TRANSFORMADA DE FOURIER (Capítulo 2 - Ferramentas)

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira (ano 2015) oliveira@ime.usp.br

Objetivos.

.

CAPÍTULO 2 - FERRAMENTAS

2.1 Integral de Riemann (Teorema de Caracterização).

2.1.A - Introdução.

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. A **integral de Riemann** de f é definida pelo limite (se este existir)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,,$$

onde $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$,

$$|\mathcal{P}| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\} \text{ é a norma da partição } \mathcal{P},$$

$$\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\} \text{ é uma escolha}$$

qualquer de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, \ldots, n$, subordinada a $\mathcal{P}$ e

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n\,,$$

é a **soma de Riemann** de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

A **soma inferior** de Darboux e a **soma superior** de Darboux da função f e em relação à partição $\mathcal{P}$ são, respectivamente,

$$s(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\,, \quad m_i = \inf\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \quad \text{e}$$

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i\,, \quad M_i = \sup\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\,\}.$$

Segue uma ilustração para as somas de Darboux de uma função.

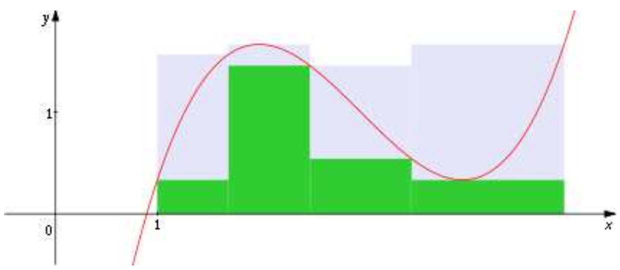

Figura 1: Soma inferior e soma superior (Darboux), com quatro sub-intervalos.

Notação. Dado $A \subset [a,b]$, definimos

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad \sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

A seguir, mostremos que à medida que refinamos as partições (incluindo mais e mais pontos), então as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem. Ainda mais, toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior.

Observação 1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Valem as propriedades abaixo.*

(a) Se I e J são subintervalos de $[a,b]$ e $I \subset J$, então

$$\inf_J f \leq \inf_I f \leq \sup_I f \leq \sup_J f.$$

(b) Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são partições de $[a,b]$ então, ordenando naturalmente $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, temos que $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é também uma partição de $[a,b]$. Ainda mais,

$$s(f;\mathcal{P}_1) \leq s(f;\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f;\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f;\mathcal{P}_2).$$

(c) Se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{E}$ é uma escolha subordinada a $\mathcal{P}$ então,

$$s(f;\mathcal{P}) \leq S(f;\mathcal{P};\mathcal{E}) \leq S(f;\mathcal{P}).$$

Prova.

(a) Trivial.

(b) A primeira afirmação é evidente. Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, é um subintervalo determinado pela partição $\mathcal{P}_1$ então I_i é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, para $j = 1, \ldots, N$ e $N \geq n$, determinados pela partição $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ que estão contidos em I_i. Pelo item (a) temos as inequações

$$\left(\inf_{I_i} f\right) \Delta x_i \;=\; \left(\inf_{I_i} f\right) \sum_{j \,:\, J_j \subset I_i} \Delta y_j \;\leq\; \sum_{j \,:\, J_j \subset I_i} \left(\inf_{J_j} f\right) \Delta y_j \quad \text{e}$$

e

$$\sum_{j \,:\, J_j \subset I_i} \left(\sup_{J_j} f\right) \Delta y_j \;\leq\; \left(\sup_{I_i} f\right) \sum_{j \,:\, J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\sup_{I_i} f\right) \Delta x_i.$$

Destacando o primeiro e o terceiro termos destas e somando em i segue

$$s(f;\mathcal{P}_1) \leq s(f;\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f;\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f;\mathcal{P}_1).$$

Analogamente, $S(f;\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f;\mathcal{P}_2)$. Agora, (b) é trivial.

(c) Evidente♣

Dizemos que a partição $\mathcal{Q}$ **refina** a partição $\mathcal{P}$ se $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

A figura abaixo mostra que ao refinarmos a partição então as somas inferiores crescem e as somas inferiores decrescem.

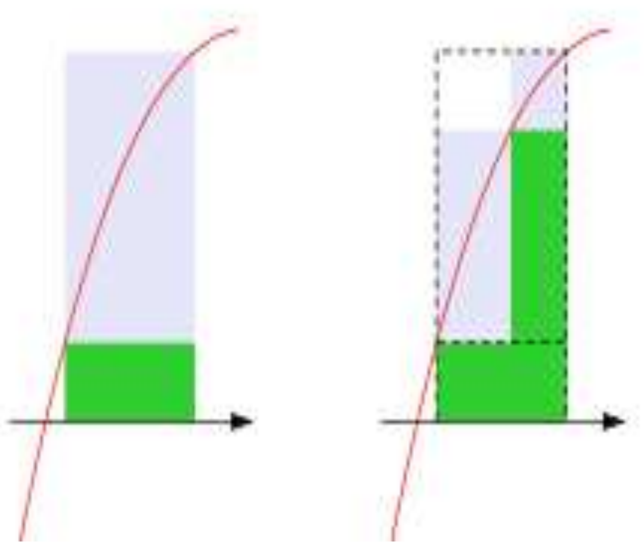

Figura 2: Somas inferiores aumentam e somas superiores diminuem.

Proposição 2. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então existem*

$$\begin{cases} \alpha = \sup\{s(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\} \\ e \\ \beta = \inf\{S(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\} \end{cases}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova. Segue imediatamente da Observação 1(b)♣

O número α é a **integral inferior** de Darboux de f. O número β é a **integral superior** de Darboux de f. Usualmente indicamos a integral inferior e a integral superior (ambas de Darboux) por, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Teorema 3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é Riemann integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que*

$$0 \leq S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Prova.

($\Leftarrow$) Sob tal hipótese, claramente as integrais inferior e superior (de Darboux) são iguais a um número L. Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P}$ como na hipótese. Segue

$$s(f;\mathcal{P}) \leq L \leq S(f;\mathcal{P}).$$

Sejam $\mathcal{Q}$ uma partição qualquer que refina $\mathcal{P}$ e uma escolha qualquer $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{Q}$. Pela observação 1(b) seguem as desigualdades: $s(f;\mathcal{P}) \leq s(f;\mathcal{Q}) \leq S(f;\mathcal{Q};\mathcal{E}) \leq S(f;\mathcal{Q}) \leq S(f;\mathcal{P})$. Segue então que

$$|S(f;\mathcal{Q};\mathcal{E}) - L| \leq S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) < \epsilon.$$

($\Rightarrow$) Sejam $\epsilon > 0$ e

$$L = \int_a^b f(t)dt.$$

Por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ tal que

$$L - \epsilon < S(f;\mathcal{P};\mathcal{E}) < L + \epsilon,$$

qualquer que seja a escolha $\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\}$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sejam

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Fixemos $c_2 \in [x_1, x_2], \ldots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Variando c_1 em $[x_0, x_1]$ obtemos

$$L - \epsilon \leq m_1 \Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq S(f;\mathcal{P};\mathcal{E}) \leq M_1 \Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq L + \epsilon.$$

A seguir, variando c_2 obtemos

$$L - \epsilon \leq m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \sum_{i=3}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \sum_{i=3}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq L + \epsilon.$$

Iterando encontramos

$$L - \epsilon \leq s(f;\mathcal{P}) \leq S(f;\mathcal{P}) \leq L + \epsilon \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

2.1.B - Compacidade na reta.

Definições e Notações.

- Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, e uma família ordenada de índices naturais distintos $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ dizemos que a sequência
$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$$
é uma subsequência da sequência (x_n).

- A sequência de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente se $X_n \subset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente se $X_n \supset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Seja K um subconjunto da reta e I um conjunto arbitrário de índices. Dizemos que $\bigcup_{i\in I} O_i$ é uma cobertura aberta de K se O_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, para todo $i \in I$, e se
$$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i.$$

- Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$, o intervalo aberto $(p-\epsilon, p+\epsilon)$ contém ao menos um ponto de X distinto de p.

Seja p um ponto de acumulação de X. No intervalo $(p-1, p+1)$ existe um ponto x_1 de $X \smallsetminus \{p\}$. Pelo mesmo motivo, no intervalo $(p-r_2, p+r_2)$ de raio
$$r_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |x_1 - p|\right\}$$
existe um ponto x_2 de $X \smallsetminus \{p\}$. Iterando tal argumentação, construímos uma sequência (x_n) de pontos de $X\smallsetminus\{p\}$ tal que x_n pertence ao intervalo $(p-r_n, p+r_n)$ de raio
$$r_n = \min\{1/n, |x_{n-1} - p|\}.$$
Vemos assim que existe uma sequência (x_n) , de pontos distintos de $X \smallsetminus \{p\}$, convergente a p. Consequentemente, para todo $\epsilon > 0$ segue que o intervalo aberto $(p-\epsilon; p+\epsilon)$ contém infinitos pontos de $X \smallsetminus \{p\}$.

Teorema 4. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}$. São equivalentes:*

(a) Toda cobertura de K por conjuntos abertos tem subcobertura finita (Propriedade de Heine-Borel).

(b) K é fechado e limitado (Teorema de Heine, 1872 - Borel, 1895).

Prova.

$(a) \Rightarrow (b)$

Dado $x \in K^c$, consideremos a sequência decrescente de intervalos fechados

$$\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right], \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Claramente,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] = \{x\}.$$

Passando ao complementar temos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]^c = \{x\}^c = \mathbb{R} \setminus \{x\},$$

uma óbvia cobertura de K pela reunião de uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \left[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right]^c.$$

Passando novamente ao complementar temos,

$$K^c \supset \left[x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right] \supset \left(x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right) \supset \{x\}.$$

Logo, o complementar K^c é aberto e K é fechado.

É trivial ver que K é limitado. Pois, a coleção de intervalos abertos na reta $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura de K por abertos e então, por hipótese, admite subcobertura finita. Donde segue que existe N tal que $K \subset (-N, N)$.

(b) $\Rightarrow (a)$

Seja O um conjunto aberto arbitrário em $\mathbb{R}$. Para cada ponto $p \in O$, existe um número natural $n = n(p)$ tal que

$$\left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}\right) \subset O.$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso na reta, existe um racional $r = r(p;n) \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|r - p| < \frac{1}{2n}.$$

É fácil ver que

$$p \in \left(r - \frac{1}{2n}, r + \frac{1}{2n}\right) \subset O.$$

Logo,

$$O = \bigcup_{p \in O} \left(r(p;n) - \frac{1}{2n}, r(p;n) + \frac{1}{2n}\right).$$

Assim, todo aberto O é uma união enumerável de conjuntos da coleção enumerável

$$\mathcal{C} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots\}$$

de intervalos abertos centrados em números racionais e de raio racional.

Desta forma dada $\bigcup_{j \in J} O_j$ uma cobertura qualquer de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável de K, digamos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Trocando O_n por $O_1 \cup \cdots \cup O_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma sequência crescente de abertos.

Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ (uma união crescente de abertos) não admite uma subcobertura finita de K. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K \setminus O_n$. Então, a sequência (x_n) está contida no conjunto K que por hipótese é fechado e limitado. Toda sequência limitada na reta tem subsequência convergente. Logo, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente a um ponto x na reta. Por hipótese, o conjunto K é fechado. Logo, o ponto x pertence a K. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_N$. Logo, por definição de convergência, existe um índice $n_k > N$ tal que $x_{n_k} \in O_N$. Por outro lado, por construção $x_{n_k} \notin O_{n_k}$ e $O_{n_k} \supset O_N$. Donde segue $x_{n_k} \notin O_N$ ↯

2.1.C - Oscilação.

Em cursos de Cálculo em uma variável real é visto que a descontinuidade de uma função pode ser de primeira espécie, também dita de tipo "salto" (os limites laterais existem e são distintos), e de segunda espécie (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada $f : A \to \mathbb{R}$ limitada, com $A \subset \mathbb{R}$, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de A.

Definição. Para cada $\delta > 0$ sejam

$$M(a, f, \delta) = \sup\left\{f(x) :\ x \in A \text{ e } |x - a| < \delta\right\}$$
$$m(a, f, \delta) = \inf\left\{f(x) :\ x \in A \text{ e } |x - a| < \delta\right\}$$

Fixado a em A, é fácil ver que $M(a, f, \delta)$ é uma função decrescente quando $\delta \to 0$ e que $m(a, f, \delta)$ é uma função crescente quando $\delta \to 0$.

Assim, a diferença $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$ é decrescente quando $\delta \to 0$. Consequentemente, sempre existe a **oscilação de f em a**:

$$\text{osc}(f, a) = \lim_{\delta \to 0}[M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)].$$

Proposição 5 (Propriedades da Oscilação). *Valem as propriedades abaixo.*

(i) f é contínua em a se e somente se $osc(f, a) = 0$.

(ii) Dado $\epsilon > 0$, existe um aberto $\mathcal{O}$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\left\{a \in A :\ osc(f, a) < \epsilon\right\} = \mathcal{O} \cap A.$$

(iii) Se A é fechado então, para todo $\epsilon > 0$, é fechado o conjunto

$$\left\{a \in A :\ osc(f, a) \geq \epsilon\right\}.$$

Prova.

(i) $(\Rightarrow)$ Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ se $|x - a| < \delta$ e $x \in A$. Logo, $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \leq 2\epsilon$. Donde segue, $\text{osc}\,(f, a) \leq 2\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\text{osc}\,(f, a) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Solicitamos ao leitor.

(ii) Fixemos um ponto a arbitrário em

$$A_\epsilon = \{a \in A : \ \mathrm{osc}(f,a) < \epsilon\}.$$

Então, existe $\delta = \delta_a > 0$ tal que $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta) < \epsilon$. Ainda, para um ponto arbitrário $x \in (a-\delta; a+\delta)$ e considerando o raio $r = \delta - |x-a| > 0$, é claro que temos

$$(x-r, x+r) \subset (a-\delta, a+\delta).$$

Portanto, para todo ponto $x \in (a-\delta, A+\delta) \cap A$ é válida a desigualdade

$$M(x,f,r) - m(x,f,r) \leq M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta) < \epsilon.$$

Assim, para todo x na intersecção $(a-\delta, a+\delta) \cap A$ temos $\mathrm{osc}(f,x) < \epsilon$. Finalmente, para a percorrendo A_ϵ, escolhemos

$$\mathcal{O} = \bigcup_{a \in A_\epsilon} (a - \delta_a; a + \delta_a).$$

(iii) Basta notar que por (ii) temos

$$\{a \in A : \ \mathrm{osc}(f,a) \geq \epsilon\} = (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}) \cap A \clubsuit$$

Observação. Seja D o conjunto de descontinuidades da função $f : A \to \mathbb{R}$, com f limitada. Dado $\epsilon > 0$, seja

$$D_\epsilon = \{a \in A : \ \mathrm{osc}(f,a) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup \ldots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \ldots .$$

2.1.D - Conteúdo Nulo e Medida Nula.

Definição. Seja D contido em $\mathbb{R}$.

- D tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita de intervalos compactos $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tais que $D \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$ e

$$\sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \epsilon,$$

com $\mathrm{m}(I_i)$ a *medida euclideana* (comprimento) de I_i.

- D tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos compactos $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$ tais que $D \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k \cup \ldots$ e

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(I_i) \leq \epsilon \quad [\text{isto é, } m(I_1) + \cdots + m(I_k) \leq \epsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}].$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "intervalos compactos" pela condição "intervalos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

Lema 6. *Seja K compacto e de medida nula. Então, K tem conteúdo nulo.*
Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de intervalos abertos tal que

$$K \subset I_1 \cup I_2 \cdots \cup I_k \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m(I_k) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como K é compacto, existe N tal que

$$K \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N.$$

É óbvio que

$$m(I_1) + \cdots + m(I_N) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \clubsuit$$

Lema 7. *Seja X_1, $X_2, \ldots, X_j, \ldots$ uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}$. Então,*

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$$

tem medida nula.

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

Como X_1 tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de intervalos $I_1^1, I_2^1, I_3^1, \ldots, I_i^1, \ldots$ satisfazendo

$$X_1 \subset I_1^1 \cup I_2^1 \cup \cdots \cup I_i^1 \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(I_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice j arbitrário em $\mathbb{N}$, existe uma coleção enumerável de intervalos $I_1^j, I_2^j, \ldots, I_i^j, \ldots$ satisfazendo

$$X_j \subset I_1^j \cup I_2^j \cup \cdots \cup I_i^j \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(I_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é um conjunto contável, segue que a coleção de intervalos

$$\mathcal{C} = \{I_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$$

é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de intervalos em $\mathcal{C}$ está contida em alguma sub-coleção finita do tipo

$$\{I_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\},$$

para N suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m(I_i^j) = \sum_{i=1}^{N} m(I_i^1) + \sum_{i=1}^{N} m(I_i^2) + \cdots + \sum_{i=1}^{N} m(I_i^N) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^N} = \epsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) < \epsilon.$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(I_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo, X tem medida nula ♣

Teorema 8 (Caracterização - Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Então, f é integrável se e somente se D tem medida nula.*

Prova.

($\Rightarrow$) Já vimos que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup \cdots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \cdots, \text{ onde } D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : \operatorname{osc}(f; x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Como a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada $D_{1/n}$ tem medida nula. Fixemos n.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja $\mathcal{S}$ a coleção dos sub-intervalos I_i determinados por $\mathcal{P}$ e que contém algum ponto de $D_{\frac{1}{n}}$ em seu interior. Para todo I_i em $\mathcal{S}$ temos

$$M_i - m_i \geq \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{I_i \in \mathcal{S}} m(I_i) \leq \sum_{I_i \in \mathcal{S}} (M_i - m_i) m(I_i) \leq S(f; P) - s(f; P) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde segue

$$\sum_{I_i \in \mathcal{S}} m(R_i) < \epsilon.$$

É claro que $D_{\frac{1}{n}}$ está contido na união dos intervalos em $\mathcal{S}$ com a união das extremidades dos intervalos em $\mathcal{P}$. Tais extremidades são intervalos degenerados de área zero e assim, cobrimos $D_{\frac{1}{n}}$ por um número finito de intervalos cuja soma das áreas é menor que ϵ. Logo, $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ temos que $D_\epsilon = \{x \in R : \operatorname{osc}(f, x) \geq \epsilon\}$ está contido em D e portanto tem medida nula. Pela Proposição 5 (iii) e pelo Teorema 4 segue que D_ϵ é compacto. Então, pelo Lema 6 segue que D_ϵ tem conteúdo nulo.

Consideremos uma quantidade finita de intervalos abertos I_1,...,I_l que recobre D_ϵ e tal que

$$m(I_1) + \cdots + m(I_l) < \epsilon.$$

Seja x um ponto arbitrário em $[a,b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_l)$. Temos $\operatorname{osc}(f,x) < \epsilon$. Logo, existe um intervalo aberto I_x centrado em x tal que a oscilação de f em $I_x \cap [a,b]$

$$\left[\text{isto é, } \sup_{I_x \cap [a,b]} f - \inf_{R_x \cap [a,b]} f\right]$$

é menor que ϵ. Então, como a reunião de tais intervalos abertos I_x recobre

$$K = [a,b] \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_l),$$

e K é compacto (fechado e limitado), existem $I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}$ tais que

$$K \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_m}.$$

Consideremos a coleção de intervalos abertos

$$\mathcal{C} = \{I_1, \ldots, I_l, I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}\}.$$

É óbvio que $[a,b]$ está contido na reunião dos intervalos em $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$ tal que cada sub-intervalo S de $\mathcal{P}$ está contido em um dos intervalos da coleção $\mathcal{C}$. Separemos os sub-intervalos determinados por $\mathcal{P}$ em duas coleções: $\mathcal{S}_1$ com os sub-intervalos contidos em algum I_j, onde $1 \leq j \leq l$, e $\mathcal{S}_2$ com os demais sub-intervalos determinados por $\mathcal{P}$.

Sejam M_S e m_S o supremo e o ínfimo de f retrita a S, respectivamente. Seja M tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x em $[a,b]$. Notemos que, se S pertence a $\mathcal{S}_2$ então S está contido em algum sub-intervalo I_{x_j}, com $1 \leq j \leq m$, e temos $M_S - m_S < \epsilon$. Ainda, se $S \in \mathcal{S}_1$ então $M_S - m_S \leq 2M$. Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S - m_s) m(S) \ + \ \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S - m_s) m(S) \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^{l} m(I_j) \ + \ \epsilon \sum_{S \in \mathcal{S}_2} m(S) \\ &\leq 2M\epsilon \ + \ \epsilon(b-a) \clubsuit \end{aligned}$$

Corolário 9. *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$. Valem as propriedades,*

(i) fg é integrável em $[a,b]$.

(ii) Suponhamos f positiva [isto é, $f \geq 0$]. Então, temos

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

se e somente se f é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.

Prova.

(i) Sejam $D(fg)$, $D(f)$ e $D(g)$, os conjuntos dos pontos de descontinuidade de fg, f e g, respectivamente. É óbvio que $D(fg) \subset D(f) \bigcup D(g)$. Pelo Teorema 8 temos que $D(f)$ e $D(g)$ tem ambos medida nula. Então, pelo Lema 7, o conjunto $D(fg)$ tem medida nula. Pelo Teorema 8 concluímos a integrabilidade de fg.

(ii) $(\Rightarrow)$ Seja x_0 um ponto de continuidade de f. Então, existe um sub-intervalo não degenerado $S \subset [a,b]$ tal que

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \in S.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0)}{2} m(S) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 0.$$

Portanto, $f(x_0) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Seja $\mathcal{P}$ uma partição arbitrária de $[a,b]$. Indiquemos por I_i os sub-intervalos desta partição. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula, segue que f não é descontínua em todos os pontos de I_i. Logo, f é contínua em ao menos um ponto de I_i. Então, devido à hipótese, f é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de f em relação a tal partição, $s(f;\mathcal{P}) = \sum_i m_i m(I_i) = 0$. Como esta soma inferior é arbitrária e f é integrável, concluímos que a integral de f é zero ♣

2.2 Integral de Riemann X Integral de Lebesgue

É frequentemente afirmado que a integração de Lebesgue é tão fácil de ensinar quanto a integração de Riemann. Isto é provavelmente verdadeiro, mas ainda tenho que me convencer de que é também tão fácil de aprender.

T. W. Körner, "A companion to analysis: a second and first second course in analysis", American Mathematical Society.

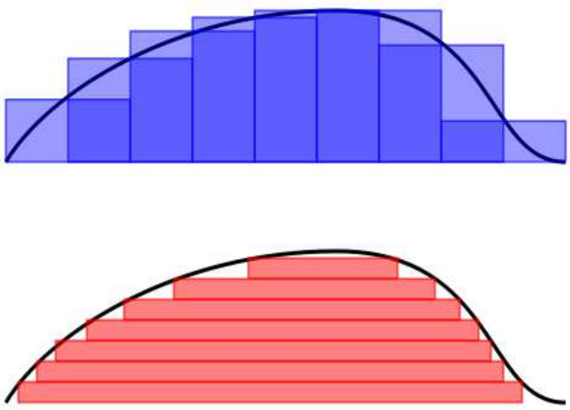

Figura 3: Interpretação para a integral de Riemann (figura superior) e para a integral de Lebesgue (figura inferior).

Uma frase interessante sobre a integral de Lebegue é

A integral de Lebesgue é aquela em que as linhas são adicionadas ao invés das colunas.

Pode-se dizer que a integral de Riemann é de inspiração *geométrica* pois é o limite de uma soma de áreas de retângulos $f(x_j)\Delta x_j$ e que a integral de Lebesgue é de inspiração *aritmética* pois é o limite de uma soma de valores assumidos $y_j$medida(E_j), onde $E_j = f^{-1}([y_j, y_{y_{j+1}}])$.

O texto abaixo é baseado em partes de *Why should one still teach Riemann integration*, por Paul Siegel, da Columbia University. Para o texto original e não editado, vide `http://mathoverflow.net/questions/52708`

Penso que três características devem ser observadas ao abordar integração.

1) Uma interpretação geométrica facilmente acessível.

2) Ferramentas que sejam rapidamente disponíveis (e.g. to teorema fundamental do cálculo).

3) Uma teoria flexível.

A integral de Lebesgue integral desconhece rivais quanto a (3), mas deixa a desejar quanto aos outros dois pontos de vista. Resultados básicos como o teorema da diferenciação de Lebesgue ou a fórmula para a mudança de variáveis não são transparentes do ponto de vista da teoria de Lebesgue que geometricamente não é melhor que a integral de Riemann. A integral de Riemann, com todas sua falhas, tem um bom equilíbrio entre interpretação geométrica e disponibilidade de ferramentas. Tem até mesmo, em uma instância, vantagem técnica sobre a teoria de Lebesgue pois é necessária a teoria de distribuições para justificar o valor principal de Cauchy de uma integral imprópria dentro da teoria de Lebesgue.

Por outro lado, para estudantes de doutorado (em matemática, física, engenharias e economia) é melhor utilizar a integral de Lebesgue e a integral de Riemann pode ser em larga medida ignorada.

2.3 Números Complexos

Neste texto i indica a unidade imaginária em $\mathbb{C}$ e então $i^2 = -1$. O conjunto

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de **conjunto dos números complexos**. Dado $z = a + ib$, com a e b reais, a parte real de z e a parte imaginária de z são, respectivamente,

$$\text{Re}z = a \quad \text{e} \quad \text{Im}z = b.$$

O conjunto $\mathbb{C}$ é munido das operações adição e multiplicação dadas por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + i(c + d) \quad \text{e} \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

com a, b, c e d reais quaisquer. Tais operações são comutativas e associativas.

O número $0 = 0 + i0$ é o elemento neutro da adição. O número $1 = 1 + i0$ é o elemento neutro da multiplicação. Todo número complexo $z = a + ib$ tem elemento oposto $(-a) + i(-b)$, indicado por $-z = -a - ib$. Dados z e w, ambos números complexos, definimos a operação subtração

$$z - w = z + (-w).$$

Dado $z = a+bi$, com a e b reais, o conjugado e o módulo de z são, respectivamente,

$$\overline{z} = a + i(-b) = a - ib \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Todo número complexo não nulo z tem elemento inverso, indicado por e dado por

$$z^{-1} \text{ ou } \frac{1}{z}, \quad \text{com } z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Dados z em $\mathbb{C}$ e w em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o quociente de z por w é indicado por

$$\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}.$$

Se $z \neq 0$, então temos

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Indicamos a circunferência unitária e centrada na origem por

$$S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |w| = 1\}.$$

2.4 Séries e Somas não Ordenadas

Séries. Dada uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (z_1, z_2, \ldots)$ de números complexos, a sequência $s_n = z_1 + \cdots + z_n$, com $n \geq 1$, é dita sequência das somas parciais da **série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

[Se considerarmos a sequêcia $(z_n)_{\mathbb{N}} = (z_0, z_1, \ldots)$, as definições são análogas.]

A série **converge** e tem por **soma (soma da série)** o número complexo z se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = z.$$

Neste caso, escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z.$$

Uma série complexa $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é dita **absolutamente convergente** se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < \infty.$$

Isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente e se somente se a série de números reais não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ é convergente a um número real (não negativo). Por propriedades da reta, temos que a série de números reais não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ é convergente se e somente se existe um número $M > 0$ satisfazendo

$$|z_1| + \cdots + |z_N| \leq M, \quad \text{para todo } N \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Lembremos que se uma série complexa $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Ainda mais, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é comutativamente convergente. Isto é, qualquer que seja a **permutação** (bijeção) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, o correspondente **rearranjo** (reordenação) $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ [rearranjo da série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$] é também uma série convergente e ainda temos

$$\big(z_{\sigma(1)} + z_{\sigma(2)} + z_{\sigma(3)} + \cdots\big) = \big(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\big), \quad \text{isto é,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Ainda melhor, se uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ é absolutamente convergente então podemos aplicar a muito prática ferramenta chamada soma não ordenada.

Soma não ordenada. Seja $(p_n)_{\mathbb{N}}$ tal que $p_n \geq 0$ para todo n, uma sequência de números não negativos (positivos ou nulos). Definimos a **soma (não ordenada)**

$$\sum p_n = \sum_{\mathbb{N}} p_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} p_n, \text{ onde } F \text{ é subconjunto finito de } \mathbb{N} \right\} \in [0, +\infty].$$

Se tal soma é finita, dizemos que (p_n) é **somável**.

Quando não há risco de ambiguidade, suprimimos a menção ao conjunto de índices para indicar uma particular soma não ordenada.

Seja F um subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Seja n em $\mathbb{N}$. Observemos que

$$\sum_{n \in F} p_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n \qquad \text{e} \qquad s_n = p_0 + \cdots + p_n \leq \sum p_n.$$

Logo,

$$\sum p_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n.$$

Seja $(x_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. A parte positiva de x_n e a parte negativa de x_n são definidas por, respectivamente,

$$p_n = \max(x_n, 0) = \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n \geq 0, \\ 0, & \text{se } x_n \leq 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad q_n = \max(-x_n, 0) = \begin{cases} -x_n, & \text{se } x_n \leq 0, \\ 0, & \text{se } x_n \geq 0. \end{cases}$$

Claramente temos $p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$. Ainda mais,

$$\begin{cases} x_n = p_n - q_n \\ |x_n| = p_n + q_n, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} p_n = \frac{|x_n| + x_n}{2}, \\ q_n = \frac{|x_n| - x_n}{2}. \end{cases}$$

Dizemos que a sequência (x_n) é somável se as sequências (p_n) e $q_n)$ são somáveis. Neste caso, a soma (não ordenada) é definida por

$$\sum x_n = \sum p_n - \sum q_n.$$

Seja $(z_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência complexa. Dizemos que (z_n) é somável se as sequências $(\mathrm{Re} z_n)_{\mathbb{N}}$ e $(\mathrm{Im} z_n)_{\mathbb{N}}$ são somáveis. Neste caso, a soma (não ordenada) é

$$\sum z_n = \sum \mathrm{Re} z_n + i \sum \mathrm{Im} z_n.$$

A sequência complexa (z_n) é dita **absolutamente somável** se existe M tal que

$$\sum_{n \in F} |z_n| \leq M, \quad \text{para todo subconjunto finito } F \subset \mathbb{N}.$$

Vejamos que (z_n) é absolutamente somável se e só se (z_n) é somável em $\mathbb{C}$. Escrevamos $z_n = x_n + iy_n$, com x_n e y_n reais. A seguir decompomos $x_n = p_n - q_n$, na parte positiva p_n e na parte negativa q_n, e decompomos $y_n = P_n - Q_n$, na parte positiva P_n e na parte negativa Q_n. Então, temos

$$0 \leq \min\{p_n, q_n, P_n, Q_n\} \leq \max\{p_n, q_n, P_n, Q_n\} \leq |z_n| \leq p_n + q_n + P_n + Q_n.$$

Donde segue que $\sum |z_n|$ é finita se e só se (p_n), (q_n), (P_n) e (Q_n) são somáveis.

Se a sequência (z_n) é absolutamente somável então existe o valor da **soma não ordenada**

$$\sum_{\mathbb{N}} z_n \text{ e escrevemos } \sum_{\mathbb{N}} z_n = z \in \mathbb{C}.$$

Pelos comentários anteriores, este número z pode ser computado considerando uma permutação arbitrária $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e então computando a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$. De uma segunda e abrangente maneira, podemos determinar o número z particionando o conjunto de índices $\mathbb{N}$ de uma forma totalmente arbitrária em uma coleção finita ou infinita de subconjuntos não vazios (cada qual finito ou infinito) dois a dois disjuntos, digamos que

$$\mathbb{N} = J_1 \uplus J_2 \uplus J_3 \uplus \qquad [\text{o símbolo } \uplus \text{ indica união disjunta}],$$

e então escrevermos

$$z = \sum_{n \in J_1} z_n + \sum_{n \in J_2} z_n + \sum_{n \in J_2} z_n + \cdots,$$

sendo que cada soma infinita $\sum_{n \in J_k} z_n$ pode ser computada indexando J_k nos números naturais de forma totalmente arbitrária, digamos que $J_k = \{k_1, k_2, k_3, \cdots\}$ [não é necessário que $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$], e então computando a soma da série correspondente $z_{k_1} + z_{k_2} + z_{k_3} + \cdots$.

Devido à primeira propriedade, dizemos que toda soma não ordenada é **comutativamente convergente**. Devido à segunda propriedade, dizemos que toda soma não ordenada é **associativamente convergente**.

A vantagem das somas não ordenadas sobre séries, se dá na propriedade associativa e na grande liberdade para computarmos o valor da soma não ordenada.

Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.

2.5 Exponencial Complexa

A função exponencial complexa. Dado $z \in \mathbb{C}$, seja a soma não ordenada

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Vejamos que é absolutamente somável a sequência

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

De fato, dado p o maior natural tal que $p \leq |z|$, então para $n > p$ temos

$$\frac{|z|^n}{n!} = \left[\frac{|z|^p}{p(p-1)\cdots 1}\right] \frac{|z|^{n-p}}{n(n-1)\cdots(p+2)(p+1)} \leq c_p \left(\frac{|z|}{p+1}\right)^{n-p}.$$

Donde segue que

$$1 + \frac{|z|}{1} + \cdots \frac{|z|^p}{p!} + \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots \leq \left[1 + \frac{|z|}{1} + \cdots + \frac{|z|^p}{p!}\right] + c_p \left[\frac{|z|}{p+1} + \left(\frac{|z|}{p+1}\right)^2 + \cdots\right] < \infty,$$

devido à convergência da série geométrica de razão $|z|/(p+1)$ menor que 1.

Então, está bem definida a exponencial complexa pela soma não ordenada

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Esta função satisfaz

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad \text{para quaisquer } z \text{ e } w \text{ em } \mathbb{C}.$$

Ainda, $\exp(z) = e^z$ é derivável e

$$\exp'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z.1 = e^z.$$

Dado um real θ, encontramos

$$e^{i\theta} = \sum_{n\geq 0} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n \text{ par}} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right).$$

Donde então segue a **Fórmula de Euler**,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R}.}$$

Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT225Cap7.pdf`.

2.6 Primeiro TVM para Integrais. Generalizado. Função Teste. O δ de Dirac.

2.6.A - Primeiro TVM para Integrais, Generalizado.

Motivação. Suponhamos que a média final M em um curso se dê pela média ponderada das notas $n_1, \ldots, n_k$, com respectivos pesos $p_1, \ldots, p_k$. Então,

$$M = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}.$$

Teorema (Primeiro TVM para Integrais, Generalizado). *Consideremos $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, com f contínua e g integrável e, ainda, $g \geq 0$ e*

$$\int_a^b g(x)\, dx > 0.$$

Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{2.6.1}$$

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ o mínimo de f e $M = f(x_2)$ o máximo de f. Se $x \in [a,b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}.$$

- $\diamond$ Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo teorema do valor intermediário existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que $f(c) = \gamma$.

- $\diamond$ Caso 2. Se $\gamma = M$ então

  $$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\, dx = 0.$$

  Logo, pela desigualdade $[M - f(x)]g(x) \geq 0$ e pela propriedade de positividade temos $[M - f(x)]g(x) = 0$ em todo ponto de continuidade de g.

  A função $g \geq 0$ não se anula em algum intervalo aberto J (caso contrário, sua integral é 0↯). Existe um ponto $x_0 \in J$ no qual g é contínua, e $g(x_0) > 0$.

  Segue então que f é constante e igual a M em um intervalo aberto J_0 tal que $x_0 \in J_0 \subset J$. Assim, todo ponto $c \in J_0$ satisfaz (**). Cheque.

- $\diamond$ Caso 3. Se $\gamma = m$, basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e g ♣

Interpretação Aritmética para o "primeiro TVM para integrais, generalizado." Dada um função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma função integrável $g : [a,b] \to [0,\infty)$ com

$$\int_a^b g(x)dx > 0,$$

então a função f assume em algum ponto c a sua média ponderada pela função g. Isto é, temos

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c).$$

Comentário.

◇ O primeiro teorema do valor médio para integrais, generalizado, nos permite tanto demonstrar o primeiro TVM para integrais assim como fundamentar a interpretação aritmética para o primeiro TVM para integrais.

Vejamos. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, consideremos a função integrável e estritamente positiva

$$g(x) = 1 \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Evidentemente, a média de f ponderada pela função constante $g = 1$ é apenas e tão somente a **média aritmética de** f.

Pelo primeiro TVM para integrais, generalizado, segue que existe um ponto c tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b 1.f(x)dx}{\int_a^b 1dx}.$$

Donde então segue a identidade

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \clubsuit$$

2.6.B - Função Teste.

Exemplo de uma função de classe C^∞ mas não analítica. A função

$$E(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x \le 0\,, \end{cases}$$

é tal que $E^{(n)}(0) = 0$ para todo n e é também de classe C^∞ na reta.

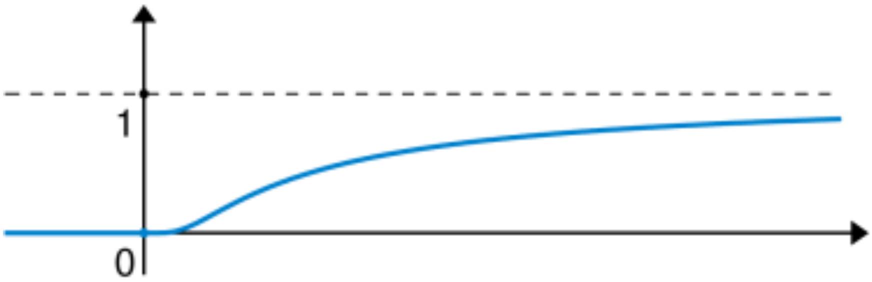

Figura 4: Gráfico de $E(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$, com $E(x) = 0$ se $x \le 0$.

Verificação. Seja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

É claro que $E(1) = e^{-1}$. É também claro que

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada $E^{(n)}$ [com $E^{(0)} = E$] satisfaz

$$E^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0, \text{ com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x\to 0^+} E^{(n)}(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{-y} P_n(y) = \lim_{y\to +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{E^{(n)}(x) - 0}{x - 0} &= \lim_{y\to +\infty} y e^{-y} P_n(y) \\ &= \lim_{y\to +\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por indução segue que $E, E', E'', E^{(3)}, \ldots$ são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo, $E = E(x)$ é infinitamente derivável ♣

Definição. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **suporte** de f é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função f não se anula. Temos a notação

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Seja $E = E(x)$ como no exemplo dado acima. Consideremos a função

$$\Phi(x) \; = E(1 - x^2).$$

A função Φ é de classe C^∞ na reta (pois é dada por uma composição de funções infinitamente deriváveis) e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \;\text{ e }\; \text{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

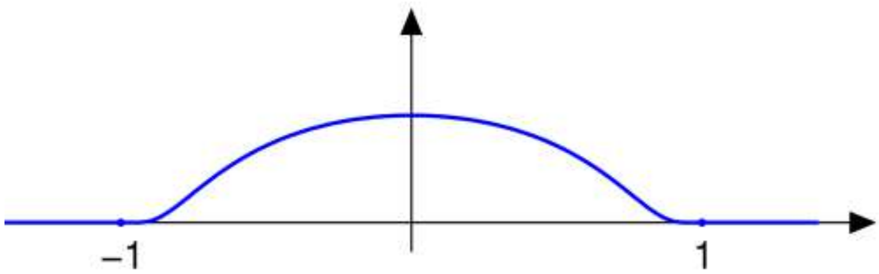

Figura 5: Gráfico da função Φ.

A expressão para Φ é

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função Φ é dita uma função teste.

O espaço das funções teste é

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \; f \text{ é infinitamente derivável e tem suporte compacto}\}.$$

A seguir, consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \Phi(x)dx > 0.$$

Definamos a função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

2.6.C - O δ de Dirac.

Seja φ a função definida acima. Para cada $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

A função φ_ϵ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \le \varphi_\epsilon(x) \le \frac{1}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(\varphi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, \epsilon].$$

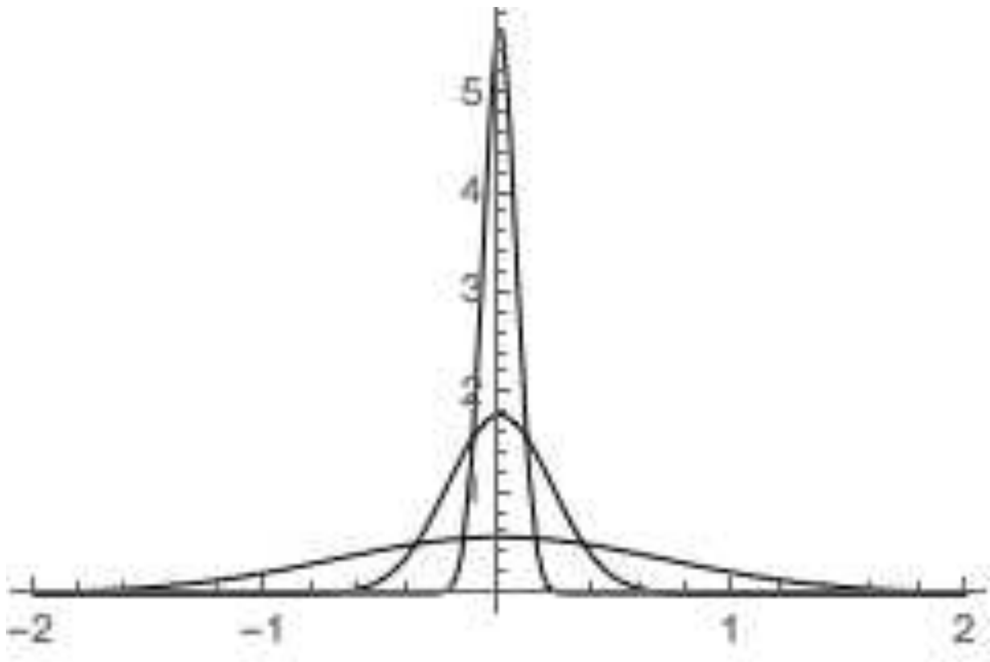

Figura 6: Ilustração para o gráfico de φ_ϵ, conforme $\epsilon \to 0^+$.

Ainda mais, com a mudança $x = \epsilon t$ encontramos

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\epsilon}dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Teorema. *Seja* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{onde}\ 0 < \epsilon < 1,$$

acima definidas. Então,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0).$$

Prova.

Pelo segundo TVM para integrais, existe um ponto $\overline{x} \in [-\epsilon, \epsilon]$, com $\overline{x} = \overline{x}(\epsilon)$ dependendo de ϵ, tal que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \\ &= f(\overline{x}).\end{aligned}$$

Como f é contínua na origem, temos que

$$f(\overline{x}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0) \clubsuit$$

O δ de Dirac. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitamente derivável e de suporte compacto (i.e., f é identicamente nula no complementar de algum intervalo fechado e limitado) definimos o δ de Dirac

$$\delta(f) = f(0).$$

Dizemos que a família de funções

$$\{\varphi_\epsilon : \ 0 < \epsilon < 1\}$$

converge ao δ de Dirac, se $\epsilon \to 0$. Escrevemos então

$$\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} \delta.$$

2.7 Teoremas de Fubini (em retângulos)

Consideramos um retângulo compacto $R = [a,b] \times [c,d]$ no plano cartesiano.

Somas de Darboux. Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função limitada . Seja $\mathcal{P}_1$ uma partição de $[a,b]$ e seja $\mathcal{P}_2$ uma partição de $[c,d]$. O produto cartesiano $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ é uma partição de R.

Indiquemos por X um ponto do plano.

Para cada sub-retângulo R_{ij} determinado pela partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ sejam

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \sup\{f(X) : \ X \in R_{ij}\} \ \text{ e } \ m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f = \inf\{f(X) : \ X \in R_{ij}\}.$$

Seja $m(R_{ij})$ a área do sub-retângulo R_{ij}.

As somas superior e inferior (ambas de Darboux) de f e relativas à partição $\mathcal{P}$ são, respectivamente,

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} m(R_{ij}) \ \text{ e } \ s(f;P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}).$$

A **integral inferior de** f e a **integral superior de** f são, respectivamente,

$$\underline{\iint} f(x,y)dxdy = \sup\Big\{s(f;\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ é partição de } R \Big\} \text{ e}$$

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy = \inf\Big\{S(f;\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ é partição de } R \Big\}.$$

Dizemos que f é integrável (Riemann-integrável) se as integrais inferior e superior de f são iguais. A integral de f sobre o retângulo R é tal valor, denotado

$$\iint_R f(x,y)dxdy.$$

Chamamos esta integral de **integral dupla**.

[Dada uma função limitada $h : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, as definições e as notações para somas inferiores e superiores e para integral inferior e superior para h são análogas às definições acima apresentadas. Já vimos (na seção Integral de Riemann) que h é integrável se e só se suas integral inferior e integral superior são iguais.]

Teorema (Fubini, simples). *Seja f integrável no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Suponhamos que a cada $x \in [a,b]$, a função $y \mapsto f(x,y)$ é integrável em $[c,d]$. Seja*

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Então, a função φ é integrável e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Vale um resultado análogo se $x \mapsto f(x,y)$ é integrável em $[a,b]$ para cada $y \in [c,d]$.

Prova.

- Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ uma partição de R, com $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d\}$. Para i em $\{1,\ldots,n\}$ e j em $\{1,\ldots,m\}$, sejam $R_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

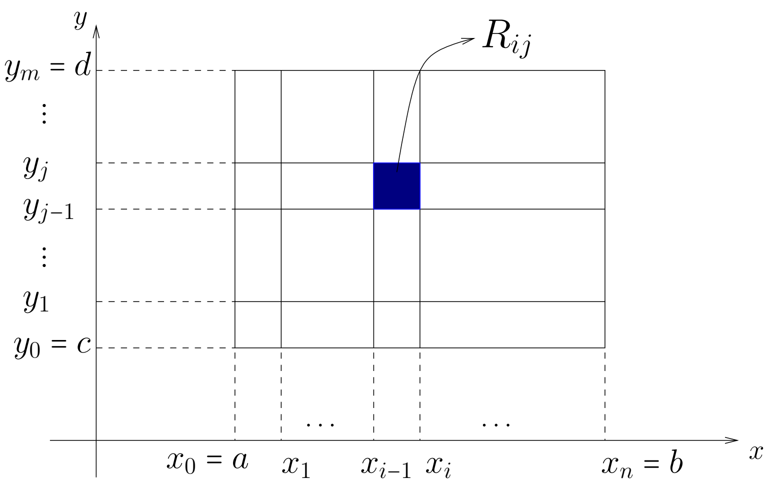

Figura 7: Ilustração à partição $\mathcal{P}$.

Sejam ainda

$$m_{ij} = \inf f(R_{ij}), \quad M_{ij} = \sup f(R_{ij}) \quad \text{e} \quad m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j.$$

Com tais notações temos,

$$s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i.$$

Fixado x em $[x_{i-1}, x_i]$, temos $m_{ij} \leq f(x,y)$ para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy = \varphi(x).$$

Donde segue, já que x é arbitrário em $[x_{i-1}, x_i]$, a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i \ \leq\ \sum_{i=1}^{n} \left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \varphi(x)\right]\Delta x_i = s(\varphi, \mathcal{P}_1).$$

Isto é, mostramos $s(f;\mathcal{P}) \leq s(\varphi;\mathcal{P}_1)$. Trocando f por $-f$ encontramos $s(-f;\mathcal{P}) \leq s(-\varphi;\mathcal{P}_1)$. Donde segue, $S(\varphi;\mathcal{P}_1) \leq S(f;\mathcal{P})$. Resumindo, temos

$$s(f;\mathcal{P}) \leq s(\varphi;\mathcal{P}_1) \leq S(\varphi;\mathcal{P}_1) \leq S(f;\mathcal{P}).$$

Assim, como f é integrável, segue que a função φ é integrável e que o valor das integrais de φ e f são iguais. A primeira afirmação está provada.

◇ O caso análogo. Consideremos $g : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, onde $g(y,x) = f(x,y)$. É claro que g é integrável, com mesma integral que f. Pelo caso acima,

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \iint_{[c,d]\times[a,b]} g(y,x)dydx = \int_c^d \int_a^b g(y,x)dxdy$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \ \clubsuit$$

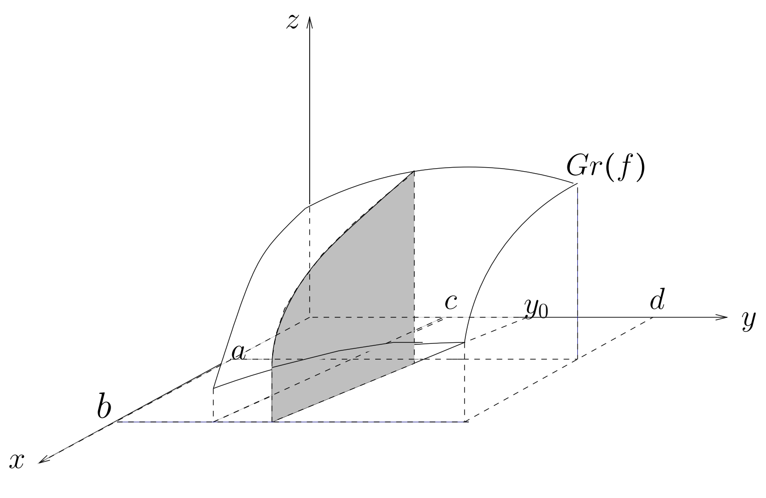

Figura 8: Ilustração ao Teorema de Fubini

Comentários. Mantenhamos a notação do teorema de Fubini e de sua prova.

- ◇ **O Teorema de Fubini para funções contínuas em retângulos.** Se a função $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem as integrais

$$\int_a^b f(x, y)dx, \text{ se } y \in [c, d], \quad \text{e} \quad \int_c^d f(x, y)dy, \text{ se } x \in [a, b].$$

Donde segue

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

- ◇ Chamamos de integrais iteradas de f às integrais

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \quad \text{e} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

- ◇ O teorema chamado "Fubinito" ou "Fubininho" ou "Baby Fubini" afirma apenas que, sob certas condições, temos

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy,$$

Não é sequer necessário que a integral dupla exista.

- ◇ Se f é positiva [i.e., $f \geq 0$ em todo ponto] então o número

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy$$

é o volume do subconjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Vide a figura ilustrativa ao teorema de Fubini.

Tendo visto um caso simples do teorema de Fubini, a forma geral do teorema de Fubini em um retângulo compacto no plano e dentro da teoria da integração de Riemann, segue naturalmente. Vejamos.

Manteremos todas as notações já adotadas no caso simples.

Teorema (Fubini, geral). *Seja f integrável no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Então, as funções definidas no intervalo $[a,b]$,*

$$\mathcal{I}(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)dy \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)dy\,,$$

são integráveis e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \mathcal{I}(x)dx = \int_a^b \mathcal{S}(x)dx.$$

Ainda mais, temos $\mathcal{I}(x) = \mathcal{S}(x)$ nos pontos em que ambas são contínuas.

Prova. Mantenhamos as notações do teorema anterior (Fubini, simples).

◇ Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ uma partição de R. Sejam $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $m_{ij} = \inf f(R_{ij})$ e $M_{ij} = \sup f(R_{ij})$. Temos

$$s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i.$$

Fixado x em $[x_{i-1}, x_i]$, temos $m_{ij} \le f(x,y)$ para todo $y \in [y_{j-1}, y_j]$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{m}\left[\inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)\right]\Delta y_j \le \underline{\int_c^d} f(x,y)dy = \mathcal{I}(x).$$

Donde, já que x é arbitrário em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n}\left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \mathcal{I}(x)\right]\Delta x_i = s(\mathcal{I},\mathcal{P}_1).$$

Isto é, mostramos $s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1)$. Trocando f por $-f$ encontramos $s(-f;\mathcal{P}) \le s(-\mathcal{S};\mathcal{P}_1)$. Donde segue, $S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P})$. Resumindo, temos

$$s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P}).$$

Assim, como f é integrável, $\mathcal{I}$ é integrável e sua integral é igual à de f.

Trocando f por $-f$ temos que $-\mathcal{S}$ é integrável com mesma integral que $-f$.

◇ Por fim, como temos

$$\int_a^b (\mathcal{S} - \mathcal{I})(x)dx = 0 \;\; \text{e} \;\; \mathcal{S} - \mathcal{I} \ge 0,$$

segue a identidade $\mathcal{S}(x) = \mathcal{I}(x)$ nos pontos de continuidade de ambas ♣

2.8 Continuidade Uniforme.

2.8.A - Teorema básico.

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com A contido em $\mathbb{R}^2$ ou $A \subset \mathbb{R}$, é *uniformemente contínua* se dado $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(a) - f(b)| < \epsilon \text{ se } |a - b| < \delta, \quad \text{onde } a \in A \text{ e } b \in A.$$

Teorema 1. *Consideremos $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, com K compacto em $\mathbb{R}^2$. Então, f é uniformemente contínua.*

Prova. Por contradição.

Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $\delta_n = 1/n$, existam pontos a_n e b_n, ambos em K, tais que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \ \text{ e } \ |f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon.$$

A sequência (a_n) é limitada e portanto contém uma subsequência (a_{n_k}) convergente a um ponto p pertencente a K (cheque). É trivial ver que $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 3, \ldots$. Assim, temos

$$|a_{n_k} - b_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Então [reenumerando as subsequências (a_{n_k}) e (b_{n_k}) se necessário], podemos supor sem perda de generalidade que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e que (a_n) converge a p. Pela última desigualdade, a sequência $(a_n - b_n)$ converge a zero. Portanto, a sequência (b_n) também converge a p. Pela continuidade de f segue,

$$0 < \epsilon \leq \lim_{n \to +\infty} |f(a_n) - f(b_n)| = |f(p) - f(p)| = 0 \ \lightning$$

2.8.B - Continuidade Uniforme e Sequências de Funções.

Seja X um subconjunto da reta.

Seja $f_n : X \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções e $f : X \to \mathbb{C}$. Dizemos que (f_n) **converge simplesmente** a f se $\lim f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Dizemos que (f_n) **converge uniformemente** a f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ quaisquer que sejam } n \geq N \text{ e } x \in X.$$

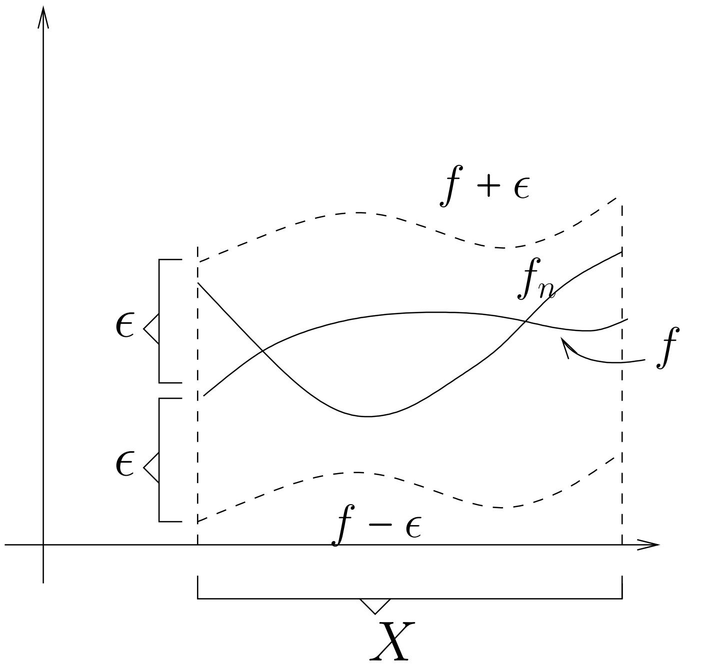

Figura 9: Convergência uniforme sobre $X \subset \mathbb{R}$.

Evidentemente, convergência uniforme implica convergência simples.

Exemplo 2. Para cada n, considere a função contínua

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n\,, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Temos

$$f(x) = \lim f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1\,, & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

A sequência (f_n) é de funções contínuas mas a função f não é contínua.

Segue um esboço dos gráficos das $f_{n's}$ e de $f(x) = \lim f_n$.

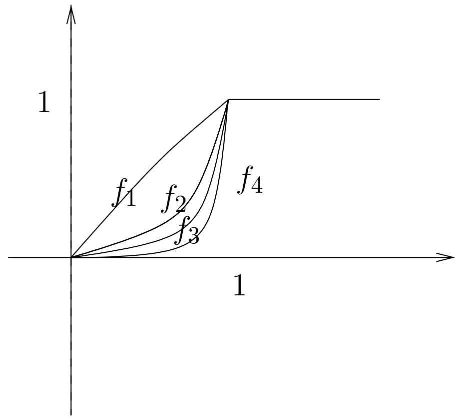

Figura 10: Ilustração ao Exemplo 2.

Suponhamos que as sequências de funções (f_n) e (g_n) [definidas em X] convergem uniformemente às funções f e g, e $\lambda \in \mathbb{C}$. Valem as propriedades abaixo.

- $(f_n + g_n)$ e (λf_n) convergem uniformente a $f + g$ e λf, respectivamente.
- Se f e g são limitadas então $(f_n g_n)$ converge uniformemente a fg.

Teorema 3. *Seja (f_n) uma sequência de funções, definidas em X, contínuas em x_0 e convergindo uniformemente a $f : X \to \mathbb{C}$. Então, f é contínua em x_0.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

> Existe N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ se $n \geq N$ e $x \in X$. Como f_N é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ então $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$ e
>
> $$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)| < \epsilon+\epsilon+\epsilon \clubsuit$$

Teorema 4. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$, a valores complexos e convergindo uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Então segue*

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

> Pelo Teorema anterior, a função f é contínua e integrável. Por hipótese, existe N tal que, se $n \geq N$ então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$. Dado $n \geq N$ temos
>
> $$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b-a) \clubsuit$$

Vejamos que a hipótese "convergência uniforme" no Teorema 4 é necessária.

Exemplo 5. Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a sequência de funções

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ 2n - 2n^2 x & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

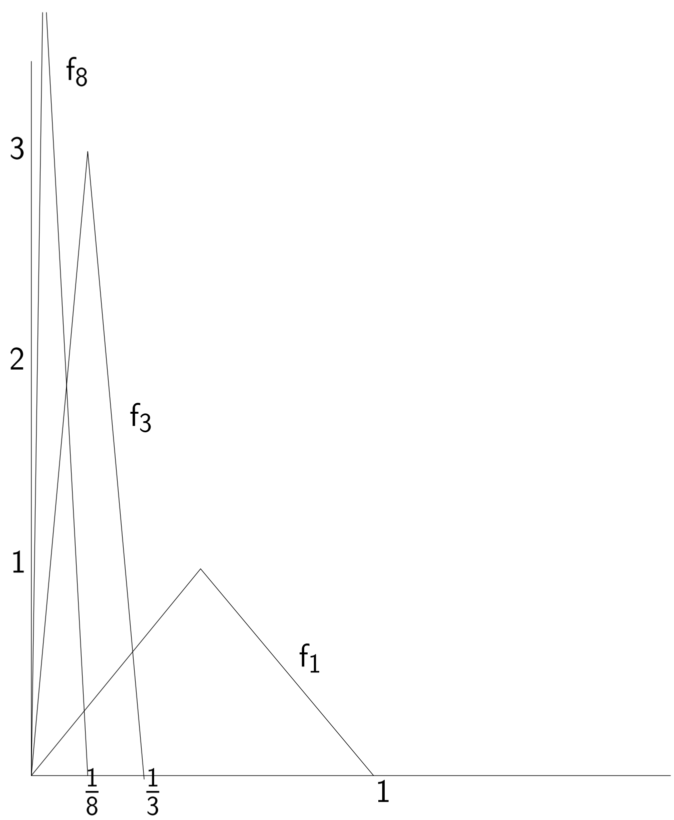

Figura 11: Ilustração ao Exemplo

[Vide figura acima.] Temos

$$\lim f_n(x) = 0, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Computando áreas de triângulos é fácil verificar que

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 6 (Critério de Cauchy para Sequências de Funções). *A sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{C}$ converge uniformemente para alguma função $f : X \to \mathbb{C}$ se e só se para todo $\epsilon > 0$ existe N em $\mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \text{ para quaisquer } n, m \geq N \text{ e } x \in X.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$ e $x \in X$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Logo,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

($\Leftarrow$) Dado $x \in X$, a sequência $\big(f_n(x)\big)$ é de Cauchy e converge. Seja

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, para todos $n \geq N$, $m \geq N$, e $x \in X$. Para $m \to +\infty$, obtemos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ para todos $n > N$ e $x \in X$♣

2.8.C - Continuidade Uniforme e Séries de Funções

Dada (f_n) uma sequência de funções em X e a valores em $\mathbb{C}$, o símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

denota a série de funções cujas somas parciais são as funções

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n.$$

Esta série de funções converge, em seu domínio X, para uma função $s : X \to \mathbb{C}$ se temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x), \text{ para cada } x \in X.$$

A função

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),$$

definida nos pontos em que tal série numérica converge, é a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Definição. A série de funções

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

converge uniformemente à função $s : X \to \mathbb{C}$ se a sequência (s_n) de suas somas parciais converge uniformemente a $s : X \to \mathbb{C}$.

Teorema 7. *Seja*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \ \text{onde } x \in [a,b],$$

uma série uniformemente convergente de funções contínuas e valores complexos. Então, $s : [a,b] \to \mathbb{C}$ é contínua e

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Prova. Trivial, pelos dois primeiros teoremas desta seção♣

Teorema 8. (Derivação termo a termo) *Consideremos*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \ \text{onde } x \in [a,b],$$

uma série de funções de classe C^1, a valores reais, tal que a série das derivadas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$$

converge uniformemente em $[a,b]$. Então, a função $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e,

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x), \ \text{para todo } x \in [a,b].$$

Prova.

Segue do Teorema imediatamente acima aplicado à sequência de funções

$$(s_n) = (f_1 + \cdots + f_n)♣$$

Proposição 9 (Critério de Cauchy para Séries de Funções). *A série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$*, definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{C}$*, converge uniformemente a*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

se e somente se para todo $\epsilon > 0$ *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \epsilon\,, \quad \textit{quaisquer que sejam } n \geq N,\, p \in \mathbb{N} \textit{ e } x \in X.$$

Prova.

Basta aplicar o critério de Cauchy dada na Proposição 6 à sequência de funções $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. De fato, vale a identidade

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \clubsuit$$

Teorema 10 (Teste M de Weierstrass). *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *uma série de funções, de* X *em* $\mathbb{C}$*, e uma sequência numérica de majorantes* (M_n) *satisfazendo*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \textit{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X, \ \textit{com } \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < \infty.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente em* X *e à função*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Prova. Seja x arbitrário em X.

Pelo critério de Cauchy para séries numéricas, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon, \text{ se } n > N \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

A sequência $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ satisfaz

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon, \text{ se } n > m > N.$$

Logo, $(s_n(x))$ converge. Impondo $n \to +\infty$ segue $|s(x) - s_m(x)| \leq \epsilon$ para todo $m > N \clubsuit$

2.8.D - Séries de Potências

Seja z a variável complexa. No plano $\mathbb{C}$, indicamos o disco compacto e a bola aberta, ambos de centro na origem 0 e de raio $R \geq 0$, respectivamente por

$$D(0;R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq R\} \quad \text{e} \quad B(0;R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}.$$

Teorema 11 (Abel). *Seja*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

uma série de potências e

$$\rho = \sup\left\{r : \sum |a_n| r^n \text{ converge}\right\}, \quad \text{onde } \rho \in [0, +\infty].$$

(a) Se $|z| < \rho$ a série converge absolutamente.

(b) Se $|z| > \rho$ a série diverge.

(c) A série converge absolutamente e uniformemente em $D(0;r)$, se $0 < r < \rho$.

(d) A função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

é contínua na bola aberta $B(0;\rho)$, se $\rho > 0$. [Ainda que "estranho" em Português, esta bola aberta é tradicionalmente chamada de disco de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.]

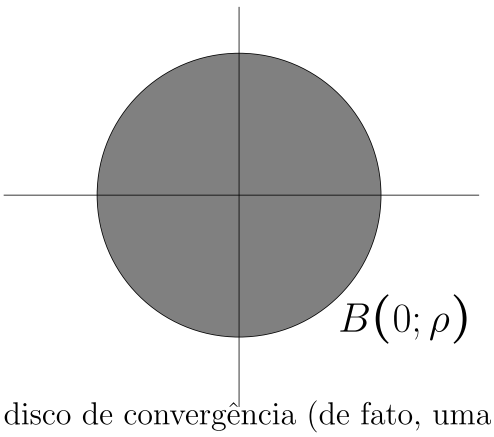

Figura 12: O disco de convergência (de fato, uma bola aberta).

Prova.

(a) Trivial (cheque).

(b) Sponhamos que $|z| > \rho$ e que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Consideremos w tal que

$$\rho < |w| < |z|.$$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, segue que $a_n z^n \to 0$ se $n \to \infty$ e portanto existe uma constante $C > 0$ tal que $|a_n z^n| \leq C$ para todo n. Donde segue

$$|a_n w^n| = |a_n z^n| \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^n \leq M \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^n, \text{ para todo } n.$$

É trivial a convergência da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^n < \infty.$$

Então, pelo critério da comparação segue

$$\sum |a_n w^n| < \infty \quad \text{com} \quad \rho < |w| \lightning$$

(c) Segue de (a) e do Teste-M de Weierstrass pois

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n, \text{ se } z \in D(0;r), \text{ e } \sum |a_n| r^n < \infty.$$

(d) Trivial, pois polinômios são funções contínuas e o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua)♣

Como uma série de potências converge absolutamente em seu disco de convergência, devido à linguagem de somas não ordenadas [vide seção 2.3] podemos suprimir os extremos inferior e superior para séries de potências e então escrever

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad \text{para todo } z \in B(0;\rho).$$

2.9 - Integral Imprópria na Reta.

Dado $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$, com x e y reais, escrevamos

$$\mathrm{Re}(z) = x \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Dada uma função integrável $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, definimos

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}[g(t)]dt + i\int_a^b \mathrm{Im}[g(t)]dt.$$

Teorema 1 (Desigualdade Triangular Integral). *Temos*

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|dt.$$

Prova. Exercício. [Como dica, considere θ tal que $e^{i\theta}\int_a^b g(t)dt = \left|\int_a^b g(t)dt\right|$.

Definições. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com Re(f) e Im(f) Riemann-integráveis em cada intervalo fechado e limitado $[a, b]$ da reta real.*

- *Caso exista, o limite*

  $$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)dt.$$

  é a integral imprópria de *f, a qual é em geral indicada por*

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt,$$

  e dizemos que tal integral converge. Senão, dizemos que tal integral diverge.

- *Dizemos que a integral imprópria*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

  é absolutamente convergente *se a integral (imprópria)*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\,,$$

  é convergente (isto é, finita) ou, equivalentemente, se existe $M > 0$ tal que

  $$\int_a^b |f(t)|dt \le M, \quad \text{para quaisquer } a \text{ e } b.$$

  A integral imprópria de f é absolutamente divergente *se*

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = +\infty.$$

Temos uma nomenclatura análoga para o caso a seguir.

Sejam a e b números reais. Consideremos

$$f:(a,b)\to\mathbb{C},$$

com f integrável em cada intervalo fechado $[r,\rho]\subset(a,b)$. A integral imprópria de f é definida pelo limite, caso este exista,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{r\to a^+\\ \rho\to b^-}}\int_r^\rho f(x)dx.$$

Temos definições análogas de integral imprópria, se o domínio de f é

$$(-\infty,b],\quad(-\infty,b),\quad[a,\infty),\quad(a,\infty),\quad[a,b)\text{ ou }(a,b].$$

Proposição 2. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é absolutamente integrável (sentido impróprio), então*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\text{ é integrável (sentido impróprio).}$$

Prova.

É trivial ver que basta mostrar que a parte real $\mathrm{Re}f$ é uma função integrável (no sentido impróprio) na reta.

Como f é absolutamente integrável, então temos

$$0\le\mathrm{Re}f(t)+|f(t)|\le 2|f(t)|.$$

Portanto, a integral imprópria de $\mathrm{Re}f(t)+|f(t)|$ é convergente. Isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{Re}f(t)+|f(t)|]dt<\infty.$$

Donde segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{Re}f(t)+|f(t)|]dt-\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty.$$

Isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}f(t)dt<\infty\ \clubsuit$$

Proposição 3 (Critério de Cauchy). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integrável em cada intervalo $[a,b]$ contido em $(-\infty,\infty)$. Então, existe a integral de Riemann imprópria de f em $(-\infty,\infty)$ se e somente para todo $\epsilon>0$, existe um $r>0$ tal que temos*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\epsilon,\quad\textit{para todo intervalo }[a,b]\subset(-\infty,r]\cup[r,\infty).$$

Prova. Solicito ao leitor tal prova (é simples).

Dado um real x, as suas partes positiva e negativa são, respectivamente,

$$x^+ = \max(x,0) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x^- = \max(-x,0) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Donde segue

$$x^+ \geq 0 \ \text{ e } \ x^- \geq 0,$$

para todo número real x, e as identidades

$$\begin{cases} x & = x^+ - x^-, \\ |x| & = x^+ + x^-, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x^+ & = \frac{|x|+x}{2}, \\ x^- & = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

Estas últimas fórmulas para x^+ e x^- revelam que

$$\boxed{x^+ : \mathbb{R} \to [0,\infty) \ \text{ e } \ x^- : \mathbb{R} \to [0,\infty) \ \text{ são contínuas.}}$$

Ainda mais,

$$\boxed{0 \leq \min\{x^+, x^-\} \leq \max\{x^+, x^-\} \leq |x| = x^+ + x^-.}$$

Temos também

$$\boxed{x^- = (-x)^+ \ \text{ e } \ x^+ = (-x)^-.}$$

Proposição 4. *As funções x^+ e x^- são uniformemente contínuas e satisfazem*

$$\boxed{|x^+ - y^+| \leq |x-y| \quad \text{e} \quad |x^- - y^-| \leq |x-y|.}$$

Prova.

- ◇ Sejam x e y números reais. Pelas fórmulas para x^+ e y^+ segue

$$x^+ - y^+ = \frac{|x|+x}{2} - \frac{|y|+y}{2} = \frac{|x|-|y|}{2} + \frac{x-y}{2}$$

A primeira desigualdade triangular garante

$$|x^+ - y^+| \leq \frac{\big||x|-|y|\big|}{2} + \frac{|x-y|}{2}.$$

A segunda desigualdade triangular, $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$, mostra que

$$|x^+ - y^+| \leq |x-y|.$$

- ◇ A prova para x^- segue de $x^- = (-x)^+$ ♣

Dado um número complexo $z = x + iy$, com x e y reais, temos

$$\boxed{\begin{aligned} &0 \leq \min\{x^+, x^-, y^+, y^-\} \leq \max\{x^+, x^-, y^+, y^-\} \leq \max\{|x|, ||y|\} \leq \\ &\leq |z| \leq |x| + |y| = x^+ + x^- + y^+ + y^-. \end{aligned}}$$

Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decompomos g na forma

$$\boxed{g = g^+ - g^-},$$

segundo sua parte positiva $g^+(t) = [g(t)]^+$ e sua parte negativa $g^-(t) = [g(t)]^-$.

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, escrevamos f na forma

$$\boxed{f = u + iv},$$

segundo sua parte real $u(t) = \mathrm{Re}f(t)$ e sua parte imaginária $v(t) = \mathrm{Im}f(t)$.

A seguir, decompondo u e v em suas partes positivas e negativas obtemos

$$\boxed{f = (u^+ - u^-) \ + \ i(v^+ - v^-).}$$

Proposição 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, na forma $f = u + iv$. Então, temos*

$$0 \leq \min\{u^+, u^-, v^+, v^-\} \leq \max\{u^+, u^-, v^+, v^-\} \leq |f| \leq u^+ + u^- + v^+ + v^-.$$

Ainda, f é absolutamente integrável (no sentido impróprio) se e somente se

$$u^+ = (Ref)^+, \ u^- = (Ref)^-, \ v^+ = (Imf)^+ \ e \ v^- = (Imf)^-$$

são todas integráveis (no sentido impróprio). Ainda mais, se f é absolutamente integrável então temos

$$\int f(t)dt = \int u^{+t}dt - \int u^-(t)dt + i\int v^+(t)dt - i\int v^-(t)dt.$$

Prova.

- Consideremos um intervalo compacto arbitrário $[a, b]$. Suponhamos f Riemann-integrável em $[a, b]$. Logo, as partes $\mathrm{Re}f$ e $\mathrm{Im}f$ são integráveis em $[a, b]$.

  Como as funções x^+ e x^- são contínuas na reta, segue que as composições $u^+ = (\mathrm{Re}f)^+$ e $u^- = (\mathrm{Re}f)^-$ são contínuas nos pontos em que $\mathrm{Re}f$ é contínua. Isto mostra que faz sentido investigarmos a existência (ou não) da integral imprópria da função $\mathrm{Re}f$. Vale uma argumentação análoga para $\mathrm{Im}f$.

- O restante da prova é trivial. cheque. ♣

2.10 Integral Imprópria no Plano e respectivos Tonelli e Fubini.

Dado $x \in \mathbb{R}$. Sejam $x^+ = \max(x, 0)$, a parte positiva de x, e $x^- = \max(-x, 0)$ a parte negativa de x [vide propriedades na seção 2.9]. Consideremos uma função

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}.$$

Suponhamos que a restrição

$$f\Big|_{[a,b]\times[c,d]} : \ [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$$

é integrável em todo retângulo fechado e limitado $[a, b] \times [c, d]$ contido no plano.

Dizemos que f é absolutamente integrável (no sentido impróprio e no plano) se existe uma constante $M > 0$ satisfazendo

$$\iint\limits_{[-n,n]\times[-n,n]} |f(x, y)| dxdy \leq M, \text{ para todo } n.$$

Se $p : \mathbb{R}^2[0, \infty)$ [logo, $p = p(x, y)$ é positiva ou não negativa] é absolutamente integrável, dizemos de forma breve que p é integrável (no sentido impróprio). Ainda, definimos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} p(x, y)dxdy = \sup\left\{ \iint\limits_{[-n,n]\times[-n,n]} p(x, y)dxdy : \text{ onde } n \in \mathbb{N} \right\} \in [0, +\infty).$$

Tal sup é finito, pois $p = p(x, y)$ é (absolutamente) integrável no sentido impróprio.

Para aspectos práticos, destaquemos que (é trivial ver)

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} p(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{[-n,n]\times[-n,n]} p(x, y)dxdy.$$

Sendo assim, dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável segue que as funções $u = \text{Re}(f)$ e $v = \text{Im}(f)$ também são absolutamente integráveis. Ainda mais, as partes positivas e negativas de $u = \text{Re}(f)$ e $v = \text{Im}(f)$ [naturalmente indicadas $u^+ = (\text{Re}f)^+$, $u^- = (\text{Re}f)^-$, $v^+ = (\text{Im}f)^+$ e $v^- = (\text{Im}f)^-$, vide seção 2.9] são funções positivas (não negativas) e integráveis no plano e no sentido impróprio. Definimos então a **integral dupla (no sentido impróprio)** de f pela fórmula

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} u^+ dxdy - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} u^- dxdy + i \iint\limits_{\mathbb{R}^2} v^+ dxdy - i \iint\limits_{\mathbb{R}^2} v^- dxdy.$$

Teorema 1 (Tonelli, para integrais impróprias). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ contínua. Suponha que as funções*

$$x \mapsto \int f(x,y)dy \quad e \quad y \mapsto \int f(x,y)dx$$

estão bem definidas [a valores finitos em $[0, +\infty)$] e são contínuas. Então temos

$$\int \int f(x,y)dxdy = \int \int f(x,y)dydx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy.$$

[Os valores destas três integrais imediatamente acima são iguais, finitos ou não.]

Prova.

- Dados n e m, é trivial ver que a continuidade uniforme de f no retângulo $[-n,n] \times [-m,m]$ garante a continuidade (cheque) da função integral

  $$y \mapsto \int_{-n}^{n} f(x,y)dx, \text{ onde } y \in (-m,m).$$

  Donde segue a continuidade de

  $$y \mapsto \int_{-n}^{n} f(x,y)dx, \text{ onde } y \in \mathbb{R}.$$

- Seja

  $$XY = \int \int f(x,y)dxdy.$$

  O teorema de Fubini para contínuas e em retângulos mostra que

  $$\iint\limits_{[-n,n]\times[-n,n]} f(x,y)dxdy = \int_{-n}^{n} \int_{-n}^{n} f(x,y)dxdy \le \int_{-n}^{n} \int f(x,y)dxdy \le XY.$$

  Logo, a integral dupla imprópria de f (indicada por D) satisfaz

  $$D = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy \le XY.$$

- A desigualdade $XY \le D$. Fixemos $r > 0$. Por definição, basta mostramos

  $$\int_{-r}^{r} \int f(x,y)dxdy \le \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy.$$

  Seja $\epsilon > 0$. Consideremos $y \in [-r,r]$. Por definição de integral imprópria (para funções positivas), existe $n = n_y$ (n depende de y) tal que

  $$\int f(x,y)dx - \epsilon < \int_{-n}^{n} f(x,y)dx.$$

Então, por continuidade (na variável y) das duas últimas integrais segue que existe um intervalo aberto I_y centrado em y tal que temos

$$(1.1) \qquad \int f(x,t)dx - \epsilon < \int_{-n}^{n} f(x,t)dx, \text{ para todo } t \in I_y.$$

A coleção de intervalos abertos $\{I_y : y \in [-r,r]\}$ forma uma cobertura aberta de $[-r,r]$, o qual é compacto. Então, existem $y_1, \ldots, y_k$ em $[-r,r]$ tais que

$$[-r,r] \subset I_{y_1} \cup \cdots \cup I_{y_k}.$$

Seja $N = \max\{n_{y_1}, \ldots, n_{y_k}\}$ [independente de y]. Pela equação (1.1) segue

$$\int f(x,t)dx - \epsilon < \int_{-N}^{N} f(x,t)dx, \text{ para todo } t \in [-r,r].$$

Donde segue (aplicando Fubini para contínuas em retângulos)

$$\int_{-r}^{r} \int f(x,t)dxdt - 2\epsilon r \leq \int_{-r}^{r} \int_{-N}^{N} f(x,t)dxdt = \iint\limits_{[-r,r]\times[-N,N]} f(x,t)dxdt \leq D.$$

Isto é, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\int_{-r}^{r} \int f(x,y)dxdy \leq D + 2\epsilon r.$$

Donde segue

$$\int_{-r}^{r} \int f(x,y)dxdy \leq D \quad \text{e então} \quad XY \leq D$$

◇ Para provar

$$\int \int f(x,y)dydx = D,$$

basta utilizar a função $g(x,y) = f(x,y)$ ♣

A passagem do teorema de Tonelli (para funções positivas) ao teorema de Fubini (para funções não necessariamente positivas) não é tão imediata como podemos imaginar a princípio. Um pequeno cuidado é necessário.

A seguir, provamos o teorema de Fubini.

Teorema 2 (Fubini, para integrais impróprias). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ contínua. Suponha que as funções*

$$x \mapsto \int |f(x,y)|dy \quad e \quad y \mapsto \int |f(x,y)|dx$$

são contínuas (em particular, bem definidas e a valores finitos). Vale o que segue.

(a) São contínuas as funções

$$x \mapsto \int f(x,y)dy \quad e \quad y \mapsto \int f(x,y)dx.$$

(b) Se

$$\int \int |f(x,y)|dxdy < \infty,$$

então

$$\int \int f(x,y)dxdy = \int \int f(x,y)dydx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy < \infty.$$

Prova.

(a) É trivial mostrar que as integrais em (a) estão bem definidas (cheque). Resta mostramos a continuidade das respectivas funções.

Redução. Como $g(x,y) = f(y,x)$ satisfaz as mesmas hipóteses que f, vemos que basta provar a continuidade da aplicação

$$x \mapsto F(x) = \int f(x,y)dy.$$

A continuidade de F. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\epsilon > 0$. Devido às hipóteses, existe $r > 0$ (e fixamos r) tal que

$$\int_{|y|\geq r} |f(x_0,y)|dy < \epsilon. \tag{2.1}$$

É trivial a continuidade da função (vide passo 1 do teorema de Tonelli)

$$x \mapsto \int_{-r}^{r} |f(x,y)|dy.$$

Assim sendo, pelas hipóteses, segue a continuidade da diferença de contínuas

$$x \mapsto \int_{|y|\geq r} |f(x,y)|dy = \int |f(x,y)|dy - \int_{|y|\leq r} |f(x,y)|dy.$$

Então, e por (2.1), existe um intervalo aberto I centrado em x_0 tal que

$$\int_{|y|\geq r} |f(x,y)|dy < \epsilon, \text{ para todo } x \in I.$$

Seja x arbitrário em I. Escrevamos

$$(2.2)\quad F(x) - F(x_0) = \int\limits_{|y|\leq r} [f(x,y) - f(x_0,y)]dy + \int\limits_{|y|\geq r} [f(x,y) - f(x_0,y)]dy.$$

Estimando a última integral, temos

$$(2.3)\qquad \int_{|y|\geq r} \big[|f(x,y)| + |f(x_0,y)|\big]dy \leq 2\epsilon.$$

É trivial a continuidade da função (passo 1 do teorema de Tonelli)

$$t \mapsto \int_{-r}^{r} f(t,y)dy.$$

Logo, encolhendo I se necessário, podemos supor

$$\left|\int_{|y|\leq r} [f(x,y) - f(x_0,y)]dy\right| < \epsilon.$$

Combinando as duas últimas desigualdades e a equação (2.2) encontramos

$$|F(x) - F(x_0)| < 3\epsilon, \text{ para todo } x \in I.$$

(b) Com as notações já adotadas, decompomos

$$f = u + iv, \quad u = u^+ - u^- \quad \text{e} \quad v = v^+ - v^-,$$

com $u^\pm$ e $v^\pm$ as respectivas partes positivas e negativas de $u = \mathrm{Re}f$ e $v = \mathrm{Im}f$. Já vimos que $x^+ : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ e $x^- : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ são contínuas [seção 2.9]. Logo, as composições $u^\pm = (\mathrm{Re}f)^\pm$ e $v^\pm = (\mathrm{Im}f)^\pm$ são contínuas. É claro que

$$0 \leq u^\pm \leq |f| \text{ e } 0 \leq v^\pm \leq |f|.$$

Donde são finitas (e bem definidas) as oito integrais

$$(2.4)\qquad \int u^\pm(x,y)dy,\ \int u^\pm(x,y)dx,\ \int v^\pm(x,y)dy \text{ e } \int v^\pm(x,y)dx.$$

Afirmação. Estas oito (últimas) integrais são contínuas. Provemos.

Redução 1. Basta checar a continuidade para as duas integrais relativas a u^+. De fato, $-f$ e $-if$ satisfazem as mesmas hipóteses que f e temos

$$u^- = (-u)^+ \quad \text{e} \quad v = \text{Re}(-if).$$

Redução 2. Como $h(x,y) = u^+(y,x)$ satisfaz mesmas hipóteses que $u+$, basta provarmos a continuidade da aplicação

$$x \mapsto U(x) = \int u^+(x,y)dy.$$

A continuidade de U. Sejam x_0, r e ϵ como em (a). Seja I o intervalo encontrado em (a).

Seja x arbitrário em I. Analogamente a (2.2), escrevamos

$$U(x)-U(x_0) = \int\limits_{|y|\le r} [u^+(x,y)-u^+(x_0,y)]dy + \int\limits_{|y|\ge r} [u^+(x,y)-u^+(x_0,y)]dy.$$

Pela desigualdade $|u^+| \le |f|$ e pelo já visto em (a) [equação (2.3)] segue

$$\left| \int\limits_{|y|\ge r} [u^+(x,y) - u^+(x_0,y)]dy \right| \le \int\limits_{|y|\ge r} \Big[|f(x,y)| + |f(x_0,y)|\Big]dy < \epsilon$$

Analogamente a (a), temos a continuidade da função

$$t \mapsto \int_{-r}^{r} u^+(t,y)dy.$$

Logo, encolhendo I se necessário, podemos supor

$$\left| \int_{|y|\le r} [u^+(x,y) - u^+(x_0,y)]dy \right| < \epsilon.$$

Combinando as duas últimas desigualdades encontramos

$$|U(x) - U(x_0)| < 3\epsilon, \text{ para todo } x \in I.$$

Logo, U é contínua.

Vimos que as oito integrais em (2.4) são contínuas.

Conclusão. Pelo teorema de Tonelli, os valores das duas integrais iteradas e o valor da integral dupla de u^+ coincidem. Analogamente para u^-, v^+ e v^-. Portanto, devido à hipótese em (b), todas estas doze integrais são finitas. Então, por linearidade segue a tese ♣

2.11 A integral $\int e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Esta seção utiliza coordenadas polares, integral imprópria e integral dupla.

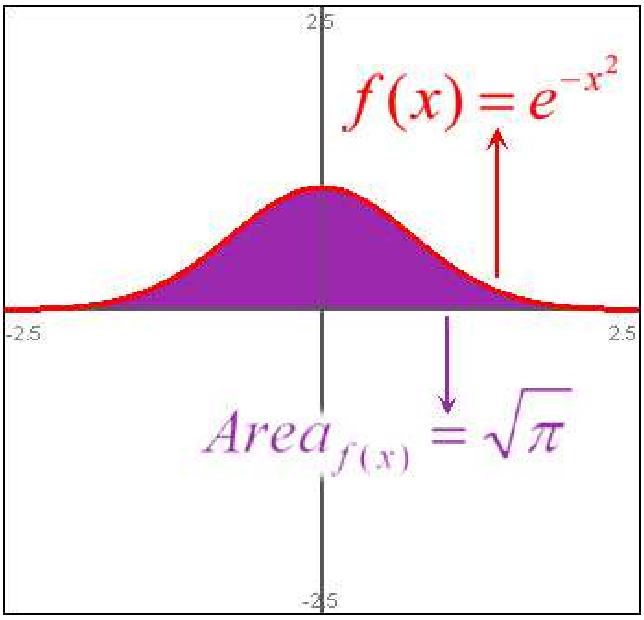

Figura 13: Ilustração para $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Apesar de não termos uma fórmula elementar para a função

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ onde } x \geq 0,$$

conseguimos computar a integral de e^{-x^2} em toda a reta. Notemos que

$$g \text{ é positiva e crescente em } (0, +\infty).$$

Assim, existe (como número real positivo ou como o valor $+\infty$) o limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Como a função positiva e^{-x^2} é par, temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

A seguir, computamos $I^2 = I.I$ e mostramos que $I^2 = \pi$.

Seja $r > 0$ e arbitrário. Notemos que

$$I^2 = I.I = \lim_{r\to+\infty}\left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{r}^{r} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left[\iint_{[-r,r]\times[-r,r]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Seja $0 = (0,0)$ a origem do plano $\mathbb{R}^2$. Sejam

$$D(0;r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le r\right\}$$

o disco de centro na origem e de raio r e o quadrado $Q_r = [-r,r]\times[-r,r]$ de centro na origem. Valem as relações

$$D(0;r) \subset Q_r \subset D(0;2r) \subset Q_{2r}.$$

Devido a tais relações, e a desigualdade $e^{-(x^x+y^2)} \ge 0$ em todo ponto (x,y), temos

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\iint_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right] = \lim_{r\to+\infty}\left[\iint_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Donde segue

$$I^2 = \lim_{r\to+\infty}\left[\iint_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right].$$

Utilizando coordenadas polares escrevemos

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2+y^2 \\ \text{com } \rho > 0 \ \text{ e } 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

O determinante da matriz jacobiana da aplicação $J(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ é

$$\det J(\rho,\theta) = \rho.$$

Então, efetuando tal mudança de coordenadas encontramos

$$I^2 = \lim_{r\to\infty}\left[\iint_{[0,r]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta\right]$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(\int_0^r \rho e^{-\rho^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\bigg|_0^r\right)2\pi = \pi \clubsuit$$

2.12 Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração.

Teorema . *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua.*

(A) Suponha que exista uma função majorante $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$|\varphi(x,t)| \leq M(t) \qquad \text{para todos } x \text{ e } t, \quad \text{e} \quad \int M(t)dt < \infty.$$

Então, está bem definida e é contínua a seguinte função

$$F(x) = \int \varphi(x,t)dt.$$

(B) Mantenha as hipóteses e as notações em (A). Suponha a continuidade (nas duas variáveis juntas) da derivada parcial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \quad \text{e que} \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\right| \leq M(t), \text{ para todos } x \text{ e } t.$$

Então, F é derivável e

$$F'(x) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt.$$

Prova.

- Redução. É claro que podemos supor que φ assume apenas valores reais.

- Boa definição de F. Fixemos um x arbitrário. Por hipótese temos

$$0 \leq \varphi(x,t) + |\varphi(x,t)| \leq 2|\varphi(x,t)| \leq 2M(t) \ \text{ com } \int M(t)dt < \infty.$$

Segue (cheque)

$$\int \varphi(x,t)dt < \infty.$$

- Continuidade. Primeiro, mostremos a continuidade de

$$F_n(x) = \int_{-n}^{n} \varphi(x,t)dt.$$

Seja $[-r,r]$ na reta . Por continuidade, φ é uniformemente contínua em $[-r,r] \times [-n,n]$. Seja $\epsilon > 0$. A continuidade uniforme garante $\delta > 0$ tal que

$$\begin{cases} |\varphi(x_1,t_1) - \varphi(x_2,t_2)| < \epsilon \text{ se } |(x_1,t_1) - (x_2,t_2)| < \delta, \\ \\ \text{onde } (x_1,t_1) \text{ e } (x_2,t_2) \text{ pertencem a } [-r,r] \times [-n,n]. \end{cases}$$

Então, para quaisquer x_1 e x_2 em $[-r, r]$ e tais que $|x_1 - x_2| < \delta$, temos

$$|F_n(x_1) - F_n(x_2)| \leq \int_{-n}^{n} |\varphi(x_1, t) - \varphi(x_2, t)| dt \leq 2n\epsilon.$$

Logo, F_n é uniformente contínua em cada $[-r, r]$ e então contínua.

Para finalizar esta parte, para todo x temos

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_{|t|\geq n} |\varphi(x, t)| dt \leq \int_{|t|\geq n} M(t) dt \quad \text{e} \quad \int_{|t|\geq n} M(t) dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Logo, $F_n \to F$ uniformemente e portanto F é contínua.

◇ Diferenciabilidade. A prova acima implica a continuidade de

$$G_n(x) = \int_{-n}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dt \quad \text{e que} \quad G_n(x) \xrightarrow{\text{uniforme}} \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dt \text{ [contínua]}.$$

Tal convergência uniforme garante

$$\int_0^\tau G_n(x) dx \longrightarrow \int_0^\tau \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dt dx.$$

Pelo teorema de Fubini (vide seção 11) segue

$$\int_0^\tau G_n(x) dx = \int_0^\tau \int_{-n}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dt dx = \int_{-n}^{n} \int_0^\tau \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dx dt$$

Chegamos então a

$$\int_0^\tau G_n(x) dx = \int_{-n}^{n} [\varphi(\tau, t) - \varphi(0, t)] dt.$$

Impondo $n \to \infty$ encontramos, para todo τ na reta, a identidade

$$\int_0^\tau \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t) dt dx = \int \varphi(\tau, t) dt - \int \varphi(0, t) dt = F(\tau) - F(0).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo o lado esquerdo acima é derivável e

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tau, t) dt = F'(\tau) \clubsuit$$

Importante. Em geral, obtemos uma função majorante (no sentido do enunciado do teorema) para φ e outra para $(\partial\varphi)/(\partial x)$. Isto é o suficiente, pois a soma destas funções majorantes é uma majorante tanto para φ como para $(\partial\varphi)/(\partial x)$.

Para outras provas e resultados sobre diferenciação de integrais, vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`.

2.13 Integral sobre Curvas em $\mathbb{C}$.

Sejam Ω um conjunto aberto no plano complexo e uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Seja z_0 um ponto em Ω. Analogamente ao caso real, a função $f = f(z)$ é dita contínua em $z = z_0$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que temos

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ se } |z - z_0| < \delta.$$

Também analogamente, f é derivável no ponto z_0 se existe o limite (a derivada)

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad .$$

Ainda, f é analítica em Ω se para todo ponto $z_0 \in \Omega$, existe uma bola aberta $B(z_0; r)$, de centro z_0 e raio $r > 0$, onde r dependende de z_0, e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ centrada no ponto z_0 tais que temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \text{ para todo } z \in B(z_0; r).$$

Comentário.

A famosa fórmula integral de Cauchy diz que se f é derivável em todo ponto de um aberto então f é analítica neste aberto, mas não precisaremos deste teorema nestas notas. O reverso (toda função analítica é infinitamente derivável) é razoavelmente fácil de mostrar. Pois, toda série de potências (interpretável como um polinômio infinito) é infinitamente derivável e pode ser derivada termo a termo (analogamente a polinômios). [Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]

Se existir um número $\rho > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho$ para todo n então temos

$$|a_n||z - z_0|^n \leq (\rho|z - z_0|)^n$$

e portanto a série de potências converge absolutamente em cada ponto z satisfazendo $\rho|z - z_0| < 1$ [pois toda série geométrica de razão estritamente menor que 1, em valor absoluto, é uma série absolutamente convergente]. Neste caso, a série de potências converge absolutamente na bola $B(z_0; 1/\rho)$ e define, com a linguagem de somas não ordenadas, a função complexa

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in B(z_0; R) \qquad \left[\text{onde } R = \frac{1}{\rho}\right].$$

Consideremos uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Escrevamos

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad \text{com } \ x(t) = \mathrm{Re}[\gamma(t)] \ \text{ e } \ y(t) = \mathrm{Im}[\gamma(t)].$$

Suponhamos que γ é de classe C^1 [derivável e com derivada

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

contínua]. Suponhamos também que a imagem de γ está contida no aberto Ω e que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica.

A integral de f a longo da curva γ é definida por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt.$$

Notemos que escrevendo

$$f = u + iv, \ \text{com } u = \mathrm{Re}(f) \text{ e } v = \mathrm{Im}(f),$$

torna-se trivial desenvolver a multiplicação $f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$.

Suponhamos que f tem uma **primitiva** $F : \Omega \to \mathbb{C}$. Isto é, temos

$$F'(z) = f(z), \ \text{para todo } z \in \Omega.$$

Então, pela regra da cadeia encontramos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt \\
&= \int_a^b (u \circ \gamma)'(t)dt + i\int_a^b (v \circ \gamma)'(t)dt \\
&= (F \circ \gamma)(t)\Big|_a^b \\
&= F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).
\end{aligned}$$

2.14 O Índice de uma Curva

Suponhamos que a curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ seja de classe C^1 e tal que

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Dizemos então que γ é fechada ou um laço ou um *loop*. A seguir, consideremos um ponto $z_0 = p$ no plano complexo. Suponhamos

$$\gamma(t) \neq p, \text{ para todo } t.$$

Sob tais condições, podemos decompor a curva $\gamma(t) - p$ na forma

$$\gamma(t) - p = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad \text{onde} \quad r(t) = |\gamma(t) - p|,$$

com $r : [a, b] \to (0, +\infty)$ de classe C^1 e $\theta : [a, b] \to (-\infty, \infty)$ também de classe C^1. [Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT225Cap7.pdf`.]

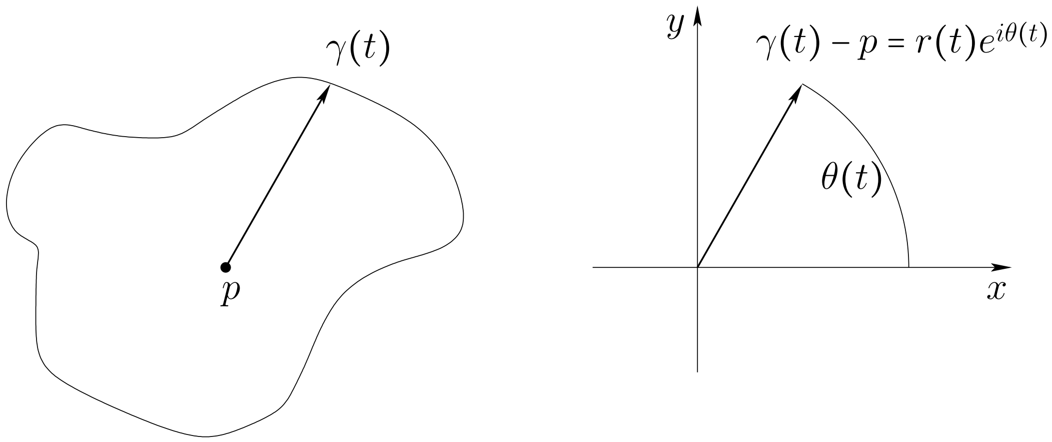

Figura 14: Ilustração à representação $\gamma(t) - p = r(t)e^{i\theta(t)}$.

O Índice da curva γ em relação ao ponto $p = z_0$ é o número

$$\text{Ind}(\gamma; z_0) = \text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Como temos $\gamma(b) = \gamma(a)$, então o índice é um número inteiro n. Temos $n > 0$ se a curva tem o sentido anti-horário e $n < 0$ se a curva tem o sentido horário. O valor absoluto $|n|$ representa o número de voltas que γ dá em torno de $p = z_0$ e o sinal de n representa a orientação (o sentido) da curva. Vide figuras abaixo

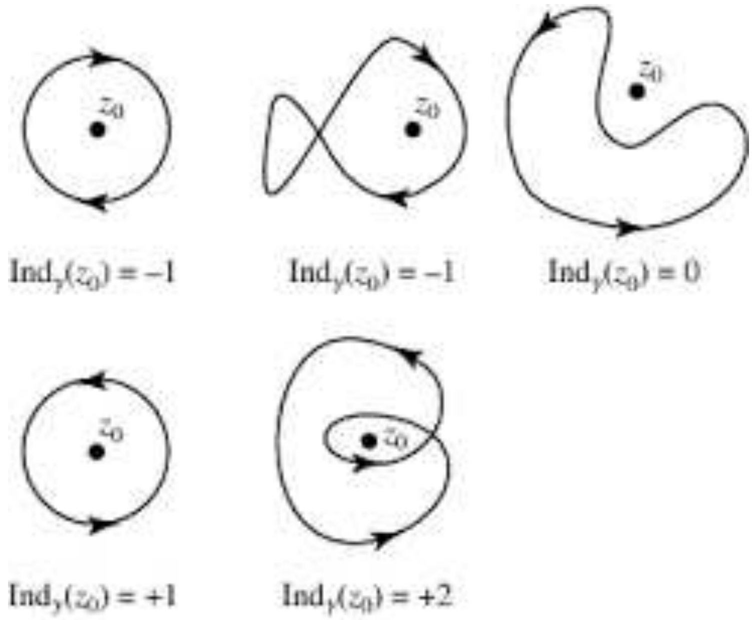

Figura 15: O índice de uma curva γ em relação a um ponto $p = z_0$.

Proposição. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 e fechada e um ponto p que não está na imagem de γ. Então, temos*

$$Ind(\gamma;p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-p}.$$

Prova. Como acima, escrevamos $\gamma(t) - p = r(t)e^{i\theta(t)}$. Notemos que $r(b) = r(a)$.

Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-p} &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left[\frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t)\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\ln[r(t)]\Big|_a^b + i\theta(t)\Big|_a^b\right] \\
&= \frac{[\ln r(b) - \ln r(a)] + i[\theta(b)-\theta(a)]}{2\pi i}. \\
&= \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}\clubsuit
\end{aligned}$$

Exemplo. Consideremos a circunferência de centro na origem e de raio 1 e parametrizada no sentido anti-horário

$$\gamma(t) = e^{it}, \text{ onde } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

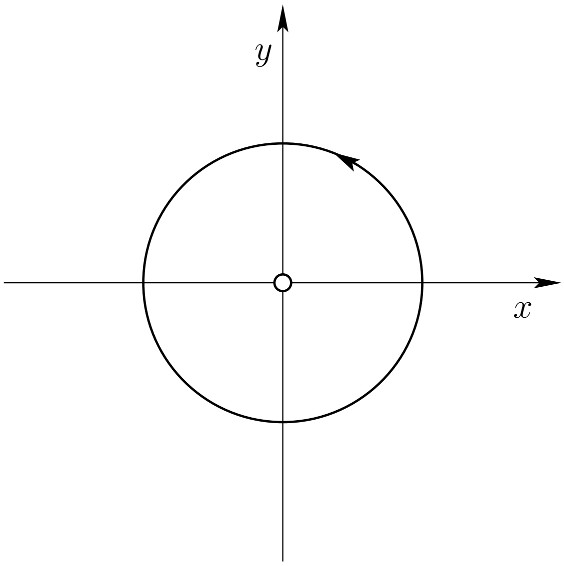

Figura 16: A curva $\gamma(t) = e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$

É trivial vermos que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1.$$

Observemos ambém que $\theta(t) = t$ satisfaz

$$\frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{2\pi - 0}{2\pi} = 1.$$

Geometricamente, é visível que a curva γ dá uma única volta em torno da origem e no sentido anti-horário. Isto é,

$$\text{Ind}(\gamma; 0) = 1.$$

2.15 Método das Frações Parciais para Quociente de Analíticas.

Nesta seção estamos interessados em como simplificar o quociente de duas funções analíticas (definidas abaixo nesta página)

$$\frac{f(z)}{g(z)}, \quad \text{onde} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na seção 2.8 - Continuidade Uniforme já vimos (Teorema de Abel) que dada um série de potências (centrada na origem)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

então existe um raio de convergência ρ tal que a série de potências converge absolutamente em cada ponto no disco de convergência $B(0;\rho)$ e, ainda, converge uniformemente e absolutamente em cada disco fechado

$$D(0;r) = \{z : |z| \leq r\}, \text{ onde } 0 \leq r < \rho$$

[obviamente, se $\rho > 0$]. Na seção 2.13 - Integral sobre curvas em $\mathbb{C}$ já comentamos um pouco sobre funções analíticas. Veremos aqui um pouco mais.

Função Analítica. Sejam Ω um aberto no plano complexo e uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dizemos que f é uma função analítica no aberto Ω se para cada ponto $z_0 \in \Omega$ existirem uma bola aberta $B(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ de raio $r > 0$ e uma sequência de coeficientes complexos $(c_n)_{\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in B(z_0;r).$$

Notemos que a sequência (c_n) depende do ponto z_0. De forma breve, dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica se f é *localmente* representável por uma série de potências.

Para facilitar o estudo das propriedades das séries de potências da forma $\sum c_n (z - z_0)^n$ é usual utilizar a translação $w = z - z_0$ e então estudar

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n.$$

Isto é, basta analisarmos séries de potências centradas na origem [isto é, $z_0 = 0$].

Assim, a menos que alertado o contrário, os comentários abaixo se referem a séries de potências centradas na origem.

O matemático Carathéodory uma vez comentou sobre séries de potências "Pode-se computar com elas quase como se computa com polinômios." Certamente é trivial ver que para somar e subtrair duas séries de potências (centradas na origem e com mesmo raio de convergência) basta somar ou subtrair os respectivos coeficientes. Analogamente, é trivial multiplicar uma série de potências por uma constante complexa (arbitrária).

A derivação de uma série de potências também é trivial. [Para a prova deste resultado e de outras propriedades aqui citadas sobre séries de potências, vide
`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`]

Suponhamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \text{ para todo } z \in B(0;r).$$

Então, temos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots, \text{ para todo } z \in B(0;r).$$

Isto é, analogamente a polinômios, derivamos termo a termo uma série de potências.

Observemos que temos

$$f(0) = c_0 \quad \text{e} \quad f'(0) = c_1.$$

Também podemos derivar a função derivada f'. Obtemos

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \quad \text{e} \quad f''(0) = 2c_2.$$

Portanto f é infinitamente derivável e

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Donde segue

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Assim, a função f é representada pela sua **série de Taylor** (no caso, pela série de Taylor na origem).

Também podemos multiplicar séries de potências. Suponhamos

$$f(z) = \sum a_n z^n \text{ e } g(z) = \sum b_n z^n, \text{ ambas para todo } z \in B(0;r).$$

Então, analogamente a multiplicação de polinômios, obtemos

$$\begin{aligned} f(z).g(z) &= \big[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\big]\big[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots\big] \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots, \text{ para todo } z \in B(0;r). \end{aligned}$$

Isto é, temos

$$(f.g)(z) = f(z).g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \text{ onde } c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k.$$

Também podemos (com cuidados mínimos) dividir séries de potências. Consideremos uma função

$$g : B(0;r) \to \mathbb{C}$$

dada por uma série de potências que converge em todo ponto da bola $B(0;r)$ [com $r > 0$] e satisfazendo

$$g(0) \neq 0.$$

Por continuidade podemos supor r pequeno o suficiente tal que g não se anula. Para facilitar ainda mais, suponhamos $g(0) = 1$. Escrevamos

$$g(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots.$$

Então, existe uma sequência complexa (c_n) tal que

$$\frac{1}{g(z)} = \sum c_n z^n \text{ para todo } z \in B(0;\rho), \text{ para algum } \rho > 0.$$

Para determinar os $c_{n's}$ basta efetuar a multiplicação indicada e identificar coeficientes

$$1 = \big[1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots\big]\big[c_0 + c_1 z + c_2 z_2 + c_3 z^3 + \cdots\big].$$

Entre as funções analíticas, merecem destaque as funções abaixo descritas.

Funções Inteiras. *Dizemos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira (no sentido de Weierstrass) se f é representada por uma série de potências centrada na origem. Isto é, se existe uma sequência de coeficientes complexos (c_n) satisfazendo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Os comentários sobre funções inteiras (definidas no plano complexo) que seguem abaixo se estendem, com os devidos cuidados, para funções analíticas (definidas em abertos no plano complexo).

Propriedade da Translação. Sabemos que dado um polinômio $P(z)$ e um número complexo z_0, então

$$Q(z) = P(z + z_0) \text{ também é um polinômio.}$$

Analogamente, dada uma função inteira

$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

e um número complexo z_0, podemos escrever

$$g(w) = f(w + z_0) = \sum b_n w^n \text{ para todo } \ w \in \mathbb{C}.$$

Para determinar os coeficientes $b_{n's}$ basta efetuar ingenuamente os cômputos

$$f(w+z_0) = a_0+a_1(w+z_0)+a_2(w+z_0)^2+a_3(w+z_0)^3+\cdots = \left[a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\cdots\right]w^0+[\cdots]w^1+\cdots.$$

Assim, dada uma função inteira

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

e um número complexo arbitrário temos

$$f(w + z_0) = \sum b_n w^n, \text{ para todo } w \in \mathbb{C} \quad \left[\text{notemos: } b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right].$$

Isto mostra que *uma função inteira é representável (em todo o plano complexo) por qualquer uma das suas séries de Taylor*. Isto é, dado um ponto z_0 arbitrário, existe uma sequência de coeficientes complexos (a_n) satisfazendo

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Vejamos mais algumas similaridades entre séries de potências e polinômios.

Zeros Isolados. Sabemos que os zeros de um polinômio são isolados (pois em quantidade finita). Analogamente, os zeros de uma função que é dada por uma série de potências também são isolados (mas não necessariamente em quantidade finita). Dada uma função inteira

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

não identicamente nula é claro que ao menos um coeficiente é não nulo. Logo, existe o "primeiro" coeficiente a_N não nulo. Temos então

$$f(z) = z^N\big[a_N + a_{N+1}z + a_{N+2}z^2 + \cdots\big] = z^N g(z), \text{ com } g(0) \neq 0.$$

Notemos que $g(z)$ é uma função inteira que não se anula em alguma pequena vizinhança da origem. Isto mostra que os zeros da função inteira f também são isolados.

Composição. Consideremos duas funções inteiras

$$f(z) = \sum a_n z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum b_n z^n.$$

Então, analogamente a polinômios, a composição

$$f\big(g(z)\big) = \sum_n a_n \left(\sum_m b_m z^m\right)^n$$

é também uma série de potências convergente no plano complexo. Isto é, existe uma sequência de números complexos (c_p) tal que temos

$$\sum_n a_n \left(\sum_m b_m z^m\right)^n = \sum_p c_p z^p.$$

Quociente. Vejamos dois casos bastante práticos.

Caso I. Suponhamos que $f(z)$ e $g(z)$ são funções inteiras, não nulas, e

$$g(z_0) = 0.$$

Então, z_0 é um zero isolado da função $g(z)$. Suponhamos que z_0 é então um zero de ordem $m \geq 1$ de g. Isto é, podemos então escrever

$$g(z) = (z - z_0)^m G(z)$$

com $G(z)$ uma série de potências convergente em todo o plano e com $G(z)$ não se anulando em uma pequena bola aberta $B(z_0;r)$ centrada em z_0.

Pode ocorrer ou não que $f(z_0) = 0$. De qualquer forma, existe $n \geq 0$ tal que podemos escrever

$$f(z) = (z - z_0)^n F(z)$$

com $F(z)$ uma série de potências convergente em todo o plano e, supondo r pequeno o suficiente, com $F(z)$ não se anulando na bola $B(z_0;r)$.

Sob tais hipóteses, temos

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^m}\frac{F(z)}{G(z)}, \text{ em } B(z_0;r) \setminus \{z_0\}.$$

A situação "mais interessante" se dá quando ocorre

$$q = m - n > 0.$$

Neste caso, como F e G são séries de potências que não se anulam em $B(z_0;r)$, supondo r pequeno o suficiente podemos escrever

$$\frac{F(z)}{G(z)} = H(z)$$

com $H(z)$ uma série de potências centrada no ponto z_0 e que não se anula na bola $B(z_0;r)$. Isto é, temos uma simplificação do tipo

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots}{(z - z_0)^q} \\ &= \frac{c_0}{(z - z_0)^q} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{q-1}} + \cdots + \ c_q + c_{q+1}(z - z_0) + \cdots, \end{aligned}$$

para todo $z \in B(z_0;r)$ e com $c_0 \neq 0$.

Ou ainda, em uma vizinhança de z_0 temos

$$\boxed{\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c_0}{(z-z_0)^q} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{q-1}} + \cdots + \ \frac{c_{q-1}}{z-z_0} + J(z),}$$

com $J(z)$ uma série de potências centrada no ponto z_0.

Caso II. Suponhamos que $f(z)$ é inteira e que $g(z)$ é um polinômio complexo $g(z) = p(z)$ de grau 2 com duas raízes complexas distintas (a análise é similar se o grau do polinômio é maior que 2).

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o coeficiente dominante de $p(z)$ é 1. Escrevamos

$$p(z) = (z-\alpha)(z-\beta), \text{ com } \alpha \neq \beta.$$

Então, existem duas constantes complexas A e B satisfazendo

$$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}.$$

Donde segue

$$\frac{f(z)}{p(z)} = A\frac{f(z)}{z-\alpha} + B\frac{f(z)}{z-\beta}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}.$$

Basta então agora simplificar os quocientes

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{f(z)}{z-\beta},$$

conforme a conveniência. Por exemplo, suponhamos $f(\alpha) = 0$ mas $f(\beta) \neq 0$. Neste caso temos

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = F(z), \text{ com } F \text{ uma série de potências convergente no plano.}$$

Correspondente à raiz β encontramos uma simplificação do tipo

$$\frac{f(z)}{z-\beta} = \frac{f(\beta) + d_1(z-\beta) + d_2(z-\beta)^2 + \cdots}{z-\beta} = \frac{C}{z-\beta} + \varphi(z),$$

com Cuma constante complexa e $\varphi(z)$ uma série de potências convergente no plano.

Em resumo, neste particular caso obtemos

$$\boxed{\tfrac{f(z)}{p(z)} = \tfrac{C}{z-\beta} + \Phi(z),}$$

com C uma constante complexa e $\Phi(z)$ uma série de potências convergente em todo o plano.

2.16 A integral $\int \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty$ e a integral $\int \frac{\sin t}{t} dt = \pi$.

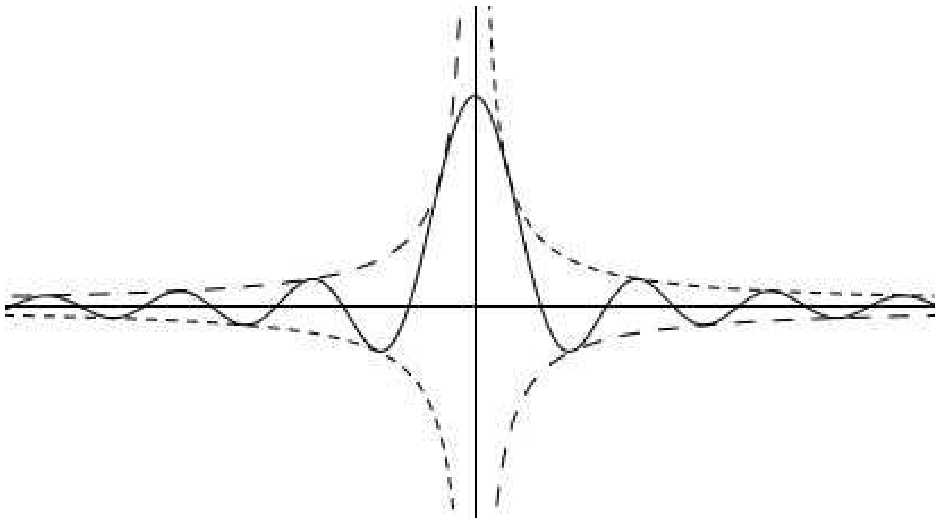

Figura 17: O gráfico de $\frac{\sin t}{t}$

Pelo primeiro limite fundamental temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Donde segue a continuidade, em toda a reta, da função **seno cardinal**

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{se } t \neq 0, \\ \\ 1, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $\operatorname{sinc}(t)$ é uma função par.

Exemplo 1. Mostremos que

$$\int \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \infty.$$

Prova.

◇ Pelo primeiro limite fundamental, existe $d > 0$ tal que

$$\frac{|\sin t|}{|t|} \geq \frac{1}{2}, \text{ se } |t| \leq d.$$

$\diamond$ Estimemos a integral do módulo do seno cardinal nos intervalos

$$[0,\pi],[2\pi,3\pi],[4\pi,5\pi],\ldots.$$

Fixemos $n \geq 0$. Com a mudança de variável $t = 2n\pi + s$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{|t|}dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n\pi+s)}{2n\pi+s}ds = \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{2n\pi+s}ds \\ &\geq \int_0^{d} \frac{s/2}{2n\pi+\pi}ds \\ &= \frac{d^2}{4(2n+1)\pi}.\end{aligned}$$

Donde segue

$$\int \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{d^2}{4\pi}\sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} = +\infty \clubsuit$$

Exemplo 2. Mostremos que

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

Prova. Mudemos para a variável complexa z. Então

$$\operatorname{sinc}(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots$$

é uma série de potências convergente em todo ponto do plano [$\operatorname{sinc}(z)$ é inteira].

Devido à paridade da função $(\sin x)/x$ temos (se existirem)

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to+\infty} 2\int_0^{R} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x}dx.$$

[O segundo e último limite é dito valor principal da integral de $(\sin x)/x$ na reta.]

É evidente a decomposição

$$(E2.1) \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z), \quad \text{com } g \text{ inteira}.$$

Seja C a semi-circunferência denteada, no semi-plano superior, esboçada.

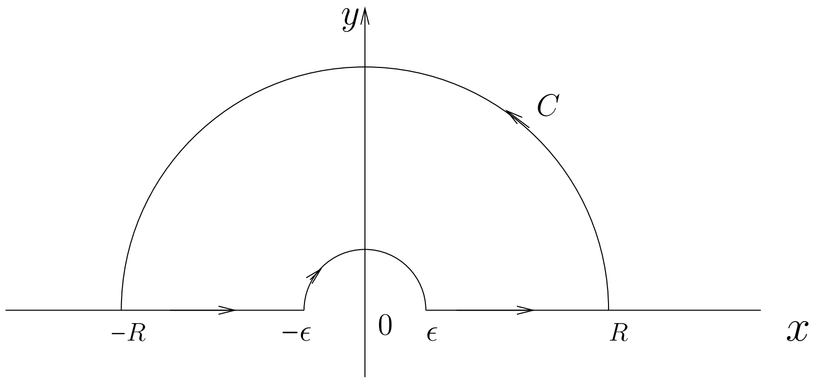

Figura 18: A semi-circunferência denteada C (Exemplo 2, seção 2.16).

Seja Γ_R a semi-circunferência de raio R, no semi-plano superior, esboçada. Seja $\epsilon > 0$ e pequeno o suficiente. Definindo

$$\gamma_\epsilon(\theta) = \epsilon e^{i\theta}, \text{ com } \theta \in [0,\pi], \quad \text{e a } \textsf{curva reversa} \quad \gamma_\epsilon^-(\theta) = \gamma_\epsilon(\pi - \theta),$$

encontramos [γ_ϵ tem sentido horário e γ_ϵ^- tem sentido anti-horário]

$$(E2.2) \qquad \int_C f(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Analisemos as integrais sobre as curvas C e γ_ϵ^-, na equação acima.

◇ Pela decomposição de f [equação ($E2.1$)] segue

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{1}{z}dz + \int_C g(z)dz = \text{Ind}(C;0) + \int_C g(z)dz = 0 + 0 = 0.$$

[A integral relativa a g vale 0 pois g é inteira e tem primitiva inteira.]

◇ Pela decomposição ($E2.1$), segue

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{1}{z}dz + \int_{\gamma_\epsilon^-} g(z)dz.$$

Seja G a primitiva (inteira) de g. Temos

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{-\epsilon i e^{i(\pi-\theta)}}{\epsilon e^{i(\pi-\theta)}}dt = -\pi i \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_\epsilon^-} g(z)dz = G(\epsilon) - G(-\epsilon).$$

A seguir, observemos que a função $(\cos x)/x$, se $x \neq 0$, é ímpar.

Impondo $\epsilon \to 0$ na equação $(E2.2)$ obtemos

$$0 = i\int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}dx \;-\; \pi i \;+\; \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

Extraindo a parte imaginária, segue

$$(E2.3) \qquad 0 = \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}dx \;-\pi \;+\; \mathrm{Im}\left[\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\right].$$

Só nos falta mostrar que a última integral tende a 0. Este resultado é conhecido como lema de Jordan. Vejamos.

◇ Prova do Lema de Jordan. Temos,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}(iRe^{i\theta})d\theta.$$

Pela desigualdade triangular para integrais segue

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

Considere o gráfico de $\sin\theta$, para θ em $[0, \pi/2]$. Tal gráfico tem concavidade para baixo (segunda derivada negativa). Então o ponto $(\theta, \sin\theta)$ está acima da reta secante a tal gráfico e pelos pontos $(0,0)$ e $(\pi/2, 1)$. Donde segue

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta.$$

Encerrando a prova do lema de Jordan, temos

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\right| \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{\frac{-2R\theta}{\pi}}d\theta = -\frac{\pi}{R}e^{\frac{-2R\theta}{\pi}}\Big|_0^{\pi} \leq \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Completando o exemplo, pela equação $(E2.3)$ segue

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}dx = \pi \clubsuit$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Hairer, E. & Wanner, G. *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
3. Lang, S. *Undergraduate Analysis*, 2nd ed., Springer, 1997 (China).
4. Lang, S. *Complex Analysis*, 4th ed., Springer, 1999
5. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
6. Spivak, M. *Calculus on Manifolds*, Perseus Books, 1965.
7. Stein, E. M. & Shakarchi, R., *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

$\varnothing$

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`