FÓRMULAS DE TAYLOR[1] COM RESTO INTEGRAL, INFINITESIMAL, DE LAGRANGE E DE CAUCHY

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Almejamos aproximar o valor de uma função f num ponto x_0 pelos valores de um polinômio em pontos próximos de x_0. Exibimos fórmulas e condições em que dada f n-vezes derivável em x_0 ocorra tal aproximação com um polinômio de grau no máximo n.

As fórmulas mais potentes correspondem àquelas com hipóteses mais fortes: a com resto infinitesimal só requer existir $f^{(n)}(x_0)$, a com resto de Lagrange é fácil de aplicar, requer a existência de $f^{(n+1)}$ numa vizinhança de x_0 e generaliza o TVM, e a com resto integral necessita $f^{(n+1)}$ integrável e restabelece parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

A ordem de apresentação escolhida não segue o "princípio do menos geral para o mais geral" e também não a linha histórica (neste tópico tais opções conflitam). A ordem adotada é a que julgamos mais simples.

A abordagem segue uma interpretação aritmética do segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

[1] B. Taylor, matemático inglês, descobriu (1715) a série de Taylor de uma função f.

1. Fórmula de Taylor com Resto Integral

Lema 1. *Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que existem as derivadas*

$$\varphi^{(k)}, \text{ para } k = 1, \ldots, n+1, \text{ com } \varphi^{(n+1)} \text{ integrável.}$$

Afirmação. Integrando sucessivamente por partes obtemos,

$$\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \qquad [\text{substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi'] \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \ - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \qquad [\text{pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi''] \\
&= \varphi'(0) \ - \ \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi^{(3)}(t)dt \qquad \left[u' = \frac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi^{(3)}\right] \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&\vdots \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \clubsuit
\end{aligned}$$

Teorema 2 (Taylor).[2] *Consideremos* $f:(c,d)\to\mathbb{R}$, *com* $f^{(n+1)}$ *integrável. Dados dois pontos* x_0 *e* x, *ambos em* (c,d), *temos*

$$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Prova.

Definamos $\varphi(t)=f\big(x_0+t(x-x_0)\big)$, para $t\in[0,1]$. Pelo Lema 1 segue

$$\begin{cases}\varphi(0) & =f(x_0)\\ \varphi(1) & =f(x)\\ \varphi'(t) & =f'\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)\\ \varphi''(t) & =f''\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^2\\ & \vdots\\ \varphi^{(k)}(t) & =f^{(k)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^k\,,\quad 1\le k\le n+1.\end{cases}$$

Logo, as derivadas de φ na origem são,

$$\varphi^{(k)}(0)=f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\,,\quad \text{se } 1\le k\le n+1\ ,\ \text{com}$$

$$\int_0^1\frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt\ =\ \int_0^1\frac{f^{(n+1)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n\,dt\ =$$
$$\Big[\textit{mudança de variável } t\mapsto y=x_0+t(x-x_0),\ \frac{dy}{dt}=x-x_0 \text{ e } t=\frac{y-x_0}{x-x_0}\Big]$$
$$=\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!}\left(1-\frac{y-x_0}{x-x_0}\right)^n\frac{dy}{x-x_0}$$
$$=\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy.$$

Para finalizar, basta substituirmos tais expressões para a função φ na equação obtida na Observação 1♣

[2]A Fórmula de Taylor com resto integral e a idéia contida nesta prova (a simplificação escolhida é minha culpa) devem-se a Cauchy (1821), que aperfeiçoou uma idéia de Johann I Bernoulli (1694), que com integração por partes obtivera séries de Taylor similares às de Taylor.

O polinômio

$$P(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i,$$

de grau no máximo n, é dito o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0. A diferença

$$R(x) = R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

é chamada de resto. A expressão

$$R(x) = R(x_0; x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

é a forma integral do resto.

Corolário 3. *Mantenhamos as notações acima. Suponhamos que*

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M, \text{ para algum } M > 0, \text{ para todo } t \text{ entre } x_0 \text{ e } x.$$

Então, temos

$$(a) \qquad |R(x)| \leq C|x - x_0|^{n+1}, \quad \text{onde } C = \frac{M}{(n+1)!}.$$

$$(b) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Prova.

(a) Trivial pois

$$|R(x)| \leq \frac{M}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} (x - t)^n \, dt \right| = \frac{M}{n!} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n + 1}.$$

(b) Segue imediatamente de (a)♣

As afirmações no Corolário 3 podem reescritas introduzindo duas notaçções muito úteis. Chamamos tais notações de *Ó grande e ó pequeno.*

Definição 4. Sejam $g(x)$ e $h(x)$ duas funções definidas numa vizinhança de x_0. Temos

(a) $g(x) = O\big(h(x)\big)$, se existe $C > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \quad \text{para todo } x \text{ numa vizinhança de } x_0.$$

(b) $g(x) = o\big(h(x)\big)$ para $x \to x_0$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Desta forma, reescrevemos o Corolário 3 na forma abaixo.

Corolário 5. *Mantenhamos as notações acima. Suponhamos que*

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M, \text{ para algum } M > 0, \text{ para todo } t \text{ entre } x_0 \text{ e } x.$$

Então, temos

(a) $R(x) = O\big((x - x_0)^{n+1}\big)$, *se* $x \to x_0$.

(b) $R(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$, *se* $x \to x_0$.

Prova. Óbvio♣

A condição (b) no Corolário 5 exprime a "ordem de contato" entre duas funções g e h n-vezes deriváveis em x_0. Isto é, temos

$$g - h = o\Big((x - x_0)^n\Big) \text{ se e só se } g(0) = h(0), \ldots, g^{(n)}(0) = h^{(n)}(0).$$

Para nossos propósitos é suficiente verificar um caso particular e simples[3].

[3] Para o caso geral vide Lima, Elon L. - Curso de Análise, Vol 1, pp 221-222, Rio de Janeiro, IMPA, 1976.

Proposição 6. *Se $Q(x)$ é um polinômio de grau no máximo n e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

então $Q \equiv 0$.

Prova.

Pela translação $x \mapsto x_0 + (x - x_0)$ temos

$$Q(x) = a_n(x - x_0)^n + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x - x_0) + a_0}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{6.1}$$

Como para $x \to x_0$ o limite do numerador é a_0 e o do denominador é 0, temos $a_0 = 0$. Eliminando na fração em (6.1) $a_0 = 0$ e um fator $(x - x_0)$ e repetindo o argumento temos $a_1 = 0$ e assim, sucessivamente todos os coeficientes de Q são nulos e portanto $Q \equiv 0$♣

Com tal proposição obtemos a unicidade do polinômio de Taylor a qual é útil pois nos possibilita reconhece-lo facilmente em meio a computações.

Corolário 7 (A Unicidade do Polinômio de Taylor). *Com as hipóteses do Teorema 2 (Taylor), se $Q = Q(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n satisfazendo*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

então Q é o polinômio de Taylor de ordem n em x_0.

Prova.

Trivial pois pelo Corolário 3, se $P(x) = P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Assim, devido às hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{P(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} + \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} \right] = 0.$$

Donde segue pela Proposição 6 que $P - Q \equiv 0$♣

Exemplo 1. As fórmulas de Taylor com resto integral das funções e^x, $\cos x$ e $\sin x$, onde $x \in \mathbb{R}$, com seus respectivos polinômios de Taylor P_n, P_{2n+1} e P_{2n+2} e respectivos restos no ponto $x_0 = 0$ são

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \, dt = P_n(x) + R_n(x).$$

$$\begin{aligned}(b) \quad \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \, dt \\ &= P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \quad \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \int_0^x \frac{\sin^{(2n+3)}(t)}{(2n+2)!}(x-t)^{2n+2} \, dt \\ &= P_{2n+2}(x) + R_{2n+2}(x).\end{aligned}$$

Verificação.

Basta utilizar o Teorema 2 (Taylor) e as observações abaixo

(a) A sequência ordenada dos números $\exp^{(m)}(0)$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$, é

$$(1, 1, 1, 1, \ldots).$$

(b) A sequência ordenada dos números $\cos^{(m)}(0)$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$, é

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots).$$

(c) A sequência ordenada dos números $\sin^{(m)}(0)$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$, é

$$(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)\clubsuit$$

As fórmulas acima foram fáceis de calcular por terem sido triviais o cômputo das derivadas na origem. No exemplo a seguir, para

$$f(x) = \arctan x,$$

tal cômputo direto é árduo mas contornável. Destaquemos que o resto obtido, dado por uma integral, não tem a forma do resto na fórmula de Taylor com resto integral. Ainda assim, estes restos são iguais como funções.

Exemplo 2. Para $\arctan x$, em $x_0 = 0$, valem as seguintes fórmulas com resto integral

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + \ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= P_{2n+1}(x) \ + R_{2n+1}(x).\end{aligned}$$

Verificação.

Utilizando a fórmula para a soma finita dos termos de uma PG finita,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,, \ \text{se } r \neq 1\,,$$

temos

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}, \ \text{onde } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, integrando e notando que $\arctan 0 = 0$ encontramos

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \arctan' t\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + \ (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt,\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Então, pelo Corolário 7 (unicidade do polinômio de Taylor), o polinômio surgido é o de Taylor de ordem $2n+1$ de $\arctan x$ em 0 pois

$$\frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \leq \frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| \ = \ \frac{x^2}{2n+3} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

Por fim,

$$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = \arctan x - P_{2n+1}(x) = R_{2n+1}(x) \clubsuit$$

No Exemplo 2 (acima) a expressão para o resto é bem mais simples que a expressão dada pela fórmula de Taylor com resto integral. Ainda mais, na primeira x é apenas um extremo de integração enquanto que na segunda x surge como extremo de integração e também no integrando.

Outra importante função é a logarítmica e ao invés de $\log x$ é mais prático considerar a função $\log(1+x)$ cujo cômputo das derivadas não é difícil pois

$$\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{x^k}.$$

Porém, como a forma integral do resto para $\log(1+x)$ é difícil de estimar procedemos como no caso da função $\arctan x$ e relacionamos

$$\frac{d}{dx}\{\log(1+x)\}$$

com a soma de uma progressão geométrica (PG).

Exemplo 3. Para $\log(1+x)$, onde $x > -1$, em uma vizinhança de $x_0 = 0$ valem as fórmulas com resto integral

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = P_n(x) + R_n(x).$$

Verificação.

Utilizando, como no Exemplo 2, a fórmula

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}\,, \text{se } r \neq 1\,,$$

temos

$$\log'(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}, \text{ onde } t > -1,$$

e então integrando,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt.$$

Pelo Corolário 7 (unicidade do polinômio de Taylor) o polinômio surgido é o de Taylor de ordem n pois analisando

$$\frac{1}{|x|^n}\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right|$$

segundo dois casos encontramos o que segue.

No caso $x > 0$ temos $0 \leq t \leq x$ e $1 + t \geq 1$ e

$$0 \leq \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{x^n}\int_0^x t^n\,dt = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ se } x \to 0.$$

No caso $-1 < x < 0$ temos $-1 < x \leq t \leq 0$ e $0 < 1 + x \leq 1 + t$ e portanto

$$\left|\frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| \leq \frac{1}{|x|^n}\frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n\,dt = \frac{|x|}{(n+1)(1+x)} \longrightarrow 0 \text{ se } x \to 0 \clubsuit$$

Exemplo 4. Para a função

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \text{ e } x > -1,$$

a fórmula de Taylor com resto integral em $x_0 = 0$ é

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x),$$

$$\text{com } R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

e coeficientes binomiais

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}, \text{para todo } m \in \mathbb{N}^*, \text{ e } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Verificação.

Basta notar que

$$f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}, \text{ onde } x \in (-1, +\infty),$$

é infinitamente derivável e aplicar o Teorema de Taylor observando as fórmulas para as sucessivas derivadas

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m} \quad \text{e}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1) = \binom{\alpha}{m}m! \clubsuit$$

Uma questão fundamental que surge no caso de $f \in C^\infty(c,d)$ é saber se a aproximação é tanto melhor quanto maior a ordem do polinômio de Taylor. Isto é, desejamos saber se dado $x_0 \in (c,d)$ e $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de f em x_0 temos

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x_0) = f(x_0).$$

Analisaremos tal questão após apresentarmos a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

A seguir vemos a bastante útil Fórmula de Taylor com resto infinitesimal, que não requer que f seja de classe C^∞ [isto é, $f \in C^\infty$].

2. A Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal

Esta é a mais simples (mas nem sempre a mais fácil) das fórmulas de Taylor, já que não supõe a existência de $f^{(n+1)}$. Nesta seção mostramos que se f é n-vezes derivável em x_0, podemos aproximar os valores de $f(x)$, com x próximo de x_0, pelos de um polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a n,

$$f(x) = P_n(x) + R(x)\,, \quad \text{com } R(x) = R(x_0; x)\,,$$

tal que o resto (ou erro) nesta aproximação,

$$R(x) = f(x) - P_n(x),$$

satisfaz a propriedade

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Tal limite pode ser interpretado como "o resto $R(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$ tende a zero, quando x tende a x_0" ou ainda, utilizando a translação $h \mapsto x = x_0 + h$, definindo

$$r(h) = R(x_0 + h) \text{ e } p_n(h) = P_n(x_0 + h)$$

e escrevendo

$$f(x_0 + h) = p_n(h) + r(h)\,, \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0\,,$$

"o resto $r(h)$ é um infinitésimo de ordem superior a n em relação a h". Este fato permite estimar o erro e deduzir propriedades de f através de uma tal aproximação.

Na próxima proposição, por serem instrutivos e úteis, destacamos dois casos: f uma vez derivável [1-derivável] e f duas vezes derivável [2-derivável].

Após tal proposição, a unificação dos argumentos e a generalização para uma função n vezes derivável [n-derivável] é curta mas "densa".

Proposição 8. *Sejam* $\delta > 0$ *e* $f : (a - \delta\,, a + \delta) \to \mathbb{R}$. *Então,*

(a) Se f *é derivável em* a *e* $|h| < \delta$, *então temos*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)\,, \quad \textit{com} \ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

(b) Se f *é duas vezes derivável em* a *e* $|h| < \delta$, *então temos*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r(h)\,, \quad \textit{com} \ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

Prova.

(a) Pela definição de $f'(a)$ segue

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right]\\ &= f'(a) - f'(a)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Como existe $f''(a)$ então f' é definida numa vizinhança do ponto a e

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{f''(a)}{2!}h^2$$

é derivável numa vizinhança da origem. Ainda, por ser derivável f é contínua e

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0.$$

Assim, pela Regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{r'(h)}{2h}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h}{h}\right]\\ &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} - f''(a)\right]\\ &= 0 \clubsuit\end{aligned}$$

Baseados na Proposição 8 temos, segundo as hipóteses, as interpretações abaixo para as aproximações de $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, localmente em x_0.

Aproximação Linear. Supondo f derivável em x_0 e

$$T : T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, vide Figura 1, temos

$$f(x) = T(x) + E(x), \text{ com } \lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0.$$

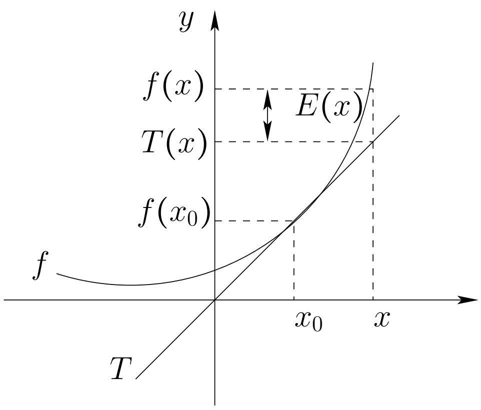

Figura 1: Aproximação Linear

Aproximação por um polinômio de grau 2. Se f é 2-vezes derivável em x_0 temos,

$$f(x) = P_2(x) + E(x), \text{ com } \lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \text{ e}$$

$$P_2 : P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

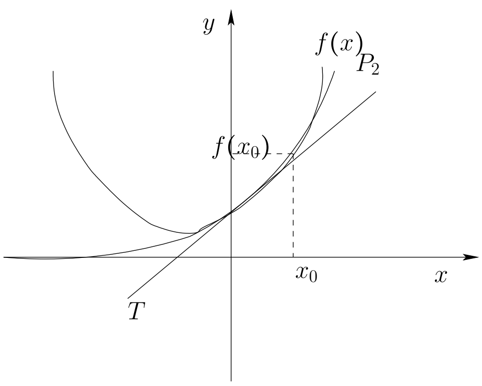

Figura 2: Aproximação por um polinômio de grau 2.

Pela Proposição 8 e o Teorema 2 (Taylor), é fácil intuir o que segue.

Teorema 9 (Taylor, infinitesimal). *Sejam* $\delta > 0$ *e* $f : (a-\delta\,, a+\delta) \to \mathbb{R}$ n*-vezes derivável em* a *e* $|h| < \delta$*. Então,*

$$(9.1) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h), \text{ com } \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

ou, equivalentemente,

$$(9.2) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n E(h), \text{ com } \lim_{h\to 0} E(h) = 0.$$

Prova.

A equivalência entre (9.1) e (9.2) é trivial. Optemos por provar (9.1).

Como existe $f^{(n)}(a)$, segue que f é $(n-1)$-vezes derivável numa vizinhança de a e portanto

$$r(h) = f(a+h) - p(h) \qquad [\text{logo, } p(h) = f(a+h) - r(h)]$$

é $(n-1)$-vezes derivável numa vizinhança da origem.

Claramente $p(h)$ é tal que

$$p^{(k)}(0) = f^{(k)}(a), \text{ se } 0 \le k \le n,$$

e as derivadas de tais ordens de $r(h) = f(a+h) - p(h)$ se anulam na origem.

Assim sendo, como as derivadas até ordem $n-1$ de h^n se anulam na origem, aplicando a regra de L'Hospital $(n-1)$-vezes obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} &= \lim_{h\to 0}\frac{r^{(n-1)}(h)}{n(n-1)\cdots 2.\, h} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\frac{r^{(n-1)}(h) - r^{(n-1)}(0)}{h-0} \\
&= \frac{1}{n!}r^{(n)}(0) \\
&= 0 \clubsuit
\end{aligned}$$

Com tal fórmula (Teorema 9) é simples aperfeiçoar e generalizar o Teste da Derivada Segunda cujo enunciado é o que segue.

Dada uma função $f \in C^2(c,d)$ e $a \in (c,d)$ com $f'(a) = 0$, vale o que segue.

(i) Se $f''(a) > 0$ então a é ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $f''(a) < 0$ então a é ponto de máximo local de f.

Notando que tal teste nada afirma se $f'(a) = f''(a) = 0$, provemos o que segue.

Proposição 10. *Seja $f \in C^{n-1}(c,d)$, com $n \geq 2$, e $a \in (c,d)$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ e que temos*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(a) Suponhamos n par.

(i) Se $f^{(n)}(a) > 0$, então a é ponto de mínimo local estrito de f.

(ii) Se $f^{(n)}(a) < 0$, então a é ponto de máximo local estrito de f.

(b) Se n é ímpar, então a não é ponto de mínimo local de f e também não é ponto de máximo local de f.

Prova.

Pelas hipóteses e pelo Teorema 9 (Taylor, infinitesimal) temos

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + E(h)h^n, \text{ com } \lim_{h\to 0} E(h) = 0.$$

Logo, supondo $|h|$ suficientemente pequeno e $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + E(h).$$

Notemos que como $E(h) \to 0$ se $h \to 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, para $|h|$ suficientemente pequeno e não nulo, os sinais de

$$f^{(n)}(a) \text{ e } \frac{f(a+h) - f(a)}{h^n}$$

são iguais. No caso n par, tal sinal é o sinal de $f(a+h) - f(a)$.

Consequentemente, para h suficientemente pequeno e $h \neq 0$ vale o que segue.

(a) (i) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então temos $f(a+h) - f(a) > 0$ e concluímos que a é ponto de mínimo local estrito.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então temos $f(a+h) - f(a) < 0$ e concluímos que a é ponto de máximo local estrito.

(b) Se n é ímpar, a expressão $f(a+h) - f(a)$ muda de sinal segundo h muda de sinal♣

3. Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange[4]. Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais.

Esta fórmula de Taylor generaliza o Teorema do Valor Médio (TVM).

Teorema 11. *Seja $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ tal que existem $f^{(i)}$, onde $1 \leq i \leq n+1$ e n é um natural fixo. Então, dados x_0 e x, ambos em (c,d), com x_0 fixo, existe um ponto $\xi = \xi(x)$ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Prova.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto ξ_1 entre os pontos x e x_0, com $\xi_1 \neq x_0$ e $\xi_1 \neq x$, satisfazendo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_1).$$

Logo,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0).$$

Seja $\eta \in \mathbb{R}$ determinado pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \eta(x - x_0)^2. \tag{11.1}$$

Trocando x_0 por t definimos [a troca x por t leva ao TVM 2-vezes, cheque]

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \eta(x - t)^2.$$

Observemos que $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)$.

[4] J. L. Lagrange (1797), matemático francês.

Logo, existe ξ_2 entre x_0 e x, com $\xi_2 \neq x_0$ e $\xi_2 \neq x$, tal que $\varphi'(\xi_2) = 0$. Porém, derivando $\varphi = \varphi(t)$ obtemos

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = \big[2\eta - f''(t)\big](x-t),$$

e avaliando tal identidade em ξ_2 obtemos

$$2\eta - f''(\xi_2) = 0 \quad \text{e} \quad \eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}.$$

Donde segue, devido a (11.1),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)^2.$$

De forma análoga, determinando λ pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lambda(x-x_0)^{n+1}$$

e trocando x_0 por t definimos[5] a função derivável $\psi(t)$, com t entre x_0 e x,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - \lambda(x-t)^{n+1},$$

com $\psi(x_0) = 0 = \psi(x)$.

A derivada de ψ é a soma [cada segundo termo entre colchetes se cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores],

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \big[-f'(t)\big] + \big[-f''(t)(x-t) + f'(t)\big] + \Big[-\tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t)\Big] + \\ &\quad + \cdots + \Big[-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big] + \lambda(n+1)(x-t)^n = \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n.\end{aligned}$$

Analogamente aos argumentos já dados, existe ξ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que $\psi'(\xi) = 0$ e portanto

$$\lambda(n+1)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \clubsuit$$

[5] A troca $x \mapsto t$ conduz a uma segunda prova, mais longa, ao aplicarmos o TVM n-vezes.

A expressão

$$R(x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

é a forma de Lagrange do resto.

Comentários.

(1) O cuidado para que ξ esteja entre x_0 e x,com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, pode ser em uma primeira abordagem negligenciado. Porém, em determinadas análises tal precisão é importante.

(2) Em geral utilizamos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, por ser prática. Seu inconveniente provém de desconhecermos o ponto "ξ". A forma integral do resto é "melhor" pois mais precisa e define uma função

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - x_0)^n \, dt$$

contínua se $f^{(n+1)}$ é integrável. Ainda mais, com respeito a classe de diferenciabilidade, temos

$$f \in C^{p+1} \quad \text{se} \quad f^{(n+1)} \in C^p.$$

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange é facilmente deduzível de sua correlata com resto integral, supondo $f^{(n+1)}$ contínua. Para tal é útil o simples e belo resultado a seguir.

Motivação. Suponhamos que a média final M em um curso seja dada pela média ponderada das notas $n_1, \ldots, p_k$, com respectivos pesos $p_1, \ldots, p_k$. Então,

$$M = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}.$$

Teorema 12 (Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais). *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, tais que f é contínua e $g \geq 0$ é integrável e*

$$\int_a^b g(t)dt > 0.$$

Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} = f(\xi). \tag{12.1}$$

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ o mínimo de f e $M = f(x_2)$ o máximo de f. Se $x \in [a,b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \ \in\ [m, M].$$

Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo teorema do valor intermediário (TVI) existe $\xi \in (x_1, x_2)$ [ou no intervalo (x_2, x_1)] tal que

$$f(\xi) = \gamma.$$

Caso 2. Se $\gamma = M$ então segue

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0$$

e portanto, como $[M - f(x)]g(x) \geq 0$, temos

$$[M - f(x)]g(x) = 0 \text{ para todo } x \in [a,b],$$

e como g não se anula em algum intervalo aberto J, segue que f é então constante e igual a M em J e assim, todo ξ em J satisfaz (12.1).

Caso 3. Se $\gamma = m$, basta aplicar o Caso 2 à função $-f$ ♣

Interpretação. Mantenhamos a notação no segundo teorema do valor médio para integrais. Tal teorema afirma que uma função contínua assume a sua média ponderada por uma função integrável $g \geq 0$ se

$$\int g\,dt > 0.$$

Ainda, admitido a possibilidade $\xi \in [a,b]$, a prova deste teorema é trivializável e até mesmo a dedução da fórmula de Taylor com resto de Lagrange a partir da fórmula de Taylor com resto integral é "simples" pois basta observar a identidade

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e a desigualdade

$$m\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq M\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt,$$

com m o mínimo e M o máximo de $f^{(n+1)}$, e então utilizar o teorema do valor intermediário (TVI).

Corolário 13 (A fórmula de Taylor com resto integral implica na fórmula de Taylor com resto de Lagrange).
Prova.

Aplicando o Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais à forma integral do resto na fórmula de Taylor de uma função f, supondo $f^{(n+1)}$ contínua, obtemos, já que a função

$$[x_0, x] \ni t \mapsto (x-t)^n$$

é positiva e com integral estritamente positiva (o caso $x < x_0$ é análogo),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

estabelecendo tal corolário ♣

Com a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange obtemos uma versão da Proposição 10.

Proposição 14. *Seja $f \in C^n(c,d)$, onde $n \geq 2$, e $a \in (c,d)$ tal que*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(a) Suponhamos que n é par e que J é o maior sub-intervalo de (c,d), com $a \in J$, tal que $f^{(n)}$ não se anula em J.

(i) Se $f^{(n)}(a) > 0$ então a é ponto de mínimo local estrito de f restrita ao sub-intervalo J.

(ii) Se $f^{(n)}(a) < 0$ então a é ponto de máximo local estrito de f restrita ao sub-intervalo J.

(b) Se n é ímpar então a não é ponto de mínimo local de f nem ponto de máximo local de f.

Prova.

Dado $x \in (c,d)$, pelo Teorema 11 (fórmula de Taylor com resto de Lagrange) existe $\xi = \xi(x)$ entre a e x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Para J como no item (a) e $x \in J \setminus \{a\}$ temos que $\xi \in J$, os números $f^{(n)}(a)$ e $f^{(n)}(\xi)$ tem mesmo sinal e

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Utilizando tal equação passamos a verificar as afirmações (a) e (b).

(a) Temos $(x-a)^n > 0$ pois n é par e

(i) $f^{(n)}(a) > 0 \Longrightarrow f^{(n)}(\xi) > 0$ e $f(x) > f(a)$

(ii) $f^{(n)}(a) < 0 \Longrightarrow f^{(n)}(\xi) < 0$ e $f(x) < f(a)$.

(b) Para $x \in J$, o sinal da expressão

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}$$

é constante mas o do denominador $(x-a)^n$ não (pois n é ímpar) e assim o do numerador $f(x) - f(a)$ também não ♣

4. Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy.

Esta fórmula aperfeiçoa a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. Nós a usaremos para a análise da Fórmula Binomial (Exemplo 9).

Teorema 15. *Seja $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ tal que existem $f^{(i)}$, onde $1 \leq i \leq n+1$ e n é um natural fixo. Então, dados x_0 e x, ambos em (c,d), com x_0 fixo, existe $\xi = \xi(x)$ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Prova.

Consideremos para t entre x_0 e x a função Ψ [vide a definição de $\psi = \psi(t)$ no Teorema 11 (fórmula de Taylor com resto de Lagrange)]

$$\Psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Pela argumentado no Teorema 11 [vide o cômputo de ψ' no Teorema 11] a derivada de Ψ é

$$\Psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

e pelo TVM aplicado a Ψ segue que existe ξ entre x e x_0, com $\xi \neq x$ e $\xi \neq x_0$, tal que

$$\frac{\Psi(x) - \Psi(x_0)}{x - x_0} = \Psi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

Mas, evidentemente,

$$\Psi(x) = 0 \;\text{ e }\; \Psi(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

e finalmente,

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \clubsuit$$

Comentário. Admitindo $f^{(n+1)}$ contínua, a fórmula de Taylor com resto de Cauchy é consequência imediata da fórmula de Taylor com resto integral pois sob tal hipótese o teorema do valor médio para Integrais assegura a existência de ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

5. Aplicações. Funções elementares. O número e é irracional. Fórmula Binomial, com expoente real.

Exemplo 5. As fórmulas de Taylor, resto de Lagrange, de e^x, $\cos x$ e $\sin x$.

(a) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe ξ entre 0 e x, com $\xi \neq x$ e $\xi \neq 0$, tal que

$$e^x \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Em particular,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe ξ entre 0 e x, com $\xi \neq x$ e $\xi \neq 0$, tal que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

(c) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe ξ entre 0 e x, com $\xi \neq x$ e $\xi \neq 0$, tal que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Verificação. Segue imediatamente do Exemplo 1 e do Teorema 11♣

Exemplo 6. Dadas as funções e^x, $\cos x$ e $\sin x$ e um número $x \in \mathbb{R}$, temos

(a) $e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

(b) $\cos x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)$.

(c) $\sin x = \lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$.

Verificação.

Sejam

$$P_n(x),\ P_{2n}(x) \text{ e } P_{2n+1}(x)$$

os polinômios de Taylor de ordem n, $2n$ e $2n+1$, em $x = 0$, de e^x, $\cos x$ e $\sin x$, respectivamente, e

$$R_n(x),\ R_{2n}(x) \text{ e } R_{2n+1}(x)$$

seus respectivos restos de Lagrange, vide Exemplo 5.

Mostremos que tais restos tendem a zero se n tende a $+\infty$.

Observemos antes que fixado $m \in \mathbb{N}$, para $n > m$ temos

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!} \frac{m}{m+1} \frac{m}{m+2} \cdots \frac{m}{n} \le \frac{m^m}{m!} \frac{m}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

(a) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le e^m \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

(b) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \le \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

(c) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|x| < m < n$ temos

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \le \frac{m^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \clubsuit$$

Exemplo 7. Para $-1 \le x \le 1$ é válida a expressão,

$$\arctan x = \lim_{n\to+\infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

Em particular,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right).$$

Verificação.

Pelo Exemplo 2, basta provarmos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt = 0, \text{ se } |x| \le 1.$$

Para tal x é claro que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \le \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \clubsuit$$

Exemplo 8. Para $-1 < x \leq 1$ é válida a expressão,

$$\log(1+x) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right].$$

Em particular,

$$\log 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

Verificação.

Pelo Exemplo 3, basta mostrarmos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt = 0 \text{ se } x \in (-1,1].$$

Se $x \in [0,1]$, é fácil ver que

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \;\leq\; \int_0^x t^n\,dt \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} \;\leq \frac{1}{n+1} \;\xrightarrow{n\to+\infty}\; 0.$$

Se $-1 < x < 0$, para $-1 < x \leq t \leq 0$ temos

$$0 < 1+x \leq 1+t \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}.$$

Concluímos então que

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \;=\; \left|\int_x^0 \frac{t^n}{1+t}dt\right| \leq \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \;\leq\; \frac{1}{(1+x)(n+1)} \;\xrightarrow{n\to+\infty}\; 0\,\clubsuit$$

A seguir analisamos a função binomial

$$(1+x)^\alpha,\ \text{com expoente } \alpha \text{ não natural e } x > -1,$$

para a qual a fórmula de Taylor com resto integral é mais apropriada que a com resto de Lagrange.

[Para uma abordagem da série binomial via teoria de séries (tal abordagem é bastante simples, no entanto cobra um "pedágio"), por favor vide

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`]

Exemplo 9. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$. Definamos os coeficientes

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}, \text{ onde } m \in \mathbb{N}, \text{ com } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Então, temos

$$(a) \qquad (1+x)^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n\right], \text{ se } x \in (-1,1).$$

$$(b) \qquad 2^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2} + \cdots + \binom{\alpha}{n}\right], \text{ se } \alpha > 0.$$

Verificação.

Seja $f(x) = (1+x)^\alpha$, com $x > -1$.

(a) Pelo Exemplo 4 (pg. 10) basta checarmos que o resto $R_n(x)$ satisfaz

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0, \text{ se } |x| < 1.$$

Computando $f^{(n+1)}$ e reescrevendo o resto obtemos,

$$\frac{f^{n+1}(t)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+t)^{\alpha-n-1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}(1+t)^{\alpha-n-1},$$

$$(E9.1) \qquad R_n(x) = \alpha\binom{\alpha-1}{n}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt\,.$$

Analisemos então o resto, iniciando com os coeficientes binomiais.

Afirmação[6]**.** Vale a fórmula

$$\binom{\alpha-1}{n}x^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0, \text{ se } |x| < 1 \text{ e } \alpha \notin \mathbb{N}.$$

Prova da Afirmação. Primeiro notemos que, é fácil ver,

$$A(n) = \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| = \left|\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|$$

e fixemos r tal que $|x| < r < 1$. Então,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x\right| = |x|$$

e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|1-\frac{\alpha}{j}\right|\,|x| < r < 1\,, \text{ para todo } j > p, \text{ com } j \in \mathbb{N}.$$

[6] Tal resultado é trivial via Séries (`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`).

Supondo $n > p$ concluímos a afirmação com as observações

$$\begin{cases} \left|\binom{\alpha-1}{n} x^n\right| = A(p)|x|^p \left|\left(1 - \frac{\alpha}{p+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\right| |x|^{n-p} \leq A(p)\,|x|^p\, r^{n-p}, \\ \text{e} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} A(p)\,|x|^p\, r^{n-p} = 0. \end{cases}$$

A afirmação está provada.

A seguir, estudamos o resto $R_n(x)$ em (E9.1) dividindo a análise em dois casos: o caso x positivo e o caso x negativo.

◇ Caso $0 < x < 1$. Temos $0 \leq t \leq x < 1$ e, para cada $n > \alpha - 1$,

$$0 \leq (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \leq x^n.$$

Donde segue (graças à afirmação provada)

$$|R_n(x)| \leq \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right| \int_0^x x^n\,dt = \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right| x^{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

◇ Caso $-1 < x < 0$. O valor absoluto do integrando em (E9.1) é

$$\frac{(t-x)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1} \qquad [\text{pois, } -1 < x \leq t \leq 0].$$

Também temos $0 < 1 + x \leq 1 + t \leq 1$. Donde segue

$$\begin{cases} (1+t)^{\alpha-1} \leq B = B(x) = \max\left(1, (1+x)^{\alpha-1}\right) \\ \text{e} \\ \frac{t-x}{1+t} \leq |x| \qquad [\text{pois } 0 \leq t - x \leq -tx - x = |x|(t+1)]. \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{(t-x)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1} \leq B(x)|x|^n, \quad \text{para todo } t \in [x,0].$$

Por fim, analogamente ao caso acima temos

$$|R_n(x)| \leq B\left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

(b) Este é o caso $x = 1$ e $\alpha > 0$. Estimemos (E9.1) mais precisamente. A sequência $A(n)$ é limitada pois se p é o primeiro natural tal que $0 < \alpha < p+1$, e portanto $0 < 1 - \frac{\alpha}{p+1} < 1$, então temos (para $n > p$)

$$A(n) \leq \left|\left(1 - \frac{\alpha}{1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\right|\right. = C(\alpha) \text{ e}$$

$$|R_n(1)| \leq \alpha C(\alpha)\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{\alpha C(\alpha)}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 ♣$$

A fórmula binomial é útil para desenvolvermos outras funções. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 10. Para $|x| < 1$ são válidas as expressões,

$$(a)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n\right].$$

$$(b)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}\right].$$

Verificação.

São ambos consequências do Exemplo 9.

(a) Temos

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n\right],\quad \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1.$$

Para $n \geq 1$, valem as fórmulas

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n}\\ &= (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2n}.\end{aligned}$$

(b) Segue imediatamente de (a), trocando x por $-x^2$♣

Exemplo 11. Consideremos a função $\arcsin x$.

(a) Para $|x| < 1$ é válida a expressão,

$$\arcsin x = \lim_{n\to+\infty}\left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

(b) A expressão entre colchetes em (a) é o polinômio de Taylor P_{2n+1} de $\arcsin x$ na origem.

Verificação.

(a) Utilizemos os Exemplos 9 [vide (9.1)] e 10(b) e sua notações. Então encontramos, para $|y| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1.3}{2.4}y^4 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}y^{2n} + R_n(y^2),$$

com

$$|R_n(y^2)| \leq \left|\frac{1}{2}\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right| y^{2n+2}.$$

A seguir, integrando (podemos pois o resto integral é uma função contínua pelo teorema fundamental do cálculo (TFC) obtemos

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x R_n(y^2)\,dy.$$

Então, pela Afirmação vista no Exemplo 9 temos

$$\left|\int_0^x R_n(y^2)\,dy\right| \leq \frac{1}{2}\left|\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right| \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,, \text{ se } |x| < 1.$$

(b) Basta notar que

$$\left|\frac{\arcsin x - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^x R_n(y^2)\,dy\right| \leq \frac{1}{2}\left|\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right| \frac{x^2}{2n+3}$$

e que

$$\frac{1}{2}\left|\binom{-\frac{3}{2}}{n}\right| \frac{x^2}{2n+3} \xrightarrow{x\to 0} 0 \clubsuit$$

Exemplo 12. (Teorema) O número **e** é irracional.

Prova.

Seja

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Então, temos $s_n < e$ e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = e.$$

Ainda, para $p \geq 1$ segue

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= \tfrac{1}{(n+1)!} + \tfrac{1}{(n+2)!} + \cdots + \tfrac{1}{(n+p)!} \\ &< \tfrac{1}{(n+1)!}\Big[1 + \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(n+1)^{p-1}}\Big] \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\tfrac{1}{n+1}\Big)^k \leq \tfrac{1}{(n+1)!}\tfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \tfrac{1}{n\,n!}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 < e - s_n = \lim_{p\to+\infty}(s_{n+p} - s_n) \leq \frac{1}{nn!}.$$

Suponhamos, por contradição que o número e é racional. Escrevendo

$$e = \frac{p}{q},\ \text{com } p, q \in \mathbb{N} \text{ e } mdc(p,q) = 1,$$

obtemos

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q},$$

com os números

$$q!\,e \quad \text{e} \quad q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

inteiros. Logo, o número $q!\,(e - s_q)$ é um inteiro entre 0 e 1 $\lightning$

Comentários.

(1) No Exemplo 6(a) vimos que se $x \in [0,1]$ então,

$$\left| e^x - \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]\right| \leq \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!},$$

que não é uma estimativa para e tão precisa quanto a obtida no Exemplo 12, visto que

$$\frac{1}{nn!} < \frac{3}{(n+1)!},\ \text{para todo } n \geq 1.$$

Mas, a ordem de grandeza é a mesma já que

$$\frac{1}{10}\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{nn!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ainda mais, verificando que

$$0 < e - s_7 < 10^{-4}$$

e que

$$\begin{aligned} s_7 &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \\ &= 2 + \frac{3620}{5040} \\ &= 2 + \frac{181}{252} = 2,7182\ldots \end{aligned}$$

obtemos as primeiras três casas decimais de

$$e = 2,718\ldots.$$

(2) Vimos que as funções

$$\begin{cases} e^x, \log(1+x), \\ \cos x, \sin x, \\ \arctan x, \arcsin x \text{ e} \\ (1+x)^\alpha \end{cases}$$

admitem expansões em intervalos abertos centrados em $x = 0$ e fazendo uso de translações tais como

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0},\ \sin x = \sin[(x-x_0)+x_0] = \sin(x-x_0)\cos x_0 + \cos(x-x_0)\sin x_0),$$

etc., não é difícil ver que tais admitem expansões ao redor de outros pontos x_0 em seus domínios.

Funções com tais propriedades são ditas **analíticas** e são muito importantes e tem sob certos aspectos comportamento semelhante a polinômios.

Na seção 6, Exemplo 14, mostramos um exempo de uma função infinitamente derivável (isto é, de classe C^∞) que não é analítica.

Exemplo 13. Computemos um valor aproximado para

$$\sqrt[3]{8,2}$$

utilizando um polinômio de Taylor de ordem 2 e avaliemos o erro.

Verificação.

O polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno de $x = 8$ é

$$P(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2.$$

Logo, como temos

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},$$

segue que

$$P(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2.$$

Encontramos então

$$P(8,2) = 2 + \frac{2\cdot 10^{-1}}{12} - \frac{4\cdot 10^{-2}}{144} = 2 + \frac{1}{60} - \frac{1}{3600} = 2 + \frac{59}{3600} \approx 2,0163888.$$

Avaliação do erro.

Pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos,

$$f(8,2) - P(8,2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0,2)^3 \ \text{, com } \xi \text{ entre } 8 \text{ e } 8,2.$$

Porém

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$$

e para ξ entre 8 e $8,2$ temos $\xi^8 \geq 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ e $\sqrt[3]{\xi^8} \geq 2^8$ e

$$0 < \frac{f'''(\xi)}{3!} \leq \frac{1}{3!}\frac{10}{27}\frac{1}{2^8}2^3\cdot 10^{-3} = \frac{10^{-2}}{64\cdot 81} \leq 10^{-2}\cdot 10^{-3} = 10^{-5}.$$

Concluímos então que

$$\sqrt[3]{8,2} \approx 2,0163888, \text{ com erro inferior a } 10^{-5},$$

é uma aproximação por falta para $\sqrt[3]{8,2}$ [isto é, $2,0163888 \leq \sqrt[3]{8,2}$] e com precisão até a quarta casa decimal ♣

6. Uma função C^∞ mas não aproximável via Fórmula de Taylor.

Exemplo 14. Uma função de classe C^∞ mas não analítica. A função

$$\Lambda(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x \le 0\,, \end{cases}$$

é tal que $\Lambda^{(n)}(0) = 0$ para todo n e de classe C^∞ na reta.

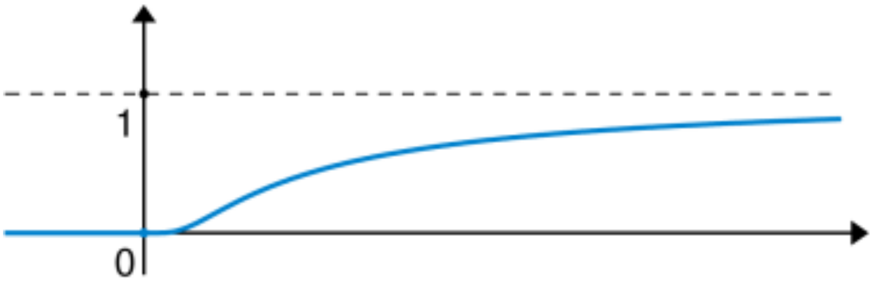

Figura 3: Gráfico de $\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$, com $\Lambda(x) = 0$ se $x \le 0$.

Verificação. Seja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

É claro que $\Lambda(1) = e^{-1}$. É também claro que

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada $\Lambda^{(n)}$ [com $\Lambda^{(0)} = \Lambda$] satisfaz

$$\Lambda^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0, \text{ com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x\to 0^+} \Lambda^{(n)}(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} P_n(y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\Lambda^{(n)}(x) - 0}{x - 0} &= \lim_{y\to+\infty} y e^{-y} P_n(y) \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por indução segue que $\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda^{(3)}, \ldots$ são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo, Λ é infinitamente derivável♣

Definição. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **suporte** de f é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função f não se anula. Temos a notação

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Exemplo 15. Seja $\Lambda = \Lambda(x)$ como no exemplo 14. Consideremos a função

$$\varphi(x) = \Lambda(1 - x^2).$$

A função φ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \varphi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{supp}(\varphi) = [-1, +1].$$

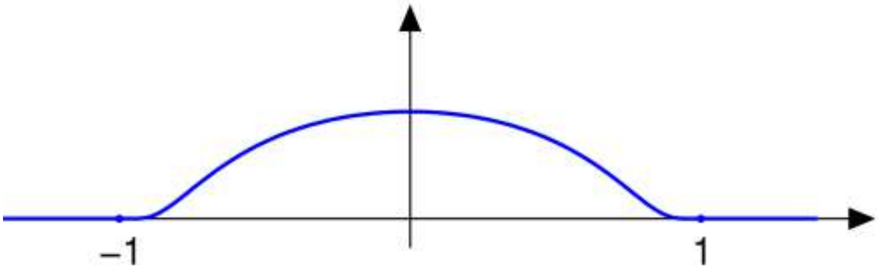

Figura 4: Gráfico da função φ.

A expressão para φ é

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \clubsuit \end{cases}$$

A seguir, consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx > 0.$$

Definamos a função

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx.$$

Dado um abitrário $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$\Phi_\epsilon(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}.$$

A função Φ_ϵ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \Phi_\epsilon(x) \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \mathrm{supp}(\Phi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, +\epsilon].$$

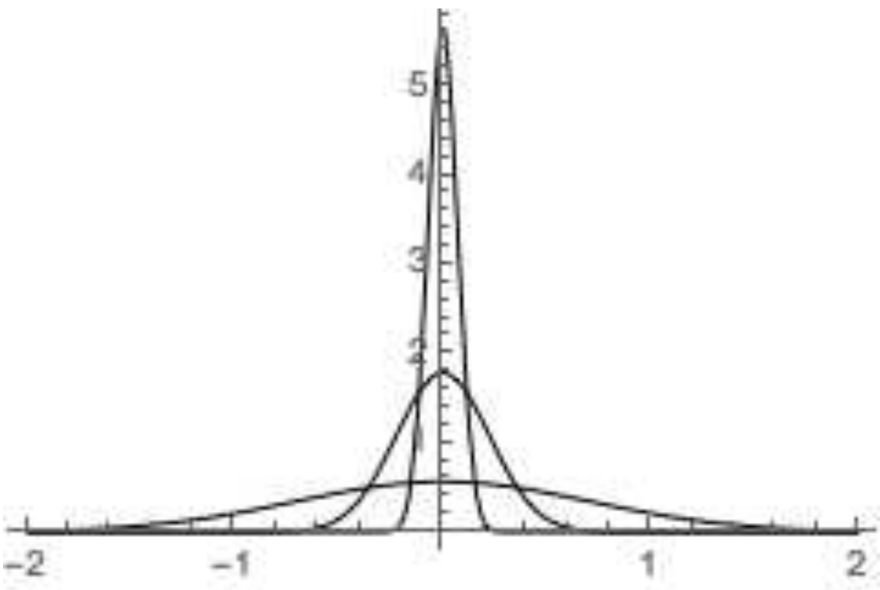

Figura 5: Ilustração para o gráfico de Φ_ϵ, conforme $\epsilon \to 0^+$.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \Phi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\epsilon} \epsilon\, dt \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\epsilon} dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exercício. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ se } x \neq 0, \\ 0, \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

é tal que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n e de classe C^∞ na reta.

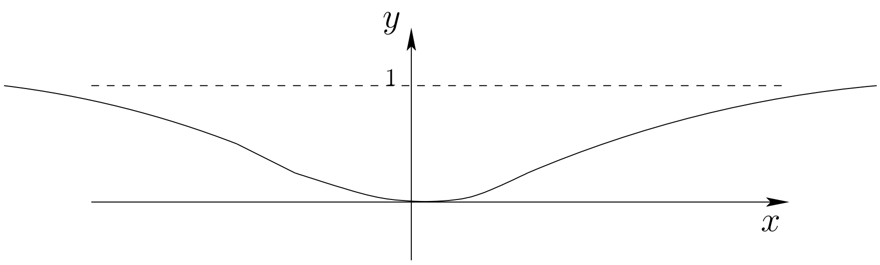

Figura 6: Gráfico de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$, com $f(0) = 0$.

Sugestão.

Por indução, as derivadas $f^{(n)}$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} R_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x \neq 0,$$

onde $R_n(x)$ é uma função racional.

A seguir, adapte a prova dada no exemplo 14.

EXERCÍCIOS

1. Determine as primeiras 5 casas decimais de π.

2. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de x_0.

   (a) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

   (d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ e $x_0 = 0$

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$

3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em volta de $x_0 = 0$.

   (a) $f(x) = \tan x$.

   (b) $f(x) = e^{\sin x}$.

4. Determine o polinômio de Taylor de ordem 4 de $f(x) = x^5 + x^3 + x$ em $x_0 = 1$.

5. Escreva cada um dos seguintes polinômios em x como polinômios em $(x-3)$.

   (a) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.

   (b) x^5.

6. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro

   (a) $\ln 1,3$

   (b) $e^{0,03}$

   (c) $\sqrt{3,9}$

   (d) $\cos 0,2$.

7. Mostre que, para todo x,

   (a) $|\sin x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3$.

   (b) $\left|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!})\right| \leq \frac{1}{3!}|x|^3$.

8. Mostre que, para $0 \leq x \leq 1$

$$0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{x^3}{2}.$$

9. Utilizando a relação $\sin x = x + o(x^2)$, calcule

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^2}{x^2}\ .$$

10 . Verifique que

   (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

   (b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

   (c) $\sin x = x + o(x^2)$

   (d) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\Big((x-1)^2\Big)$

11. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de $x_0 = 0$.

   (b) Seja $a > 0$ um número real dado. Mostre que não existe $M > 0$ tal que para todo $x \in [0, a]$ ocorra $|f'''(x)| \leq M$.

12. Seja f derivável até a 2 ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Mostre que existe uma função $\varphi(x)$ definida em I tal que, para todo $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \varphi(x)(x - x_0)^2\,, \text{ com } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0\ .$$

13. Generalize o Exercício 12 para uma função f derivável até ordem n.

14. Seja f derivável até a 2 ordem no intervalo fechado $[a,b]$ e seja $x_0 \in [a,b]$. Mostre que existe $M > 0$ tal que para todo $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x - x_0|^2 \ ,$$

com $P(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 2

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Sugestão. Mostre que a função $\varphi(x)$ do Exercício 12, com $\varphi(x_0) = 0$, é contínua em $x_0 = 0$.

15. Generalize o Exercício 14 para uma função f derivável até ordem n.

16. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

   (a) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \ln x$ e $x_0 = 1$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

   (d) $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0 = 0$.

17. Seja $f(x) = \sin x$.

   (a) Se n é um natural ímpar e $x \in \mathbb{R}$ então,

$$\left|\sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right]\right| \ \leq \ \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

   (b) Avalie $\sin(1)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

   (c) Avalie, com erro em módulo inferior a 10^{-3},

$$\int_0^1 \sin x^2 \, dx \ .$$

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom M. *Analísis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Boulos, Paulo. *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*, E. Edgard Blücher, 1986.
3. Bressoud, D. *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.
4. Gouvêa, Fernando Q. *Séries Infinitas*, Apostila, Escola Politécnica da USP e Instituto de Matemática da USP, 1983.
5. Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, vol 1, 5 ed., LTC Editora, 2001.
6. Hairer, E. and Wanner, G. *Analysis by Its History*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer 2000.
7. Jahnke, H. N. (editor), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Vol 24, AMS, 2003.
8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
9. Shilov, G. E. *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Publications, INC, 1996.
10. Spivak, M. *Calculus*, Editorial Reverté, 1978.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`