos a dita *Propriedade de Retardamento* (propriedade 1) com o efeito de uma translação $g(t)$ de um impulso unitário $f(t)$.

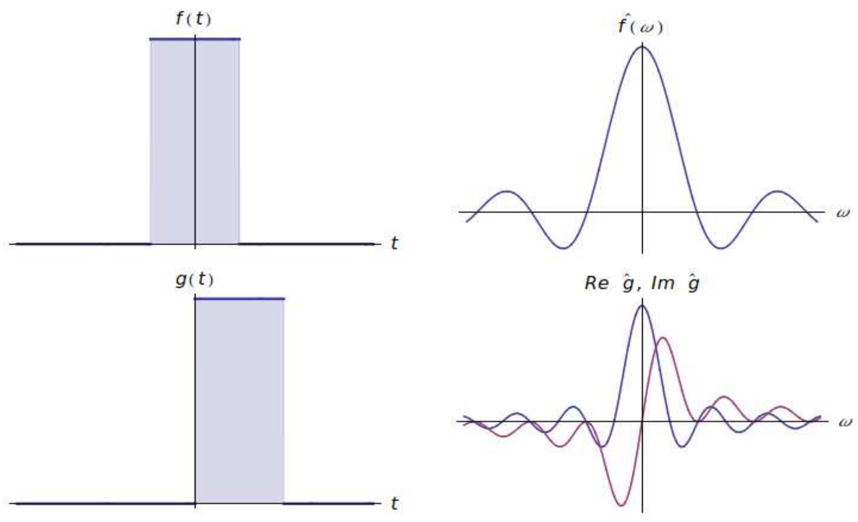

Figura 5: A transformada de Fourier e a translação de um impulso.

◇ Com respeito à Propriedade 3 (*mudança de escala temporal*), o caso

$$a = -1 \;\text{ e }\; \mathcal{F}[f(-t)] = \widehat{f}(-\xi)$$

mostra a propriedade do tempo reverso.

Invertendo o sentido de orientação do sinal, o sentido de $\widehat{f}$ se inverte.

◇ A propriedade *mudança de escala temporal* é também dita *propriedade de similaridade* ou "comprime-estica". O nome similaridade deve-se a mudança de escala $x \mapsto ax$ ser também chamada de *similaridade*.

Vejamos as características "comprime e estica". Seja $a > 1$. Então temos

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

O gráfico de $f(at)$ está contido na mesma faixa horizontal que o gráfico de f. Ainda, se v é o valor que f assume no ponto t, então temos

$$f\left(a\frac{t}{a}\right) = v.$$

Isto mostra que o gráfico de f se contrai horizontalmente. Isto é, ao longo do eixo Ox, em direção ao eixo Oy, com mesmos valores mínimos e máximos que f e dentro da mesma faixa horizontal que o gráfico de f.

No domínio-frequência, $\widehat{f}$ assume valores complexos. O gráfico de

$$\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)\right|$$

é "esticado horizontalmente" comparado ao de $|\widehat{f}(\xi)|$. É "esticado" ao longo do eixo Ox, se afasta de Oy e está na mesma faixa que o gráfico de $|\widehat{f}|$.

Então, o gráfico de

$$|\mathcal{F}[f(at)]| = \frac{1}{a}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)\right|$$

é esticado horizontalmente e comprimido verticalmente.

Seja $0 < a < 1$. Então, o gráfico de $f(at)$ se estica horizontalmente comparado com o de $f(t)$. O gráfico de $\mathcal{F}[f(at)]$ é comprimido no sentido horizontal e esticado no sentido vertical.

Devido a tais características, dizemos que um sinal não pode ser localizado (no sentido de concentrado em um ponto) de uma só vez no domínio-temporal e no domínio-frequência. Veremos mais sobre *localização* com o Princípio da Incerteza de Heisenberg.

◇ Combinemos translações e mudanças de escala. Consideremos a função característica do intervalo $(-1/2, 1/2)$ [vide Exemplo 3.4] dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Computemos a transformada de Fourier da função (também característica)

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right).$$

Solução. Pelas propriedades de mudança de escala e translação (nesta ordem) segue

$$\widehat{f}(\xi) = 2\mathcal{F}\left[\Pi(t-3)\right](2\xi) = 2e^{-6\pi i\xi}\widehat{\Pi}(2\xi).$$

No Exemplo 3.4 vimos que $\widehat{\Pi}(\xi) = \operatorname{sinc}(\pi\xi)$. Concluímos então que

$$\widehat{f}(\xi) = 2e^{-6\pi i\xi}\widehat{\Pi}(2\xi) = 2e^{-6\pi i\xi}\operatorname{sinc}(2\pi\xi).$$

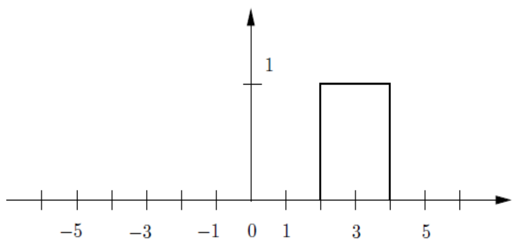

Figura 6: Gráfico da função característica $y = f(t)$.

Atenção. É necessária a ordem escolhida acima para utilizar as propriedades da transformada de Fourier. Por favor verifique. Compute também a transformada de Fourier diretamente.

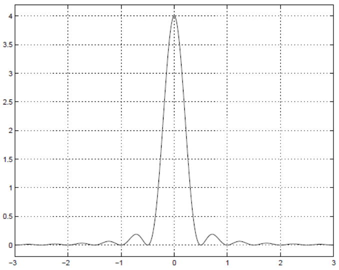

Figura 7: Gráfico do espectro de potência/energia $|\widehat{f}(\xi)|^2 = 4\operatorname{sinc}^2(2\pi\xi)$ ♣

- Quanto à *propriedade de simetria*

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(t)}\right] = \overline{f(-\xi)},$$

vale o que segue.

Se f é uma função real, então temos a condição de realidade

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Neste caso, a transformada $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ é dita uma função hermitiana.

Notemos o paralelismo com matriz complexa hermitiana (ou auto-adjunta). Para tal, interpretamos $-\xi$ e ξ como indicando posições simétricas e recordamos que uma matriz quadrada e complexa $A = (a_{ij})$ é uma matriz hermitiana se satisfaz

$$a_{ji} = \overline{a_{ij}}, \quad \text{para todos } i, j.$$

Recordemos também que todos os auto-valores de uma matriz auto-adjunta são reais.

Para séries de Fourier, a *condição de realidade* se traduz na relação entre coeficientes de Fourier

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

e neste caso temos

$$c_{-n}e^{-2\pi int} + c_n e^{2\pi int} = 2\mathrm{Re}\left(c_n e^{2\pi int}\right).$$

Se f é uma função puramente imaginária, então temos a relação

$$\widehat{f}(-\xi) = -\overline{\widehat{f}(\xi)},$$

cuja correspondente relação para coeficientes da uma série de Fourier é

$$c_{-n} = -\overline{c_n} \quad \text{e} \quad c_{-n}e^{-2\pi int} + c_n e^{2\pi int} = 2i\mathrm{Im}\left(c_n e^{2\pi int}\right).$$

- A transformada de Fourier na frequência zero é a integral de f. Isto é,

$$\widehat{f}(0) = \int f(t)dt.$$

Segue uma tabela com algumas propriedades de simetria do par $(f, \widehat{f})$.

1.	$f(t)$	$\widehat{f}(\xi)$
2.	par	par
3.	ímpar	ímpar
4.	real e par	real e par
5.	real e ímpar	imaginária e ímpar
6.	imaginária e par	imaginária e par
7.	complexa e par	complexa e par
8.	complexa e ímpar	complexa e ímpar
9.	real e assimétrica	hermitiana [nota 1]
10.	imaginária e assimétrica	anti-hermitiana [nota 2]
11.	hermitiana [nota 1]	real
12.	anti-hermitiana [nota 2]	imaginária

Notas.

(1) Hermitiana (ou, parte real par e a parte imaginária ímpar) é definida por

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

(2) Anti-hermitiana (ou, parte real ímpar e parte imaginária par) é definida por

$$\widehat{f}(-\xi) = -\overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Proposição 3.9. *A transformada de Fourier é um operador linear no espaço de Schwartz. Isto é, temos*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Prova.

Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Já vimos [proposições 3.5 e 3.6 (5)] que $\widehat{f}$ é derivável e

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = D\widehat{f}(\xi) = \int f(t)(-2\pi i t)e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

Como $tf(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, repetindo o argumento temos que $D\widehat{f}$ é derivável e

$$\frac{d^2\widehat{f}}{d\xi^2}(\xi) = \int f(t)(-2\pi i t)^2 e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

Iterando o argumento concluímos que $\widehat{f}$ é infinitamente derivável.

Também já vimos [Proposição 3.8 (4)] que $f' = Df$ satisfaz

$$(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f')(\xi).$$

Logo,

$$(2\pi i\xi)^n\widehat{f}(\xi) = (2\pi i\xi)^{n-1}\mathcal{F}(f')(\xi) = (2\pi i\xi)^{n-2}\mathcal{F}(f'')(\xi) = \cdots = \mathcal{F}(D^n f)(\xi).$$

Donde segue, pela Proposição 3.2, que $(2\pi i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$ é limitada♣

Para muitos problemas é importante saber que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um operador bicontínuo. Isto é, que $\mathcal{F}$ é contínuo e que seu inverso $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ também é contínuo. Para isto, é necessário introduzir uma noção de convergência (isto é, uma noção de topologia) no espaço de Schwartz. Veremos isto no Capítulo 7 - **Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e Distribuições Temperadas**.

A seguir, apresentamos alguns exemplos clássicos de transformada de Fourier e uma pequena tabela. No Capítulo 7 - Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e Distribuições Temperadas - estenderemos esta tabela com mais alguns exemplos.

3.3 Exemplos de Transformadas de Fourier

Exemplo 3.10. A transformada de Fourier da gaussiana $f(t) = e^{-t^2}$ é dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-(\pi\xi)^2}.$$

Solução.

A função f satisfaz a equação diferencial

$$f' + 2tf = 0.$$

Pela Proposição 3.8 (4) e (5), aplicando a transformada de Fourier nesta equação encontramos a equação diferencial na variável ξ (frequência)

$$2\pi i\xi\widehat{f}(\xi) - \frac{1}{\pi i}\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\pi^2\xi\widehat{f}(\xi) + \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = 0.$$

Donde segue [multiplicando esta última equação pelo fator integrante $e^{\pi^2\xi^2}$]

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^{\pi^2\xi^2}\widehat{f}(\xi)\right] = 0.$$

Assim, existe uma constante λ tal que $e^{\pi^2\xi^2}\widehat{f}(\xi) = \lambda,$ para todo ξ. Ainda,

$$\lambda = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

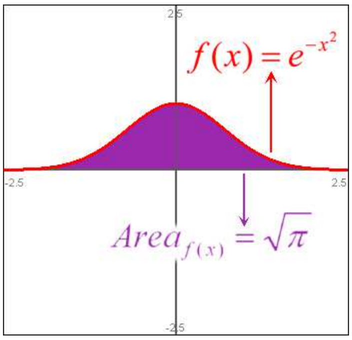

Figura 8: A área entre o gráfico de $y = e^{-x^2}$ e o eixo real é $\sqrt{\pi}$.

Quanto à integral que define λ (vide figura), é bem conhecido que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

[Vide Capítulo 2 (Ferramentas), seção 2.11.]

Concluímos então que $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-(\pi\xi)^2}$♣

Exemplo 3.11. Seja $a > 0$. A transformada de Fourier de $f(t) = e^{-at^2}$ é

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{(\pi\omega)^2}{a}}.$$

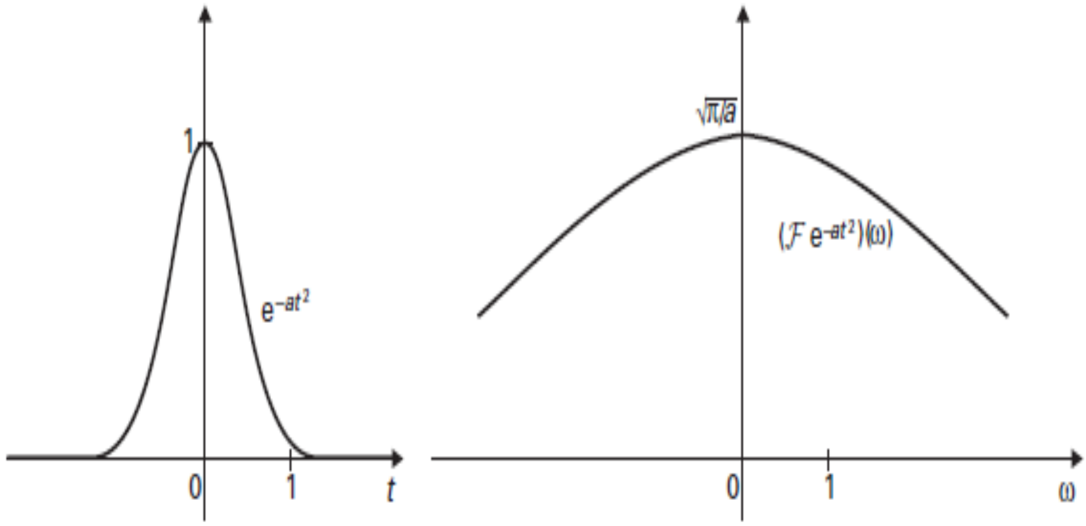

Figura 9: A gaussiana $f(t) = e^{-at^2}$ e seu espectro $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{(\pi\omega)^2}{a}}$.

Solução.

Vide Exemplo 3.10 e a fórmula de mudança de escala [Proposição 3.8 (3)]♣

Comentário. Segue então a identidade

$$\mathcal{F}[e^{-\pi t^2}](\omega) = e^{-\pi\omega^2} = 1.e^{-\pi\omega^2}.$$

Com linguagem de Álgebra Linear, dizemos que a gaussiana $e^{-\pi t^2}$ é uma auto-função associada ao auto-valor 1 da aplicação linear

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

A seguir, computamos uma transformada de Fourier que requer um pouco mais de análise complexa. Todavia, evitaremos o Teorema dos Resíduos.

Exemplo 3.12 Computemos a transformada de Fourier da função par

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}, \text{ onde } a > 0.$$

Solução.

Notemos que $f(t)$ é absolutamente integrável e que $\widehat{f}$ está definida. Pela propriedade de simetria [Proposição 3.6 (6)] segue que $\widehat{f}$ é par. Notemos que e^z é dada por uma série de potências que converge em todo o plano.

Seguindo a figura abaixo, consideremos o contorno Γ dado pela parametrização do intervalo $[-N, N]$ seguida da parametrização $\gamma(t) = Ne^{it}$, onde t percorre $[0, \pi]$, da semi-circunferência superior.

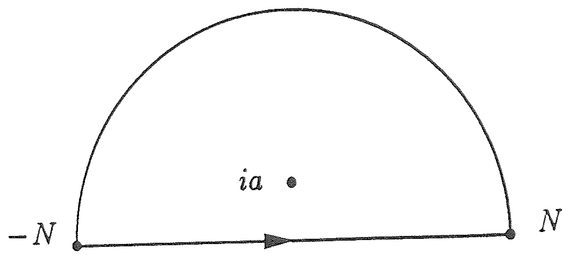

Figura 10: O contorno para o Exemplo 3.12.

Seja $\xi < 0$. Consideremos a identidade

$$\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2}dz = \int_{-N}^{N} \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{t^2 + a^2}dt + \int_\gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2}dz.$$

Evidentemente,

$$\int_{-N}^{N} \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{t^2 + a^2}dt \xrightarrow{N\to\infty} \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{t^2 + a^2}dt.$$

Ao longo de γ temos $z = \gamma(t) = Ne^{it}$, com $0 \leq t \leq \pi$. Donde segue

$$\left|e^{-2\pi i\xi Ne^{it}}\right| = e^{2\pi N\xi \sin t} \leq e^0 = 1, \qquad \text{onde } \xi < 0 \text{ e } 0 \leq t \leq \pi, \quad \text{e}$$

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2}dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{1}{|(Ne^{it})^2 + a^2|}|\gamma'(t)|dt = \int_0^\pi \frac{Ndt}{|(Ne^{it})^2 + a^2|} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Por outro lado, $z = ia$ e $z = -ia$ não são zeros de $e^{-2\pi i\xi z}$. Pelo **Método das Frações Parciais** [vide Capítulo 2 (Ferramentas), Método das Frações Parciais em $\mathbb{C}$ para Quociente de Analíticas, seção 2.15] existem constantes A e B e uma função $G = G(z)$ analítica em todo o plano (e com a série convergente no plano todo) tal que

$$\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{A}{z - ia} + \frac{B}{z + ia} + G(z).$$

Achamos A multiplicando tal sequência de igualdades por $z - ia$ e então computando as novas igualdades em $z = ia$. [**Método de Heaviside**.] Analogamente para B (mas não precisaremos de B). Seguem

$$A = \frac{e^{2\pi a\xi}}{2ia} \quad \text{e} \quad B = \frac{e^{-2\pi a\xi}}{-2ia}.$$

Logo,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2} dz = \frac{e^{2\pi a\xi}}{2ia} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z - ia} - \frac{e^{-2\pi a\xi}}{2ia} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z + ia} + \int\limits_{\Gamma} G(z)dz.$$

As duas primeiras integrais no lado direito podem ser calculas pelo índice [vide Capítulo 2 (Ferramentas), Índice de uma curva em $\mathbb{C}$, seção 2.14],

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z - ia} = \mathrm{Ind}(\Gamma; ia) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z + ia} = \mathrm{Ind}(\Gamma; -ia) = 0.$$

Para a terceira, como $G(z)$ é dada por uma série de potências convergente no plano então podemos integrar esta série termo a termo e portanto G tem uma primitiva H. Logo, $H' = G$ e portanto a terceira integral (computada sobre uma curva fechada) é zero.

Encontramos então

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z^2 + a^2} dz = \frac{2\pi i e^{2\pi a\xi}}{2ia} = \frac{\pi e^{2\pi a\xi}}{a}.$$

Então, como a transformada $\widehat{f}$ é par, concluímos com a fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi e^{-2\pi a|\xi|}}{a} \qquad \left[\widehat{f}(0) = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\right] \clubsuit$$

Para mais sobre o método das frações parciais e o método de Heaviside, vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-FracParc.pdf`.

Exemplo 3.13. Seja $a > 0$. A transformada de Fourier da função característica (ou função escada ou, ainda, uma função caixa ou retângulo)

$$\chi_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [-a, a], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é dada por

$$\widehat{\chi_a}(\xi) = 2a\,\mathrm{sinc}(2a\pi\xi) = \begin{cases} 2a\frac{\sin 2a\pi\xi}{2a\pi\xi}, & \text{se} \quad \xi \neq 0, \\ 2a, & \text{se} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

onde $\mathrm{sinc}(t)$ é o seno cardinal (não normalizado).

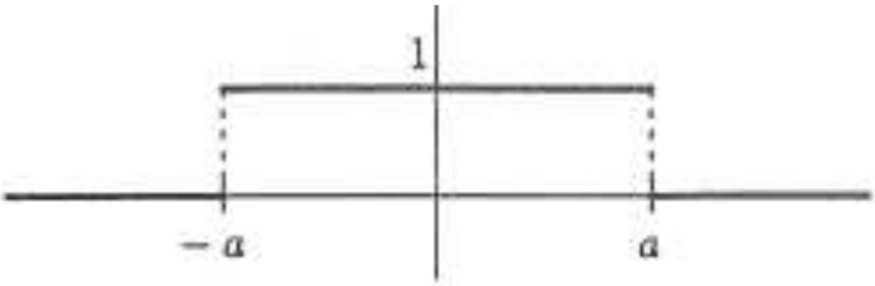

Figura 11: O gráfico da função característica (caixa) $\chi_a(t)$.

Solução.

No Exemplo 3.4 verificamos que a transformada de Fourier de

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{é} \qquad \widehat{\Pi}(\xi) = \mathrm{sinc}(\pi\xi).$$

Ainda, observemos a identidade

$$\chi_a(t) = \Pi\left(\frac{t}{2a}\right), \quad \text{para todo } t \neq \pm a.$$

Donde então segue, pela fórmula para mudança de escala,

$$\widehat{\chi_a}(\xi) = 2a\widehat{\Pi}(2a\xi) = 2a\,\mathrm{sinc}(2a\pi\xi) \clubsuit$$

Exemplo 3.14 A transformada de Fourier da usual função triangular

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{é} \qquad \widehat{\Lambda}(\xi) = \operatorname{sinc}^2(\pi\xi),$$

onde sinc$(\cdot)$ é o seno cardinal (não normalizado). [A notação $\Lambda(t)$ é usual.]

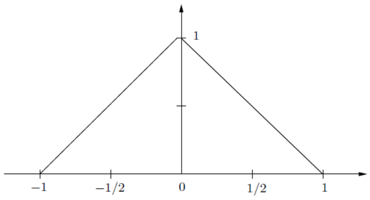

Figura 12: O impulso triangular $\Lambda(t)$.

Solução.

A função $\Lambda(t)$ é absolutamente integrável. Temos então

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-2\pi i\xi t}dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

Integrando por partes encontramos uma primitiva

$$\int (1 \pm t)e^{-2\pi i\xi t}dt = (1 \pm t)\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi} \mp \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{(-2\pi i\xi)^2} = \left[(1 \pm t)(2\pi i\xi) \pm 1\right]\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{4\pi^2\xi^2}.$$

Donde então segue

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = \left(\frac{2\pi i\xi + 1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{2\pi i\xi}}{4\pi^2\xi^2}\right) + \left(-\frac{e^{-2\pi i\xi}}{4\pi^2\xi^2} - \frac{2\pi i\xi - 1}{4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{2 - e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

Logo,

$$\widehat{\Lambda}(\xi) = -\frac{(e^{\pi i\xi} - e^{-\pi i\xi})^2}{4\pi^2\xi^2} = -\frac{[2i\sin(\pi\xi)]^2}{4\pi^2\xi^2} = \left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2 = \operatorname{sinc}^2(\pi\xi).$$

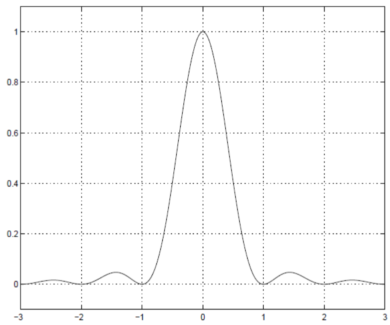

Figura 13: O espectro $\widehat{\Lambda}(\xi) = \operatorname{sinc}^2(\pi\xi)$ ♣

Exemplo 3.15 Decaimento exponencial dos dois lados. Seja $a > 0$. Consideremos a função $f(t) = e^{-a|t|}$. Mostremos que

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

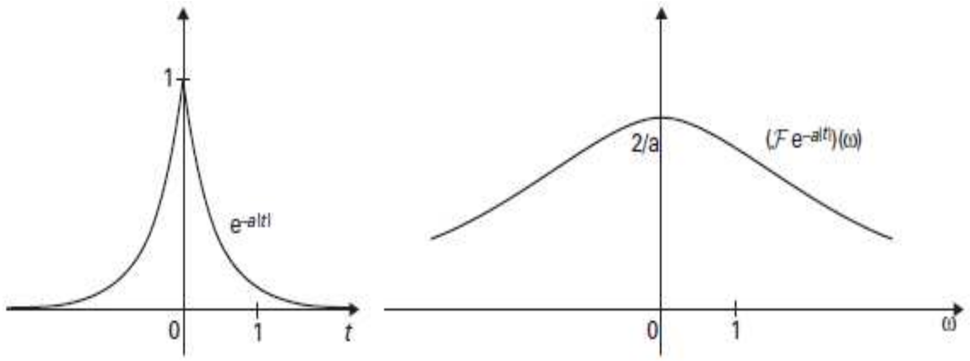

Figura 14: A curva de decaimento exponencial dos dois lados $e^{-a|t|}$ e seu espectro, a curva lorentziana $\mathcal{F}[e^{-a|t|}](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$.

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi i \xi t} e^{at} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} e^{-at} dt \\
&= \frac{e^{(-2\pi i \xi + a)t}}{-2\pi i \xi + a}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-2\pi i \xi - a)t}}{-2\pi i \xi - a}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a - 2\pi i \xi} + \frac{1}{a + 2\pi i \xi} \\
&= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2} \clubsuit
\end{aligned}$$

Chmamamos de **lorentziana** a uma função da forma

$$g(t) = \frac{c}{c^2 + t^2}.$$

Notemos que, apesar das aparências, uma curva lorentziana não é uma gaussiana.

Exemplo 3.16 Decaimento exponencial de um só lado. Seja $a > 0$. Se

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ e^{-at} & \text{se } t > 0, \end{cases} \qquad \text{então} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi + a}.$$

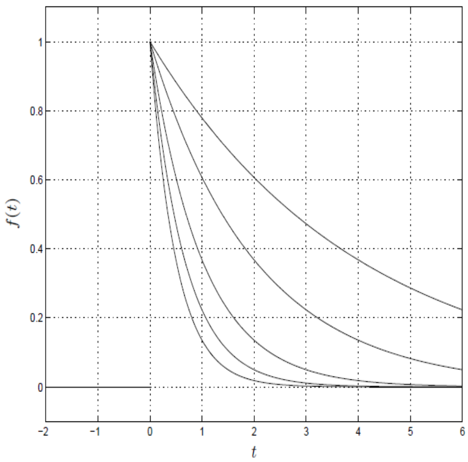

Figura 15: O decaimento exponencial de um só lado, descrito pelo sinal $f(t) = 0$ se $t \le 0$ e $f(t) = e^{-at}$ se $t > 0$. Para 4 valores de a.

Solução.

Temos

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{-2\pi i\xi t} e^{-at} dt = \left. \frac{e^{(-2\pi i\xi - a)t}}{-2\pi i\xi - a} \right|_0^\infty = \frac{1}{2\pi i\xi + a}.$$

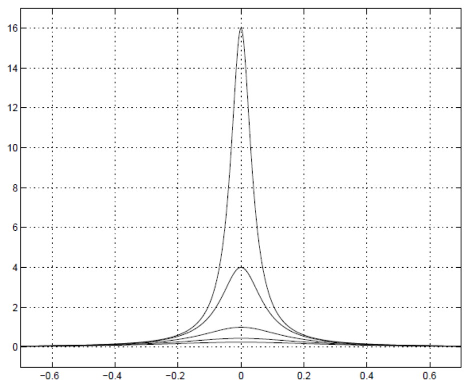

Figura 16: Espectro de potência/energia $|\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + a^2}$. Para 4 valores de a.

Observemos que o espectro de potência $|\widehat{f}(\xi)|^2$ é uma curva do tipo lorentziana (não uma gaussiana). Por favor, associe as 4 curvas no domínio temporal com suas respectivas curvas no domínio-frequência ♣

Segue uma primeira tabela para transformadas de Fourier, com o que já vimos. No Capítulo 7 - Distribuições Temperadas veremos uma segunda tabela.

Tabela (primeira) para Transformadas de Fourier.

1.	$f(t)$	$\widehat{f}(\xi)$
2.	$f(t+h)$	$e^{2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi)$
3.	$f(t)e^{2\pi i h t}$	$\widehat{f}(\xi - h)$
4.	$f(ht)$	$\frac{1}{\lvert h\rvert}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right)$
5.	$f'(t)$	$(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi)$
6.	$(-2\pi i t)f(t)$	$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$
7.	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{a}}$
8.	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi e^{-2\pi\lvert a\rvert\xi}}{a}$
9.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
10.	$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-\lvert a\rvert t}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$	$\frac{1}{2\pi i\xi + \lvert a\rvert}$
11.	$\chi_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \lvert t\rvert < a, \\ 0, & \text{se } \lvert t\rvert > a. \end{cases}$	$2a\,\mathrm{sinc}(2a\pi\xi)$
12.	$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert, & \text{se } \lvert t\rvert \leq 1, \\ 0, & \text{se } \lvert t\rvert \geq 1. \end{cases}$	$\mathrm{sinc}^2(\pi\xi)$

3.4 O Lema de Riemann-Lebesgue.

O lema de Riemann-Lebesgue afirma que

$$\widehat{f}(\xi) \to 0 \text{ se } |\xi| \to \infty.$$

Este resultado tem uma bela interpretação. Ao computarmos a média ponderada de f por harmônicos de frequências que crescem sem limite [o harmônico é $e^{-2\pi i\xi t}$ e a média é o número $\widehat{f}(\xi)$], então as contribuições positivas e negativas para o cálculo da média eventualmente se cancelarão. Isto ocorre porque f pouco mudará relativamente a fortes oscilações das funções seno e cosseno. Por exemplo, as áreas das oscilações justapostas de $f(t)\sin(2\pi i\xi t)$ se cancelarão tão melhor quanto maior a oscilação ξ (em valor absoluto). Vide figura após a prova do lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 3.17 (Aproximação de funções absolutamente integráveis). *Dada $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ integrável e $\epsilon>0$ existe uma função poligonal (linear por partes) contínua e de suporte compacto $p:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ satisfazendo*

$$0 \le p \le f \quad e \quad \int [f(t)-p(t)]dt < \epsilon.$$

Prova.

◇ Seja $\epsilon>0$. Devido à hipótese, existe n com

$$0 \le \int f(t)dt - \int_{-n}^{n} f(t)dt < \epsilon.$$

Em particular, a restrição

$$f_n = f\Big|_{[-n,n]} : [-n,n] \to [0,\infty)$$

é Riemann-integrável. Portanto, para tal restrição f_n encontramos uma soma inferior de Darboux $s(f_n,\mathcal{P}) = m_1\Delta_{t_1} + m_2\Delta_{t_2} + \cdots + m_k\Delta_{t_k}$, onde $\mathcal{P} = \{t_0 = -n < t_1 < \cdots < t_k = n\}$ é uma partição do intervalo $[-n,n]$ e temos $m_j = \inf\{f(t) : t \in [t_{j-1},t_j]\}$ para $j = 1,\ldots,k$, satisfazendo

$$0 \le \int_{-n}^{n} f_n(t)dt - s(f_n,\mathcal{P}) \le \epsilon.$$

◇ É fácil ver que existe e desenhar (esboçe) uma função poligonal contínua $p : [-n, n] \to [0, \infty)$ (formalize, vide dica abaixo) tal que

$$(3.17.1) \quad p(t) \le m_j \le f(t) \ \text{ se } t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \text{e} \quad 0 \le s(f_n, \mathcal{P}) - \int_{-n}^{n} p(t)dt < \epsilon.$$

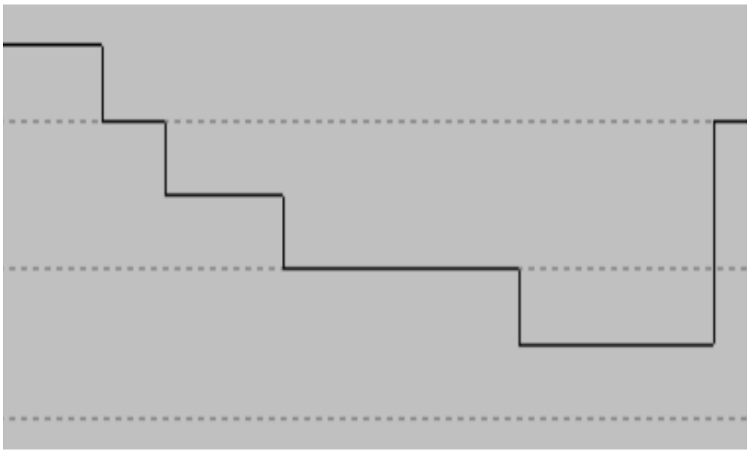

Figura 17: Ilustração de $\{(t, m_j) : x_{j-1} \le t \le x_j \text{ e } j = 1, \ldots, k\}$ (e trechos verticais).

[Dica. Para obter a poligonal basta inclinar um pouco cada segmento vertical. Se $m_j > m_{j+1}$ deslizamos o topo do segmento vertical para a esquerda. Se $m_j < m_{j+1}$ deslizamos o topo do segmento vertical para a direita.]

◇ Completemos a definição de $p(t)$. [Já temos $p(-n)$ e $p(n)$.] Definamos $p : (-\infty, -n] \cup [n, \infty) \to [0, \infty)$ contínua e satisfazendo duas condições. O gráfico desta é composto de quatro segmentos lineares e temos $p(t) = 0$ para todo $|t| \ge n + d$, onde $d > 0$ é pequeno o suficiente tal que tenhamos

$$\int_{n \le |t| \le n+d} p(t)dt < \epsilon.$$

◇ Conclusão. Pelo que mostramos até aqui [vide (3.17.1) também], segue

$$\int |f(t) - p(t)|dt \le \int_{-n}^{n} [f(t) - p(t)]dt + \int_{|t| \ge n} f(t)dt + \int_{|t| \ge n} p(t)dt$$
$$\le \left[\int_{-n}^{n} f(t)dt - s(f_n, \mathcal{P})\right] + \left[s(f_n, \mathcal{P}) - \int_{-n}^{n} p(t)dt\right] + \epsilon + \epsilon \le 4\epsilon \ \clubsuit$$

Comentário. No lema acima, se f é a valores complexos, obtemos uma poligonal complexa (linear por partes) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e de suporte compacto tal que

$$|p(t)| \le |f(t)| \ \text{ e } \ \|f - p\|_1 < \epsilon. \qquad \text{[cheque.]}$$

Teorema 3.18 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolutamente integrável. Então, $\widehat{f}$ se anula no infinito. Isto é,*

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0.$$

Prova. Em três etapas: primeira redução, segunda redução e conclusão.

◇ Primeira redução. Claramente podemos supor que f é real. Isto é, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Decompondo f em suas partes positiva e negativa, respectivamente

$$f^+=\frac{|f|+f}{2}\geq 0 \quad\text{e}\quad f^-=\frac{|f|-f}{2}\geq 0 \quad\text{que satisfazem } f=f^+-f^-,$$

a linearidade da transformada de Fourier nos permite supor $f\geq 0$.

◇ Segunda redução. Dado $\epsilon>0$, o Lema 3.17 nos garante uma função poligonal $p:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ contínua e de suporte compacto tal que

$$\|f-p\|_1\leq\epsilon.$$

Donde então segue

$$|\widehat{f}(\xi)=|\widehat{p}(\xi)+\widehat{f-p}(\xi)|\leq|\widehat{p}(\xi)|+\|f-p\|_1\leq|\widehat{p}(\xi)|+\epsilon.$$

A poligonal contínua $p(t)$ é uma soma finita de poligonais descontínuas com cada uma destas linear em um intervalo limitado e identicamente nula no complementar deste intervalo. Então, devido à linearidade da transformada de Fourier, podemos supor

$$p(t)=\begin{cases} ct+d, & \text{se } t\in[a,b],\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

com a,b,c e d números reais fixados.

◇ Conclusão. Temos

$$\widehat{p}(\xi)=\int_a^b(ct+d)e^{-2\pi i\xi t}dt=c\int_a^b te^{-2\pi i\xi t}dt+d\int_a^b e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

É fácil ver que (com ξ não nulo)

$$\int_a^b e^{-2\pi i\xi t}dt=\frac{e^{-2\pi i\xi b}-e^{2\pi i\xi a}}{-2\pi i\xi}\xrightarrow{|\xi|\to\infty}0.$$

Donde então segue

$$\int_a^b te^{-2\pi i\xi t}dt=\left[t\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi}\Big|_a^b+\frac{1}{2\pi i\xi}\int_a^b e^{-2\pi i\xi t}dt\right]\xrightarrow{|xi|\to\infty}0\,♣$$

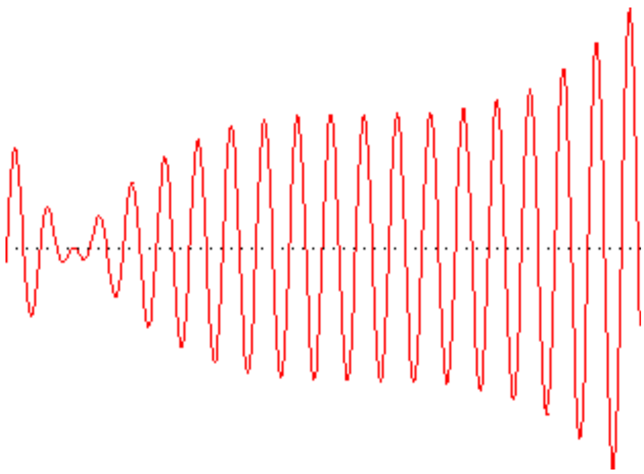

Figura 18: O lema de Riemann-Lebegue afirma que a integral de uma função como acima é pequena. O valor da integral tende a 0 se ξ tende ao infinito.

Exemplo 3.19. Não é necessária a condição

$$f(t) \xrightarrow{|t|\to\infty} 0$$

para que $\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0$. Por exemplo, consideremos os pontos

$$A_n = \left(n - \frac{1}{n2^n}, 0\right), \quad \text{o "vértice" } V_n = (n,n) \quad \text{e} \quad B_n = \left(n + \frac{1}{n2^n}, 0\right),$$

para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Consideremos a função contínua e par $f = f(t)$ cujo gráfico é dado pela união dos segmentos $\overline{A_nV_n}$, $\overline{V_nB_n}$ e $[B_n, A_{n+1}]$ para todo n. Isto é, uma sequência de "chapeuzinhos triangulares e isósceles que ficam mais estreitos e mais altos conforme $|n| \to \infty$. A integral de f é

$$\int f(t)dt = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Logo, f é absolutamente integrável mas $f(t)$ não tende a zero se $|t| \to \infty$, pois f satisfaz

$$f(n) = n, \text{ para todo } n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Ainda assim, temos

$$\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0 \clubsuit$$

3.5 Suavidade x Decaimento.

Basta a integrabilidade absoluta de um sinal $f = f(t)$ para que a transformada de Fourier $\widehat{f}$ seja contínua (vide Proposição 3.2) e tenda a zero no infinito (vide Lema de Riemann-Lebesgue). Tais resultados e as propriedades relacionando derivação e multiplicação por polinômios [vide Proposição 3.8 (4) e 3.8 (5)] apontam para a dualidade suavidade-decaimento. Vejamos.

Mais rápido decaimento de f no infinito induz maior suavidade de $\widehat{f}$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável. Vejamos o que ocorre se

$$\int |tf(t)|dt < \infty.$$

Seja

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi it\xi} f(t)dt.$$

Então, como a função majorante $|f(t)| + |tf(t)|$ é integrável, pelo teorema da derivação sob o sinal de integral [vide seção própria, Capítulo Ferramentas] segue que $\widehat{f}$ é derivável e

$$\text{(3.5.1)} \qquad \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \int (-2\pi it)e^{-2\pi it\xi} f(t)dt = \mathcal{F}[-2\pi itf(t)].$$

A seguir, vejamos o que ocorre se

$$\int |t^2 f(t)|dt < \infty.$$

Neste caso, a função majorante $|f(t)| + |tf(t)| + |t^2 f(t)|$ é integrável e então a função $\widehat{f}(\xi)$ é derivável e vale a fórmula (3.5.1). Então, ainda pelo teorema da derivação sob o sinal da integral, podemos derivar a fórmula (3.5.1) e obtemos

$$\frac{d^2\widehat{f}}{d\xi^2}(\xi) = \int (-2\pi it)^2 e^{-2\pi it\xi} f(t)dt = \mathcal{F}[(-2\pi it)^2 f(t)].$$

Po indução, se $t^n f(t)$ é absolutamente integrável segue que existem as derivadas

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}, \frac{d^2\widehat{f}}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^n\widehat{f}}{d\xi^n}.$$

Mais suavidade de $\widehat{f}$ induz decaimento mais rápido de f no infinito.

Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é tal que f e f' são absolutamente integráveis e, ainda, que f é limitada. Pela fórmula de integração por partes segue

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi t} f(t) t dt = f(t)\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi} f'(t)dt.$$

É óbvio que

$$f(t)\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Logo, pela Proposição 3.2 segue

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f'\|_1}{|2\pi\xi|}.$$

A seguir, suponhamos que f, f' e f'' são integráveis e, ainda, que f e f' são limitadas. Aplicando a fórmula de integração por partes pela segunda vez temos

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}\int e^{-2\pi i\xi t} f'(t)dt = \frac{1}{2\pi i\xi}\left[f'(t)\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{e^{-2\pi i\xi t}}{-2\pi i\xi} f''(t)dt\right].$$

Logo, pela Proposição 3.2 segue

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f''\|_1}{|2\pi\xi|^2}.$$

Por indução segue que se as $n+1$ funções $f, f', f'', \ldots, f^n$ são absolutamente integráveis e as n funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são limitadas, então a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ decai tão rápido quanto ou mais rápido que

$$\frac{1}{|\xi|^n}.$$

Mais precisamente, a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ satisfaz a desigualdade

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_1}{|2\pi\xi|^n}.$$

3.6 Gaussianas e Aproximação.

Pelos exemplos 3.10 e 3.11 segue (cheque)

$$\int e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

Guiados pelo segundo TVM para integrais, definimos as **gaussianas**

$$\varphi(t) = e^{-\pi t^2} \quad \text{e} \quad \varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \quad \text{onde } \epsilon > 0 \text{ e } \int \varphi_\epsilon(t)dt = 1.$$

Pelo Exemplo 3.11 temos também

$$\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}e^{-\frac{\pi t^2}{\epsilon^2}} \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi_\epsilon}(\xi) = e^{-\pi\epsilon^2\xi^2} \qquad \left[\text{se } \epsilon = 1, \text{ temos } \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}\right].$$

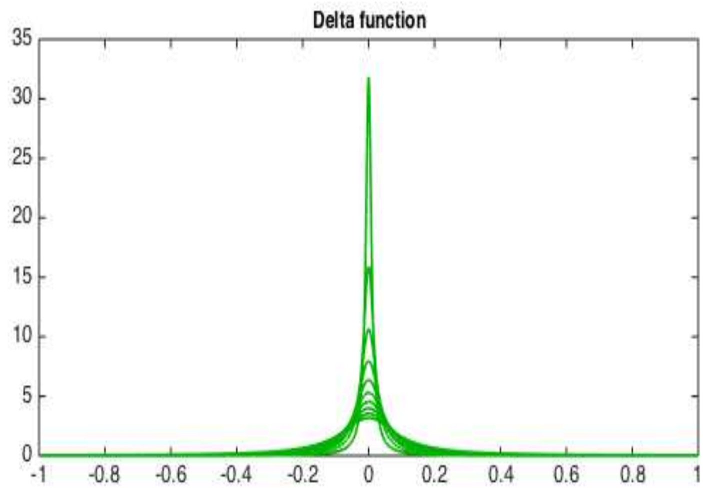

Figura 19: Se ϵ tende a zero, as funções φ_ϵ tendem ao "δ de Dirac".

Comentário. Se ϵ tende a zero, as gaussianas φ_ϵ tem pontos de pico na origem [em particular, tais pontos de pico tendem ao infinito] e seus gráficos se estreitam verticalmente ao passo que suas transformadas de Fourier

$$\widehat{\varphi_\epsilon}(\xi) = e^{-\pi\epsilon^2\xi^2}$$

se achatam horizontalmente. Este é um exemplo de um importante fenômeno geral chamado **Princípio da Incerteza de Heisenberg** que ainda discutiremos, neste capítulo .

As hipóteses na importante proposição abaixo, são adequadas para determinarmos a tranformada de Fourier inversa. [Vide comentário à Proposição 3.2.]

Proposição 3.20. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e contínua na origem. Então,*

$$\int f(t)\varphi_\epsilon(t)dt \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(0).$$

Prova.

Seja $\delta > 0$. Por hipótese, existe um pequeno $r > 0$ tal que

$$|f(t) - f(0)| \leq \delta, \quad \text{se } t \in [-r, r].$$

A integral da função positiva φ_ϵ sobre a reta vale 1. Então, escrevemos

$$\begin{aligned}\left|\int f(t)\varphi_\epsilon(t)dt - f(0)\right| &= \left|\int f(t)\varphi_\epsilon(t)dt - \int f(0)\varphi_\epsilon(t)dt\right| \\ &\leq \int |f(t) - f(0)|\varphi_\epsilon(t)dt \\ &\leq \int_{-r}^{r} |f(t) - f(0)|\varphi_\epsilon(t)dt + \int_{|t|\geq r} |f(t)|\varphi_\epsilon(t)dt + |f(0)| \int_{|t|\geq r} \varphi_\epsilon(t)dt.\end{aligned}$$

Vejamos as três últimas integrais. A primeira e a última satisfazem

$$\int_{-r}^{r} |f(t) - f(0)|\varphi_\epsilon(t)dt \leq \delta \quad \text{e} \quad \int_{|t|\geq r} \varphi_\epsilon(t)dt = \int_{|s|\geq \frac{r}{\epsilon}} \varphi(s)ds \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Para a segunda, a expressão para φ_ϵ e a desigualdade $e^{|x|} \geq |x|$ garantem

$$\int\limits_{|t|\geq r} |f(t)|\varphi_\epsilon(t)dt = \int\limits_{|t|\geq r} \frac{|f(t)|e^{-\frac{\pi t^2}{\epsilon^2}}}{\epsilon}dt \leq \int\limits_{|t|\geq r} \frac{|f(t)|\epsilon^2}{\epsilon\pi t^2}dt \leq \frac{\epsilon}{\pi r^2}\|f\|_1 \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0 \clubsuit$$

Comentários.

◇ Seja $\rho = \rho(t) \geq 0$, contínua, de suporte compacto, com integral sobre a reta valendo 1 e com $\rho(0) > 0$. O segundo TVM para integrais mostra que

$$\int f(t)\rho_\epsilon(t)dt \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(0), \quad \text{onde } \rho_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\rho\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

Vide Capítulo 2 (Ferramentas).

3.7 A Transformada de Fourier Inversa

A fórmula de inversão permite recuperar f a partir de sua transformada de Fourier e pode ser apresentada para diferentes espaços de funções. Apesar do foco no espaço de Schwartz, veremos uma pouco mais geral.

Antes, vejamos o resultado abaixo. Este resultado passará para distribuições temperadas por dualidade, como veremos no capítulo Distribuições Temperadas.

Teorema 3.21 (Multiplicação ou Dualidade). *Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolutamente integráveis. Então,*

$$\int f(x)\widehat{g}(x)dx = \int \widehat{f}(y)g(y)dx.$$

Prova.

- Seja M o produto das integrais de $|f|$ e de $|g|$, ambas em $(-\infty,\infty)$. Fixado em retângulo $[-n,n]\times[-m,m]$ arbitrário, a restrição

  $$\Phi(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}, \text{ onde } (x,y)\in[-n,n]\times[-m,m],$$

  é um produto de três funções integráveis e satisfaz $|\Phi(x,y)| = |f(x)||g(y)|$. Pelo teorema de Fubini segue

  $$\iint\limits_{[-n,n]\times[-m,m]} \left|f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}\right| dxdy = \left(\int_{-n}^{n}|f(x)|dx\right)\left(\int_{-m}^{m}|g(y)|dy\right) \le M.$$

  Portanto, $\Phi(x,y)$ é absolutamente integrável (imprópriamente) no plano e

  $$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{-m}^{m}\int_{-n}^{n} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy.$$

  Fixemos m. Em $[-m,m]$, a função g é integrável propriamente e limitada. A continuidade e a continuidade uniforme dadas no Lema 3.3 mostram que

  $$\lim_{n}\left[\int_{-m}^{m}\int_{-n}^{n} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy\right] = \int_{-m}^{m}\widehat{f}(y)g(y)dy.$$

  Pela Proposição 3.2, a transformada $\widehat{f}$ é contínua e limitada. Logo, $\widehat{f}(y)g(y)$ é absolutamente integrável em $(-\infty,\infty)$. Donde, impondo $m\to\infty$ segue

  $$\lim_{m}\int_{-m}^{m}\widehat{f}(y)g(y)dy = \int \widehat{f}(y)g(y)dy.$$

  Complete (troque a ordem dos limites ou, ainda, a ordem de integração) ♣

Para recuperarmos f a partir de $\widehat{f}$, observemos que a fórmula de multiplicação pode nos dar informações sobre a relação entre f e $\widehat{f}$ desde que g e $\widehat{g}$ sejam facilmente manipuláveis. Ora, a gaussiana e^{-t^2} atende tal requisito.

Comentário.

Dada f absolutamente integrável, pode ocorrer que $\widehat{f}$ não é absolutamente integrável. O exemplo clássico (já citado) é a função seno cardinal

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

No Capítulo 2 (Ferramentas) foi mostrado que

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Entretanto, tal função não é absolutamente integrável pois (verifique)

$$\int \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável no sentido impróprio de Riemann é também Lebesgue integrável. Portanto, $\mathrm{sinc}(x)$ não é Lebesgue integrável.

A seguir, consideremos as gaussianas (vide seção anterior)

$$\varphi(t) = e^{-\pi t^2}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}, \quad \varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{\pi t^2}{\epsilon^2}} \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi_\epsilon}(\xi) = e^{-\pi \epsilon^2 \xi^2}.$$

Teorema 3.22 (Fórmula de Inversão de Fourier). *Seja f absolutamente integrável e com $\widehat{f}$ absolutamente integrável. Então temos*

$$f(t) = \int \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi, \quad \textit{nos pontos de continuidade de } f.$$

Prova.

- Seja t_0 um ponto de continuidade de f. A translação $F(t) = f(t + t_0)$ é contínua em $t = 0$, satisfaz $F(0) = f(t_0)$, é absolutamente integrável e $\widehat{F}(\xi) = e^{2\pi i t_0 \xi} \widehat{f}(\xi)$ é absolutamente integrável. Basta então mostrarmos que

$$F(0) = \int \widehat{F}(\xi) d\xi.$$

Em suma, podemos supor que o ponto de continuidade de f é $t_0 = 0$.

◇ Seja $g(\xi) = \varphi(\epsilon\xi)$ [troca de escala]. Pelo teorema 3.21 (multiplicação) segue

$$\int f(t)\widehat{g}(t)dt = \int \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Pela Proposição 3.8 (3) encontramos

$$\int f(t)\frac{1}{\epsilon}\widehat{\varphi}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)dt = \int \widehat{f}(\xi)\varphi(\epsilon\xi)d\xi.$$

A identidade $\widehat{\varphi} = \varphi$ acarreta

$$\int f(t)\varphi_\epsilon(t)dt = \int \widehat{f}(\xi)\varphi(\epsilon\xi)d\xi. \tag{3.22.1}$$

O lado esquerdo desta última equação tende a $f(0)$, pela Proposição 3.20.

O lado direito. Evidentemente temos

$$|\varphi(\epsilon\xi) - 1| \leq 2, \quad \text{para todo } \xi.$$

Seja $M = \|f\|_1$. Já vimos que $|\widehat{f}(\xi)| \leq M$ para todo ξ. Para todo $r > 0$ segue

$$\left|\int \widehat{f}(\xi)\varphi(\epsilon\xi)d\xi - \int \widehat{f}(\xi)d\xi\right| \;\leq\; M\int_{-r}^{r}|\varphi(\epsilon\xi) - 1|d\xi \;+\; 2\int_{|\xi|\geq r}|\widehat{f}(\xi)|d\xi.$$

Dado $\delta > 0$, sabemos que existe $r > 0$ tal que

$$2\int_{|\xi|\geq r}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \leq \delta.$$

Fixemos r. Pelo primeiro TVM para integrais encontramos

$$\int_{-r}^{r}|\varphi(\epsilon\xi) - 1|d\xi \;=\; 2r|\varphi(\epsilon\xi_\epsilon) - 1|, \quad \text{para algum } \xi_\epsilon \in [-r, r].$$

É evidente que $2r|\varphi(\epsilon\xi_\epsilon) - 1| \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$, pois $\varphi(0) = 1$.

O lado direito de (3.22.1) satisfaz então

$$\int \widehat{f}(\xi)\varphi(\epsilon\xi)d\xi \xrightarrow{\epsilon\to 0} \int \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Os lados de (3.22.1) revelam então a identidade

$$f(0) = \int \widehat{f}(\xi)d\xi \clubsuit$$

Corolário 3.23 (Propriedade de Integração). *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então,*

$$\widehat{f}(0) = \int f(t)dt \quad e \quad f(0) = \int \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Prova. A primeira fórmula é óbvia. A segunda segue da fórmula de inversão ♣

Comentários.

- É sabido que uma função (limitada) $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se e somente se o conjunto de descontinuidades de g é "pequeno". Isto é, se o conjunto de descontinuidades de g tem **medida nula**.

- Na teoria da integração de Lebesgue duas funções g e h que diferem apenas em um conjunto de medida nula são então identificadas. Isto é, temos $g \equiv h$ (lê-se g equivalente a h) e escrevemos então $g = h$.

- No Teorema da Inversão de Fourier, por hipótese a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é absolutamente integrável. Segue então que o conjunto de descontinuidades de f tem medida nula. Sendo assim, segundo a teoria da integral de Lebesgue,
$$\text{a função } f = f(t) \quad \text{e} \quad \text{a função } t \mapsto \int e^{2\pi i t\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$$
são iguais. Portanto, como a integral acima é uma função contínua (proposição 3.2), segundo a teoria de Lebesgue temos que f é contínua.

  Dito de outra forma, no que concerne à teoria da integração, podemos redefinir f nos seus "poucos" pontos de descontinuidade e obter uma função contínua.

No contexto da integral de Riemann não dispomos de uma identificação análoga à utilizada na teoria de Lebesgue e comentada acima. Ainda assim, e apesar que os pontos de descontinuidade de uma função Riemann-integrável não são necessariamente isolados, o corolário abaixo é ilustrativo.

Corolário 3.24. *Seja f como no enunciado do teorema da inversão de Fourier. Seja τ um ponto de descontinuidade isolada de f. Então, existe um número L satisfazendo*
$$\lim_{t\to\tau^+} f(t) = \lim_{t\to\tau^-} f(t) = L \quad e \quad f(\tau) \neq L.$$
Prova. Exercício ♣

O teorema 3.22 (inversão de Fourier) ainda precisa ser complementado. Para isto, introduzamos a **transformada inversa de Fourier**, usualmente denotada
$$\mathcal{F}^{-1}.$$

Definições e Notações.

- Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ arbitrária. O operador tempo-reverso $\mathcal{R}$, também indicado "$-$" e também dito **operador reverso** ou operador reflexão, é dado por

$$(\mathcal{R}f)(t) = f(-t) \quad \text{ou} \quad f^-(t) = f(-t).$$

[Em geometria, γ^- é a *curva reversa* à curva γ (uma "vai" a outra "volta").]

- Em mecânica quântica, $\mathcal{R}$ é dito operador paridade e é denotado $\mathcal{P}$.

- Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável, definimos a função

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(t) = \int e^{2\pi it\xi} g(\xi) d\xi.$$

Por brevidade, praticidade e analogia com $\widehat{f}$ [*chapéu* de f] alguns escrevem

$$\mathcal{F}^{-1}g = \check{g} \qquad \text{[lê-se o } \textit{check} \text{ de } g\text{]}.$$

Notemos as identidades equivalentes, com τ a variável na reta,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{R}\mathcal{F}g}, \qquad \boxed{\mathcal{F}^{-1}g(\tau) = \widehat{g}(-\tau).} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\mathcal{F}^{-1}g = \widehat{g}^-}.$$

Corolário 3.25. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $\widehat{f}$ absolutamente integráveis. Então temos*

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f, & \textit{nos pontos em que } f \textit{ é contínua,} \\ e \\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f & \textit{em todos os pontos.} \end{cases}$$

Prova.

- A fórmula de inversão garante $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ nos pontos em que f é contínua.

- Por outro lado, $\mathcal{F}^{-1}f(\tau) = \widehat{f}(-\tau)$ também é absolutamente integrável. A fórmula de inversão também garante, em cada ponto s em que f é contínua,

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f)(s) = \int e^{-2\pi is\tau} \widehat{f}(-\tau) d\tau = \int e^{2\pi is\tau} \widehat{f}(\tau) d\tau = f(s).$$

- O conjunto das descontinuidades de f não contém nenhum intervalo aberto, pois f é integrável em todo intervalo $[a, b]$. Logo, o conjunto dos pontos de continuidade de f é denso na reta. Então, $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f$ e $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$ são contínuas e coincidem em um conjunto denso. Segue então que elas coincidem em $\mathbb{R}$ ♣

Corolário 3.26. *Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz. Os operadores lineares*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad e \qquad \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

são bijetores e inversos um do outro. Ainda mais, dada φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos

$$\widehat{\widehat{\varphi}}^{-} = \varphi.$$

Prova.

- As afirmações sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ seguem da Proposição 3.9 e do Corolário 3.25.
- A fórmula anunciada segue do Teorema de inversão 3.22 ♣

Seja I o operador identidade definido no espaço

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \ f \text{ e } \widehat{f} \text{ são absolutamente integráveis e contínuas}\}.$$

Seja f em tal espaço. Encontramos

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(\tau) = \int e^{-2\pi i \tau \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(-\tau).$$

Donde segue

$$\boxed{\mathcal{F}^2 = \mathcal{R}.}$$

Temos então $\mathcal{F}^4 = \mathcal{R}^2 = I$. Destacamos

$$\boxed{\mathcal{F}^4 = I.}$$

Já vimos que $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{F}$. Donde segue $\mathcal{F}\mathcal{R}\mathcal{F} = I$ e então

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{R}.}$$

É importante a analogia entre $\mathcal{F}$ e o número complexo i. Para este, temos

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1 \text{ (uma reflexão)}, \quad i^3 = -i \ \text{ e } i^4 = 1.$$

Para $\mathcal{F}$ (definido nos dois espaços até aqui considerados), temos

$$\mathcal{F}^0 = I, \quad \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}^2 = \mathcal{R} \text{ (tempo reverso)}, \quad \mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1} \ \text{ e } \ \mathcal{F}^4 = I.$$

Comentários.

- ◇ Ao passo que a transformada de Fourier pode ser interpretada como trocando o *domínio-temporal* pelo *domínio-frequência*, e então com a transformada de Fourier inversa revertendo a troca, mais geometricamente a transformada de Fourier pode ser interpretada como uma rotação por $\pi/2$ rad. no domínio *tempo X frequência* (considerando o eixo Ox como eixo temporal e o eixo Oy como eixo das frequências) no sentido anti-horário.

domínio-t x domínio-ξ - Rotação do domínio $t \times \xi$.

A rotação do domínio tempo x frequência pode ser generalizada para definir a transformada de Fourier fracionária (um tópico mais avançado), que envolve rotações por outros ângulos.

- ◇ Estabelecer resultados para funções como nas duas classes até aqui consideradas : o espaço de Schwartz e o espaço das funções f que são absolutamente integráveis, contínuas e nulas no infinito não é pouco. De fato, considerando a topologia adequada, tais espaços são densos em muitos dos espaços em que é estudada a transformada de Fourier.

- ◇ No capítulo destinado ao estudo do espaço das **distribuições temperadas** [para antecipar, este é o espaço dos funcionais lineares contínuos

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},$$

munindo $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de uma topologia adequada] ampliaremos de maneira significativa a noção de transformada de Fourier.

3.8 Fórmulas de Parseval e Plancherel.

Consideremos o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínuas e tais que

$$\int |f(t)|^2 dt \ \text{ é finita.}$$

Dizemos que f é de quadrado integrável. Consideremos duas funções f e g neste conjunto e $\lambda \in \mathbb{C}$. É claro que λf pertence a tal conjunto. Ainda, a desigualdade

$$|fg| \leq |f|^2 + |g|^2 \qquad \text{(cheque)}$$

mostra que $f + g$ é de quadrado integrável. Isto é, tal conjunto de funções é um espaço vetorial complexo. Ainda com quadrado integrável, temos as conjugadas

$$\overline{f}(t) = \overline{f(t)} \quad e \quad \overline{g}(t) = \overline{g(t)}$$

Produto interno. Dadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com quadrado integrável e contínuas, definimos o produto interno complexo

$$(f, g) = \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$(\lambda f, g) = \int \lambda f(t)\overline{g(t)}dt = \lambda(f, g)$$

e também

$$(f, \lambda g) = \int f(t)\overline{\lambda g(t)}dt = \overline{\lambda}(f, g).$$

Notemos que

$$(f, g) = \int f(t)\overline{g(t)}dt = \overline{\int \overline{f(t)}g(t)dt} = \overline{(g, f)}.$$

É simples mostrar as demais condições necessárias a um produto interno complexo. A hipótese f contínua garante que

$$\text{se } (f, f) = 0 \text{ então } \ f = 0 \ \text{ (isto é, } f \text{ é identicamente nula).}$$

Está então bem definida a norma

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int |f(t)|^2 dt}.$$

A seguir, suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são absolutamente integráveis e contínuas. Já vimos que a hipótese sobre a continuidade de $\widehat{f}$ é supérflua, mas a enfatizamos para destacar propriedades simetricas de f e $\widehat{f}$.

Introduzamos a variável τ para pontos na reta real. Observemos que,

$$\boxed{(\mathcal{F}^{-1}f)(\tau) = \widehat{f}(-\tau).}$$

Escrevamos a propriedade de simetria [Proposição 3.8 (6)], na forma

$$\boxed{\widehat{\overline{f}}\,(\tau) = \overline{\widehat{f}}\,(-\tau).}$$

Teorema 3.27 (Fórmulas de Parseval e Plancherel). *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que f, g, $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são absolutamente integráveis e contínuas. Então, as quatro são de quadrado integrável e valem as propriedades*

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}) \qquad e \qquad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

Prova.

- ⋄ A identidade $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ e o lema de Riemann-Lebesgue garantem que $|f(\tau)| \to 0$ se $|\tau| \to \infty$. Para τ grande o suficiente temos $|f(\tau)|^2 \leq |f(\tau)|$ e então f é de quadrado integrável. Analogamente para as demais.

- ⋄ Pelo teorema de inversão da transformada de Fourier (Teorema 3.22), a fórmula de multiplicação (Teorema 3.21) e as fórmulas destacadas acima [fórmula para $\mathcal{F}^{-1}$ e fórmula de simetria na Proposição 3.8 (6)] segue

$$\begin{aligned}
(f, g) &= \int f(\tau)\overline{g}(\tau)d\tau = \int f(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\overline{g})(\tau)d\tau \\
&= \int \widehat{f}(\tau)\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(\tau)d\tau = \int \widehat{f}(\tau)\,\widehat{\overline{g}}\,(-\tau)d\tau \\
&= \int \widehat{f}(\tau)\,\overline{\widehat{g}}\,(\tau)d\tau \\
&= (\widehat{f}, \widehat{g}) \clubsuit
\end{aligned}$$

3.9 Fórmula para a Soma de Poisson.

A tranformada de Fourier, para funções definidas na reta e não periódicas, foi motivada pelas séries de Fourier de funções periódicas. A fórmula de Poisson mostra uma notável conexão entre a análise das funções periódicas e a análise de funções definidas na reta.

Lema 3.28 *Dada $f = f(t)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, a série de funções translações*

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t+n)$$

converge absolutamente e uniformemente em cada intervalo $[-m,m]$. Ainda, φ é contínua, periódica e com período 1 e então satisfazendo

$$\varphi(t+1) = \varphi(t) \text{ para todo } t.$$

Prova.

- ◇ Convergência. O decrescimento de f garante uma constante $C > 0$ tal que

  $$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}, \text{ para todo } t.$$

  Seja t em $[-m,m]$. Para todo $|n| \geq 2m$ segue $|n+t| \geq |n|/2$. Logo,

  $$\sum_{|n|\geq 2m} |f(t+n)| \leq C \sum_{|n|\geq 2m} \frac{4}{n^2}.$$

  Pelo teste-M de Weierstrass, a série de funções sob consideração converge uniformemente e absolutamente em $[-m,m]$. Logo, φ está bem definida.

- ◇ Continuidade. Cada termo da série é uma função contínua e a convergência é uniforme. Logo, φ é contínua.

- ◇ Periodicidade. Trivial♣

A análise de Fourier nos indica uma outra versão periódica de f. Escrevamos

$$f(t) = \int e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

e consideremos sua versão discreta.

Lema 3.29 *Dada $f = f(t)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, a série de Fourier*

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i t n}$$

converge absolutamente e uniformemente na reta real. Ainda, ψ é contínua, periódica e com período 1 e então satisfazendo

$$\psi(t+1) = \psi(t) \text{ para todo } t.$$

Prova.

- Convergência. O decrescimento de $\widehat{f}$ garante uma constante $C > 0$ tal que

  $$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{n^2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^*.$$

  Logo,

  $$\sum_{\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n) e^{2\pi i t n}\right| \leq |\widehat{f}(0)| + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{C}{n^2}.$$

  Pelo teste-M de Weierstrass, a série de Fourier converge uniformemente e absolutamente em toda a reta. Logo, ψ está bem definida.

- Continuidade. Cada termo da série é uma função contínua e a convergência é uniforme. Logo, ψ é contínua.

- Periodicidade. Trivial ♣

Teorema 3.30 (Fórmula da soma de Poisson). *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i t n}.$$

Em particular,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

6.10 Teorema de Paley-Wiener.

Um teorema de Paley-Wiener é um resultado que relaciona o decaimento de f no infinito com a analiticidade [definição abaixo] da transformada de Fourier.

O teorema de Paley-Wiener (o que veremos) é um resultado importante (todos eles o são) e já um tanto sofisticado em análise de Fourier e não será utilizado nos próximos capítulos. No entanto, além de sua importância, apresenta uma grande oportunidade para pormos em uso a teoria já desenvolvida.

Já comparamos o decaimento de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com a diferenciabilidade de $\widehat{f}$. Paley-Wiener aprofunda tal comparação e estabelece que f tem "máxima forma de decaimento" se e somente se $\widehat{f}$ tem "máxima forma de diferenciabilidade". Rigorosamente, f é infinitamente derivável e de suporte compacto se e só se $\widehat{f}$ é analítica no plano complexo [definição abaixo] e satisfaz uma condição adicional.

Definição. *Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. A função g é* **analítica** *se para cada ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ existem uma bola aberta $B(z_0; r)$, de raio $r = r(z_0) > 0$, e uma sequência de coeficientes complexos $b_0, b_1, b_2, \ldots$ (dependentes de z_0) tal que temos*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in B(z_0; r).$$

A função g é **inteira** *se existe uma série de potências $\sum a_n z^n$, com coeficientes complexos $a_0, a_1, a_2, \ldots$, satisfazendo*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Mantendo a notação, a série $\sum a_n z^n$ tem raio de convergência $+\infty$ e pelo teste-M converge uniformemente em cada disco compacto $\{z : |z| \le R\}$. Dada uma curva fechada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 (ou mesmo C^1 por partes), temos

$$\int_\gamma g(z)dz = \sum a_n \int_\gamma z^n dz = 0, \quad \text{pois} \quad \int_\gamma z^n dz = \int_a^b \gamma(t)^n \gamma'(t)dt = \frac{\gamma(t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = 0.$$

Dado $r > 0$, definimos

$$\mathbf{C_c^\infty([-r, r])} = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ com } f \text{ infinitamente derivável e } \operatorname{supp}(f) \subset [-r, r] \Big\}.$$

Dividamos a prova do Teorema de Paley-Wiener em dois resultados (a "ida" e a "volta") que se complementam. Comecemos com a "ida".

Teorema 3.31 (Paley-Wiener). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável. Então, $f \in C_c^\infty([-r,r])$ se e só se se a transformada de Fourier $\widehat{f}$ tem uma extensão*

$$\widehat{f}(z) = \int e^{-2\pi izt} f(t)dt, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

inteira que satisfaz a condição: para todo n existe $C_n > 0$ tal que

$$|\widehat{f}(z)| \leq C_n \frac{e^{2\pi r|Im(z)|}}{(1+|z|)^n}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3.31.1}$$

Prova da "ida".

- Bem definida. Óbvio, pois a integral ocorre em $[-r,r]$.

- Inteira. Fixemos $z \in \mathbb{C}$. Seja t a variável em $[-r,r]$. Temos
$$e^{-2\pi izt} = \sum \frac{(-2\pi izt)^m}{m!}, \quad \left|\frac{(-2\pi izt)^m}{m!}\right| \leq \frac{(2\pi|z|r)^m}{m!} \quad \text{e} \quad \sum \frac{(2\pi|z|r)^n}{n!} \leq e^{2\pi|z|r}.$$
Pelo Teste-M de Weierstrass segue
$$e^{-2\pi izt} f(t) = \sum \frac{(-2\pi izt)^m}{m!} f(t), \text{ com convergência uniforme em } [-r,r].$$
É lícito integrar a série termo a termo. Obtemos
$$\int e^{-2\pi izt} f(t)dt = \sum a_m z^m \text{ e coeficientes } a_m = \frac{(-2\pi i)^m}{m!} \int t^m f(t)dt.$$
Os coeficientes a_m independem de z. Logo, $\widehat{f}$ é inteira.

- Estimativa. Integrando por partes segue [o supp(f) é compacto]
$$z \int e^{-2\pi izt} f(t)dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-2\pi izt}}{-2\pi i}\right) f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-2\pi izt} f'(t)dt.$$
Para $n = 0$ e por indução, para $n = 1, 2, \ldots$, temos
$$z^n \int e^{-2\pi izt} f(t)dt = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int e^{-2\pi izt} f^{(n)}(t)dt.$$
Pela desigualdade triangular para integrais segue
$$|z^n \widehat{f}(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{2\pi \mathrm{Im}(z)t} |f^{(n)}(t)|dt.$$
Donde segue
$$|z|^n |\widehat{f}(z)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_1}{(2\pi)^n} e^{2\pi|\mathrm{Im}(z)|r}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$
É então trivial ver que existe uma constante $c_n > 0$ satisfazendo
$$(1+|z|)^n |\widehat{f}(z)| \leq c_n e^{2\pi|\mathrm{Im}(z)|r}.$$
A "ida" está provada.

Prova da "volta".

- Continuidade. A condição (3.31.1) mostre que $\widehat{f}$ é absolutamente integrável [escreva $z = \xi + i0$ e escolha $n = 2$, cheque], . Pelo teorema de inversão temos

$$f(t) = \int \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i t\xi} d\xi \ \text{ nos pontos de continuidade de } f.$$

Tal integral define uma função contínua na variável ξ e f é contínua exceto um conjunto de medida nula. Então, pela identificação entre funções integráveis que diferem em um conjunto de medida nula, f é contínua.

- Infinitamente derivável. Dado n, a função $F(t,\xi) = e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)$ é tal que

$$\frac{\partial^n F}{\partial t^n}(t,\xi) = (2\pi i\xi)^n e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi) \text{ é continua no plano } \mathbb{R}^2.$$

Pela condição (3.31.1), existe uma constante $B_n > 0$ satisfazendo

$$\left|\frac{\partial^n F}{\partial t^n}(t,\xi)\right| = |(2\pi i\xi)^n \widehat{f}(\xi)| \leq \frac{B_n}{1+\xi^2} \text{ em todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

Logo, pelo teorema da derivação sob o sinal de integração [vide Capítulo 2 - Ferramentas - seção 2.12], a função f é infinitamente derivável na reta.

- O suporte de f. Fixemos $t \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, ambos arbitrários. Consideremos o contorno retangular Γ indicado abaixo.

Figura 20: Contorno retangular Γ de vértices $-N$, N, $N + ib$ e $-N + ib$.

A função $e^{2\pi i t z}\widehat{f}(z)$ é inteira e portanto dada por uma série de potências que converge uniformemente e absolutamente em todo o plano complexo. Integrando termo a termo [podemos, pois o raio de convergência é ∞] vemos que $e^{2\pi i t z}\widehat{f}(z)$ tem uma primitiva que também é inteira. Então, como Γ é fechada, segue

$$\int_\Gamma e^{2\pi i t z}\widehat{f}(z)dz = 0.$$

Donde segue

$$0 = \int_{-N}^{N} e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi + \int_{0}^{b} e^{2\pi i t(N+is)}\widehat{f}(N+is)ds$$
$$-\int_{-N}^{N} e^{2\pi i t(\xi+ib)}\widehat{f}(\xi+ib)d\xi - \int_{0}^{b} e^{2\pi i t(-N+is)}\widehat{f}(-N+is)ds.$$

A condição (3.31.1) garante uma constante C tal que [o sinal de b é desconhecido]

$$\left|\int_{0}^{b} e^{2\pi i t(N+is)}\widehat{f}(N+is)ds\right| \leq \left|\int_{0}^{b} \frac{e^{-2\pi ts}Ce^{2\pi r|s|}}{1+|N+is|}ds\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Analogamente,

$$\int_{0}^{b} e^{2\pi i t(-N+is)}\widehat{f}(-N+is)ds \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Portanto, temos

$$\int e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \int e^{2\pi i t(\xi+ib)}\widehat{f}(\xi+ib)d\xi.$$

Donde segue que existe uma constante D (independente de t e b) tal que

$$|f(t)| \leq D\int \frac{e^{-2\pi tb}e^{2\pi r|b|}}{1+|\xi+ib|^2}d\xi, \text{ para todo} b.$$

Logo, existe uma constante E (independente de t) tal que

$$|f(t)| \leq Ee^{-2\pi tb}e^{2\pi r|b|} = Ee^{2\pi(r|b|-tb)}, \text{ para todo } b.$$

Seja

$$b = \lambda t, \text{ com } \lambda > 0.$$

Então, temos

$$|f(t)| \leq Ee^{2\pi\lambda|t|(r-|t|)}.$$

É trivial ver que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{2\pi\lambda|t|(r-|t|)} = 0 \text{ se } |t| \geq r.$$

Concluímos então que

$$\mathrm{supp}(f) \subset [-r, r] \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.

2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.

3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).

4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999

5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.

7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

$\varnothing$

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`