A EQUAÇÃO DIFERENCIAL $x'(t) = kx(t)$

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2017

Teorema. *Seja k um número real fixado. Consideremos a equação diferencial linear ordinária (e real)*

$$x'(t) = kx(t), \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

Então, $x = x(t)$ é uma solução de tal equação diferencial se e somente se temos

$$x(t) = Ce^{kt}, \text{ para alguma constante real } C.$$

Prova.

- Notemos que toda função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita na forma

$$x(t) = Q(t)e^{kt}, \text{ onde } Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- Claramente, a ordem de derivabilidade de $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coincidem.
- Segue então

$$\begin{aligned} x' = kx &\Longleftrightarrow Q'e^{kt} + kQe^{kt} = kQe^{kt} \\ &\Longleftrightarrow Q'e^{kt} = 0 \\ &\Longleftrightarrow Q' = 0 \\ &\Longleftrightarrow Q = C \text{ para algum } C \in \mathbb{R} \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício. Argumentando analogamente ao teorema acima, mostre que as soluções da edolcc (edo linear com coeficientes constantes)

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^4 x = 0, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

são

$$x(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + c_3t^2e^{\alpha t} + c_4t^3e^{\alpha t}, \text{ com } c_{i's} \in \mathbb{R}.$$