

Ano 2017/2022  
**INTRODUÇÃO À TEORIA QUALITATIVA**  
**(SISTEMAS AUTÔNOMOS)**

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>      [oliveira@ime.usp.br](mailto:oliveira@ime.usp.br)

Estas notas se destinam ao curso de Equações Diferenciais - MAT-226 - IMEUSP - 2017/2022 e se baseiam em notas de aula manuscritas do prof. Gláucio Terra (até então não digitadas) e trechos dos capítulos VI, VII e VIII do livro “Lições de Equações Diferenciais Ordinárias”, J. Sotomayor, IMPA, 1969, e também nas demais referências citadas. Os eventuais erros são de minha responsabilidade.

Seção 5 - Introdução à teoria qualitativa

5.1 Nomenclatura.....	2
5.2 Propriedades de Fluxo e Órbitas.....	4
5.3 Retrato de fase (e orientação).....	12
5.4 Fluxos conjugados.....	26
5.5 Pontos singulares hiperbólicos.....	31
5.6 Linearização.....	33
5.7 Teorema de Poincaré-Bendixon.....	35
5.8 Estabilidade (Liapunov).....	42
5.9 Campos Hamiltonianos.....	44
Referências.....	45

## 5.1 - NOMENCLATURA

Consideremos um campo vetorial

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ com } \Omega \text{ aberto em } \mathbb{R}^n,$$

contínuo e localmente de Lipschitz.

Passemos a estudar a equação

$$x' = F(x).$$

Esta é chamada equação diferencial autônoma pois independe do tempo. Dizemos que  $x : I \rightarrow \Omega$ , onde  $I$  é um intervalo aberto não degenerado e na reta, é uma solução da equação autônoma se temos

$$x'(t) = F(x(t)) \text{ para todo } t \in I.$$

Para focar a equação autônoma sob o prisma das equações já vistas, as quais dependiam da variável temporal, consideramos a função

$$G : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega, \text{ com } G(t, x) = F(x),$$

e a equação

$$x' = G(t, x).$$

Já vimos [vide <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-PICARD.pdf>] que então valem a existência e unicidade das soluções, a existência do intervalo maximal e da solução maximal e a dependência e a continuidade das soluções em relação aos dados iniciais.

Dado um caminho-solução  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da equação autônoma  $x' = F(x)$ , que passa por  $(t_0, x_0)$  [isto é,  $\gamma(t_0) = x_0$ ] segue que a curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + t_0)$$

também é uma solução de  $x' = F(x)$  porém passando por  $(0, x_0)$ . Como  $\tilde{\gamma}$  e  $\gamma$  diferem por uma translação na variável independente, suas imagens coincidem.

Assim, para equações autônomas é suficiente investigar as soluções com condição inicial da forma  $(0, x_0)$  e é o que fazemos daqui por diante.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Dado um ponto  $x \in \Omega$ , seja  $J(x)$  o intervalo maximal da solução maximal do problema

$$\begin{cases} \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = x. \end{cases}$$

Tal solução maximal é uma **curva integral maximal**, indicada

$$\gamma_x : J(x) \rightarrow \Omega.$$

Denotamos por  $\gamma_x^*$  a imagem de  $\gamma$ . Isto é,

$$\gamma_x^* = \gamma(J(x)) = \{\gamma(t) : t \in J(x)\}.$$

A imagem de  $\gamma$  é chamada **trajetória** ou **órbita** do campo  $F$  pelo ponto  $x$ .

**Definição (Fluxo de um campo vetorial).** Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo e localmente de Lipschitz, com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos

- $D = D_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J(x)\}$ .
- O fluxo  $\Phi = \Phi_F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\Phi(t, x) = \gamma_x(t),$$

onde  $\gamma_x$  é a curva integral maximal passando pelo ponto  $(0, x)$  no produto cartesiano “tempo×espaço” [isto é, temos  $\gamma_x(0) = x$  ou, dito de outra forma, o ponto  $(0, x)$  pertence ao gráfico de  $\gamma_x$  dado por  $\{(t, \gamma_x(t)) : t \in J(x)\}$ ].

- O fluxo é **completo** se  $D = \mathbb{R} \times \Omega$ . Isto é, se todas as curvas integrais são **globais** [i.e., globalmente definidas ou, ainda, definidas em  $(-\infty, +\infty)$ ]. Utilizamos a notação

$$\Phi_t(x) = \Phi(t, x).$$

Já mostramos [vide <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-PICARD.pdf>] que o domínio  $D$ , do fluxo  $\Phi$ , é um conjunto aberto.

Na literatura é usual chamar o fluxo completo de **fluxo** e o fluxo não completo de **fluxo parcial**.

## 5.2 - PROPRIEDADES DE FLUXO E ÓRBITAS

**Lema (Propriedade de grupo da curva maximal).** *Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo e localmente de Lipschitz, com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $y = \gamma_x(s)$ , com  $s \in J(x)$ . Então temos*

$$\begin{cases} J(y) = J(x) - s \\ e \\ \gamma_y(t) = \gamma_x(t + s) \text{ para todo } t \in J(y). \end{cases}$$

**Prova.**

◊ Definamos

$$\Gamma(t) = \gamma_x(t + s),$$

obtida de  $\gamma_x$  via uma translação na variável independente. Então  $\Gamma$  satisfaz

$$\Gamma' = F(\Gamma) \quad \text{e} \quad \Gamma(0) = y.$$

É claro que o intervalo maximal de  $\Gamma$  é  $\{t : t + s \in J(x)\} = J(x) - s$ . Considerando  $\Gamma$  neste intervalo, por definição temos

$$\Gamma = \gamma_y \quad \text{e} \quad J(y) = J(x) - s \spadesuit$$

**Teorema (Propriedades de grupo do fluxo).** *Consideremos o campo vetorial  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo, e localmente de Lipschitz no aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , e seu fluxo*

$$\Phi : D \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Vale o que segue.

- (a) Temos  $\Phi_0(x) = x$  para todo  $x \in \Omega$ .
- (b) Temos  $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$  nos pontos em que o lado esquerdo está definido.
- (c) Temos  $\Phi_s(\Phi_t(x)) = \Phi_{s+t}(x)$ , para quaisquer  $x \in \Omega, s \geq 0$  e  $t \geq 0$ , no sentido de que um dos lados da equação está definido se e somente se o outro lado também está e então vale a igualdade.
- (d) Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o domínio  $D_t = \text{dom}(\Phi_t)$  da seção  $\Phi_t$  é aberto em  $\Omega$  e

$$\Phi_t : D_t \longrightarrow D_{-t} \text{ é um homeomorfismo.}$$

**Prova.**

(a) Por definição segue  $\Phi_0(x) = \Phi(0, x) = \gamma_x(0) = x$ .

(b) Supondo existir  $(\Phi_s \circ \Phi_t)(x)$ , seja  $y = \Phi_t(x)$ . A *propriedade de grupo* mostra

$$(\Phi_s \circ \Phi_t)(x) = \Phi_s(y) = \gamma_y(s) = \gamma_x(s+t) = \Phi_{s+t}(x).$$

(c) Nos pontos em que o lado esquerdo está definido, já mostramos em (a) que vale a identidade procurada.

Reciprocamente, suponhamos que o lado direito está definido. Logo,  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$  são tais que  $s+t \in J(x)$ . Portanto  $[0, s+t] \subset J(x)$  e então  $t \in J(x)$ . Então, está bem definida a curva

$$\psi : [0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ onde } \psi(\tau) = \Phi_{\tau+t}(x).$$

Claramente  $\psi$  é curva integral do campo  $F$  e  $\psi(0) = \Phi_t(x)$ . Donde segue

$$[0, s] \subset J(\Phi_t(x)).$$

Portanto  $s \in J(\Phi_t(x))$  e

$$\Phi_s(\Phi_t(x)) = \psi(s) = \Phi_{s+t}(x).$$

(d) O conjunto  $D_t$ . Temos

$$D_t = \text{dom}(\Phi_t) = \{x \in \Omega : t \in J(x)\} = \pi [D \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n)],$$

onde  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção sobre  $\mathbb{R}^n$  definida por  $\pi(t, x) = x$ .

Já vimos que  $D$  é aberto em  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Logo,  $D \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n)$  é aberto em  $\{t\} \times \mathbb{R}^n$ , com a topologia relativa.

Ainda mais,  $\pi : \{t\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é evidentemente um homeomorfismo.

Segue então que  $D_t = \pi [D \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n)]$  é aberto em  $\Omega$ .

O homeomorfismo  $\Phi_t : D_t \rightarrow D_{-t}$ . Podemos supor  $t > 0$ . Dado  $x \in D_t$ , consideremos o caminho (veremos que é um “caminho reverso”)

$$\Psi : [-t, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ onde } \psi(s) = \Phi_{s+t}(x).$$

Então,  $\psi$  é uma curva integral do campo  $F$  e satisfaz  $\psi(0) = \Phi_t(x)$ . Portanto

$$[-t, 0] \subset J(\Phi_t(x)), \quad -t \in J(\Phi_t(x)) \quad \text{e (por (b))} \quad \Phi_{-t}(\Phi_t(x)) = \Phi_0(x) = x.$$

Isto mostra que

$$\text{Imagem}(\Phi_t) \subset D_{-t} \quad \text{e} \quad \Phi_{-t} \circ \Phi_t = \text{id} \quad [\text{a identidade}].$$

A seguir, a composição reversa. Dado  $x \in D_{-t}$ , e assim  $-t \in J(x)$ , seja

$$\eta : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{onde} \quad \eta(s) = \Phi_{s-t}(x).$$

Então,  $\eta$  é curva integral do campo  $F$  e satisfaz  $\eta(0) = \Phi_{-t}(x)$ . Portanto

$$[0, t] \subset J(\Phi_{-t}(x)), \quad t \in J(\Phi_{-t}(x)) \quad \text{e (por (b))} \quad \Phi_t(\Phi_{-t}(x)) = \Phi_0(x) = x.$$

Isto mostra que

$$\text{Imagem}(\Phi_{-t}) \subset D_t \quad \text{e} \quad \Phi_t \circ \Phi_{-t} = \text{id} \quad [\text{a identidade}].$$

Isto mostra que  $\Phi_t$  e  $\Phi_{-t}$  são homeomorfismos inversos um do outro♣

**Lema (As órbitas são disjuntas).** *Mantenhamos as notações acima. Dados  $p \in \Omega$  e  $q \in \Omega$ , temos*

$$p \in \gamma_q^* \iff \gamma_p^* = \gamma_q^*.$$

**Prova.**

( $\Leftarrow$ ) Trivial.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $p \in \gamma_q^*$ . Então existe  $\tau \in J(q)$  tal que

$$p = \Phi_\tau(q) = \gamma_q(\tau).$$

Então, pelo lema *propriedade de grupo* segue

$$\begin{cases} J(p) = J(q) - \tau \\ \text{e} \\ \gamma_p(t) = \gamma_q(t + \tau), \text{ para todo } t \in J(p). \end{cases}$$

Isto mostra  $\gamma_p^* = \gamma_q^*$  ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Lema [Subgrupos de  $(\mathbb{R}, +)$ ].** *Todo subgrupo não trivial de  $(\mathbb{R}, +)$  é da forma*

$$\tau\mathbb{Z}, \text{ para algum } \tau > 0, \text{ ou é denso em } \mathbb{R}.$$

**Prova.**

Seja  $G$  um subgrupo não trivial de  $(\mathbb{R}, +)$ . Donde  $G \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$ . Seja

$$\tau = \inf [G \cap (0, +\infty)].$$

- ◊ O caso  $\tau = 0$ . Então  $G$  é denso em  $\mathbb{R}$ . De fato, para quaisquer  $x \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $g \in G$  tal que

$$0 < g < \epsilon$$

e  $g\mathbb{Z}$  decompõe  $\mathbb{R}$  em intervalos de comprimento menor que  $\epsilon$ .

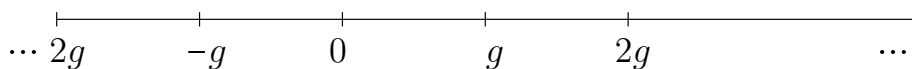


Figura 1: O conjunto  $g\mathbb{Z} = \{\dots, -2g, -g, 0, g, 2g \dots\}$ .

Segue

$$g\mathbb{Z} \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \emptyset \text{ com } g\mathbb{Z} \subset G.$$

- ◊ O caso  $\tau > 0$ . Então, existe uma sequência  $(g_n) \subset G$  e convergente a  $\tau$ . Podemos assumir  $\tau \leq g_n < 2\tau$  para todo  $n$ . Dados  $n$  e  $m$  arbitrários temos que  $\pm(g_n - g_m) \in G$  e portanto  $|g_n - g_m| \in G$ , com  $0 \leq |g_n - g_m| < \tau$ . Pela definição de  $\tau$  segue  $|g_n - g_m| = 0$  e  $g_n = g_m$ . Concluimos que

$$\tau \in G \text{ e } \tau\mathbb{Z} \subset G.$$

Segue também, para um arbitrário  $n$  inteiro,

$$G \cap (n\tau, n\tau + \tau) = \emptyset.$$

Logo, para finalizar,

$$G \subset \tau\mathbb{Z} \spadesuit$$

**Teorema (Classificação das trajetórias).** *Mantenhamos as notações acima.*

*Dado  $x \in \Omega$ , vale uma e somente uma das alternativas abaixo.*

(a)  $\gamma_x$  é injetora.

(b)  $J(x) = \mathbb{R}$  e  $\gamma_x$  é constante.

(c)  $J(x) = \mathbb{R}$  e  $\gamma_x$  é periódica [isto é, existe  $T > 0$  tal que temos

$$\gamma_x(t + T) = \gamma_x(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}],$$

*com a curva  $\gamma_x$  injetora em todo intervalo de comprimento menor que  $T$  [isto é, temos  $\gamma_x(t_1) \neq \gamma_x(t_2)$  se  $t_1 \neq t_2$  e  $|t_1 - t_2| < T$ ].*

**Prova.** Dividamos a prova em duas observações,

(1) Suponhamos que  $\gamma_x$  não é injetora. Então, existem  $t_1$  e  $t_2$  distintos no intervalo maximal  $J(x)$ , com  $\gamma_x(t_1) = \gamma_x(t_2)$ . Sejam  $\tau = t_2 - t_1 \neq 0$  e

$$\begin{aligned} \Gamma : J(x) - \tau &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma_x(t + \tau). \end{aligned}$$

Então,  $\Gamma$  é curva integral de  $F$  e

$$\Gamma(t_1) = \gamma_x(t_1 + t_2 - t_1) = \gamma_x(t_2) = \gamma_x(t_1).$$

Portanto, pela maximalidade de  $\gamma_x$  temos

$$J(x) - \tau \subset J(x) \text{ e } \Gamma \text{ é restrição de } \gamma_x.$$

Analogamente, considerando  $-\tau = t_1 - t_2$  vemos que  $J(x) + \tau \subset J(x)$ .

Segue  $J(x) = \mathbb{R}$  (cheque). Assim temos  $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Também temos  $\gamma_x = \Gamma$  em todo ponto da reta. Segue

$$\gamma_x(t) = \gamma_x(t + \tau), \text{ para todo } t.$$



Oswaldo Rio Branco de Oliveira

(2) Consideremos a “coleção de períodos”

$$P = \{p \in \mathbb{R} \text{ tal que vale } \gamma_x(t) = \gamma_x(t+p) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

*Afirmção.* O conjunto  $P$  é um subgrupo fechado do grupo aditivo  $(\mathbb{R}, +)$ .  
Notemos que por (1), a negação de (a) implica que  $P$  é não trivial.

*Prova da afirmação.* É trivial ver que  $P$  é um subgrupo do grupo aditivo  $(\mathbb{R}, +)$ . Mostremos que  $P$  é fechado.

Seja uma sequência  $(p_n) \subset P$  tal que  $p_n \rightarrow \rho \in \mathbb{R}$ . Portanto vale a igualdade  $\gamma_x(t + p_n) = \gamma_x(t)$  para quaisquer  $n$  e  $t$ . Impondo  $n \rightarrow +\infty$  nesta igualdade encontramos  $\gamma_x(t + \rho) = \gamma_x(t)$  para todo real  $t$ . Portanto,  $\rho \in P$ .

A prova da afirmação está completa.

Retornemos à prova do teorema. Pelo lema subgrupos de  $(\mathbb{R}, +)$  temos que  $P$  é denso em  $\mathbb{R}$  ou da forma  $\tau\mathbb{Z}$  para algum  $\tau > 0$ . Vejamos os dois casos.

O caso  $P$  denso em  $\mathbb{R}$ . Então temos  $P = \mathbb{R}$ , pois  $P$  é fechado. Donde seguem  $J(x) = \mathbb{R}$  e  $\gamma_x$  é constante. Isto é, ocorre a alternativa (b) no enunciado.

O caso  $P = \tau\mathbb{Z}$  com  $\tau > 0$ . Então temos

$$\begin{cases} J(x) = \mathbb{R} & \text{e} \\ \gamma_x(t + \tau) = \gamma_x(t) & \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Temos também

$$\gamma_x(t_1) \neq \gamma_x(t_2) \text{ se } t_1 \neq t_2 \text{ e } |t_1 - t_2| < \tau,$$

caso contrário encontramos  $t_1 \neq t_2$ , com  $0 < \tau' = t_1 - t_2 < \tau$  e  $\tau' \in P$ . Então, pela prova dada em (1) obtemos  $\gamma_x(t) = \gamma_x(t + \tau')$  para todo  $t$ . Donde segue  $\tau' \in P = \tau\mathbb{Z}$ , com  $0 < \tau' < \tau$ , o que é impossível.

Assim, no caso  $P = \tau\mathbb{Z}$  com  $\tau > 0$ , ocorre a alternativa (c).

A prova do teorema está completa♣

**Definição.** Um ponto  $x \in \Omega$  é singular se  $F(x) = 0$  e é regular se  $F(x) \neq 0$ .

**Corolário.** Mantenhamos as notações no teorema. Seja  $\Gamma$  uma órbita de  $F$ . Então, ocorre uma e só uma das três alternativas.

- (a)  $\Gamma$  é imagem biunívoca de um intervalo.
- (b)  $\Gamma$  é um ponto.
- (c)  $\Gamma$  é homeomorfo a um círculo.

**Prova.**

Seja  $\Gamma = \gamma_x^* = \text{Imagem}(\gamma_x)$ . O teorema *classificação das trajetórias* nos garante três possibilidades mutuamente excludentes.

- ◇ Se  $\gamma_x$  é injetora, então  $\gamma_x^*$  é imagem injetora de  $J(x)$ , mostrando (a).
- ◇ Se  $\gamma_x$  é constante, então  $\gamma_x^*$  é um ponto.
- ◇ Se  $\gamma_x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $\gamma_x(0) = \gamma_x(T)$ , verificamos que existe

$$\phi : S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

contínua e injetora completando o diagrama comutativo (com tal diagrama expressamos a  $T$ -periodicidade da curva  $\gamma_x$ )

$$\begin{array}{ccc} [0, T] & \xrightarrow{\gamma_x} & \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ S^1 & & \end{array}$$

onde  $\pi : [0, T] \longrightarrow S^1$  é dada por  $\pi(t) = e^{\frac{2\pi it}{T}}$ .

*Definição de  $\phi$  e verificação das suas propriedades.*

(1) Seja  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(z) = \gamma_x(t)$ , se  $\pi(t) = z$ .

No caso  $z \neq 1$ , existe um único instante  $t \in [0, T]$  satisfazendo  $\pi(t) = z$ . Isto mostra que  $\phi(z) = \gamma_x(t)$  está bem definido se  $z \neq 1$ .

No caso  $z = 1$ , temos  $\pi(0) = \pi(T) = 1$  e, por hipótese,  $\gamma_x(0) = \gamma_x(T)$ . Isto mostra que  $\phi(1)$  está bem definido.

- (2) A injetividade de  $\phi$ . Sejam  $z_1 \in S^1$  e  $z_2 \in S^1$  tais que  $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ . Pela definição de  $\phi$ , existem instantes  $t_1 \in [0, T]$  e  $t_2 \in [0, T]$  tais que  $z_1 = \pi(t_1)$ ,  $z_2 = \pi(t_2)$  e, ainda mais,  $\gamma_x(t_1) = \gamma_x(t_2)$ . Pelo Teorema Classificação das Trajetórias temos que  $\gamma_x$  é uma curva  $T$ -periódica, o que quer dizer de período mínimo  $T$ . Portanto temos  $\{t_1, t_2\} \subset \{0, T\}$ . Donde  $\pi(t_1) = \pi(t_2)$ , pois  $\pi(0) = \pi(T)$ , e conseqüentemente  $z_1 = z_2$ .
- (3) A continuidade de  $\phi$  no ponto  $z$ , se  $z \neq 1$ . É evidente que a restrição

$$\pi \Big|_{(0, T)} : (0, T) \rightarrow \{z \in S^1 : z \neq 1\}$$

é bijetora e bicontínua. Conseqüentemente,  $\phi$  é contínua em todo ponto  $z \in S^1$  tal que  $z \neq 1$ .

- (4) A continuidade de  $\phi$  no ponto  $z = 1$ . Consideremos uma seqüência  $(z_n)$  contida na circunferência  $S^1$  e tal que  $z_n \rightarrow 1$ . Podemos supor sem perda de generalidade  $z_n \neq 1$  para todo  $n$ .

Existe um único  $t_n \in (0, T)$  tal que  $\pi(t_n) = z_n$ . Claramente  $\pi(t_n) \rightarrow 1$ . Pelo já provado em (3) concluímos que a seqüência  $(t_n) \subset (0, T)$  não admite subsequência convergente em  $(0, T)$ . Logo, toda subsequência convergente de  $(t_n)$  converge a  $t = 0$  ou a  $t = T$ .

Consideremos uma subsequência de  $t_n$  que convirja a  $t = 0$ . Indiquemo-la por  $(\alpha_n)$ . Logo,

$$\phi(\pi(\alpha_n)) = \gamma_x(\alpha_n) \rightarrow \gamma_x(0).$$

Consideremos uma subsequência de  $t_n$  que convirja a  $t = T$ . Indiquemo-la por  $(\beta_n)$ . Logo,

$$\phi(\pi(\beta_n)) = \gamma_x(\beta_n) \rightarrow \gamma_x(T).$$

Como  $\gamma_x(0) = \gamma_x(T)$ , concluímos que toda subsequência convergente de  $\phi(z_n) = \phi(\pi(t_n))$  converge a um mesmo vetor  $\gamma_x(0) = \gamma_x(T)$ . Isto mostra que a seqüência  $(\phi(z_n))$  converge a  $\gamma_x(0) = \gamma_x(T) = \phi(1) \spadesuit$

Assim, dado um campo vetorial  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo e localmente de Lipschitz, o domínio  $\Omega$  se decompõe numa reunião disjunta de órbitas de  $F$  que são do tipo descrito no corolário acima.

### 5.3 - RETRATO DE FASE (E ORIENTAÇÃO)

**Definição.** O retrato de fase de  $F$  é a referida decomposição de  $\Omega$ , munindo-se cada órbita da orientação induzida por  $F$ .

**Comentário.** Desenhar o retrato de fase é útil para se ter idéia do comportamento qualitativo das soluções. Ao desenhar o retrato de fase, as orientações das trajetórias são indicadas por meio de flechas no sentido de percurso.

**Exemplo 1.** Retrato de fase de um campo  $X$  unidimensional (em  $\mathbb{R}$ ) e com um número finito de singularidades  $a_1 < \dots < a_n$ .

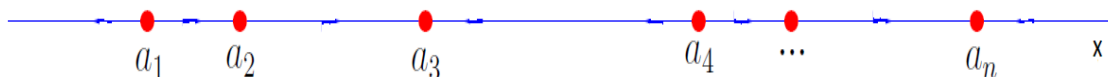


Figura 2: Singularidades (quantidade finita) de um campo unidimensional.

Definamos  $a_0 = -\infty$  e  $a_{n+1} = +\infty$ . Portanto  $X$  tem sinal constante em cada sub-intervalo  $(a_j, a_{j+1})$ .

Analisemos o caso  $X > 0$  em  $(a_j, a_{j+1})$ , com  $j$  fixado em  $\{1, \dots, n\}$ . Consideremos um ponto  $x \in (a_j, a_{j+1})$  e a solução maximal

$$\gamma(t) = \gamma_x(t) = \Phi(t, x).$$

Sejam  $J(x) = (\omega_-, \omega_+)$  o intervalo maximal de  $\gamma$  e

$$\gamma^* = \text{Imagem}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in J(x)\}.$$

Seguem as quatro propriedades abaixo.

- (1) Vale a inclusão  $\gamma^* \subset (a_j, a_{j+1})$ . De fato, se existir  $\tau \in (\omega_-, \omega_+)$  satisfazendo  $\gamma(\tau) = a_j$  então o TEU (teorema de existência e unicidade para edo's) nos garante  $\gamma(t) = a_j$  para todo instante  $t$ , contra a hipótese  $\gamma(0) = x$ . Analogamente, temos  $\gamma(t) \neq a_{j+1}$  para todo  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ .
- (2) A solução  $\gamma$  é estritamente crescente no intervalo maximal  $J(x) = (\omega_-, \omega_+)$ . Esta propriedade segue trivialmente de (1).

(3) Temos

$$\lim_{t \rightarrow \omega_-} \gamma(t) = a_j, \quad \lim_{t \rightarrow \omega_+} \gamma(t) = a_{j+1} \quad \text{e} \quad \gamma^* = (a_j, a_{j+1}).$$

De fato, por (2) tais limites existem e pertencem a  $[a_j, a_{j+1}]$ . Se ocorre

$$\lim_{t \searrow \omega_-} \gamma(t) = a > a_j$$

então as órbitas de  $\gamma$  e de  $\gamma_a(t)$  se intersectam. Donde segue  $\gamma = \gamma_a$ , o que é uma contradição. Isto mostra  $\gamma(t) \searrow a_j$  se  $t \searrow \omega_-$ .

Analogamente encontramos

$$\lim_{t \nearrow \omega_+} \gamma(t) = a_{j+1}.$$

(4) Se  $j \geq 1$  então  $\omega_-(x) = -\infty$ . Isto é consequência dos seguintes fatos

$$\left\{ \begin{array}{l} (t, \gamma(t)) \rightarrow \partial\mathbb{R}^2 \quad \text{se } t \searrow \omega_- \\ \text{e} \\ \gamma(t) \searrow a_j \in \mathbb{R} \quad \text{se } t \searrow \omega_- \end{array} \right.$$

[Ressaltemos que a simbologia “ $(t, \gamma(t)) \rightarrow \partial\mathbb{R}^2$  se  $t \searrow \omega_-$ ” ou mesmo a linguagem “tender à fronteira do plano se  $t \rightarrow \omega_-$ ” significam ambas que dado um arbitrário compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  então existe uma vizinhança  $V$  de  $\omega_-$  tal que temos  $(t, \gamma(t)) \notin K$  para todo  $t \in V$ . Brevemente, dizemos que o gráfico da curva  $\gamma$  “escapa” de qualquer compacto, se  $t \rightarrow \omega_-$ .]

Analogamente, se  $j \leq n - 1$  então  $\omega_+ = +\infty$  ♣

Segue uma ilustração relativa a um campo unidimensional com seis singularidades, indicando alguns possibilidades para o sentido de percurso entre duas singularidades  $a_j$  e  $a_{j+1}$ .



Figura 3: Possibilidades ao sentido de percurso entre duas singularidades.

**Curvas planares orientadas.** Fixemos, no plano, a base canônica ordenada e positivamente orientada  $\{e_1, e_2\}$ . Fixemos uma curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$ .

- Os vetores  $T = \gamma'/|\gamma'|$  e  $N = T'/|T'|$  são o **tangente unitário** e o **normal** a  $\gamma$ .
- A curva  $\gamma$  é dita **positivamente orientada**, ou orientada no **sentido anti-horário**, ou **dextrógira**, se  $\{T, N\}$  é uma base ordenada (ortonormal) positivamente orientada ou, equivalentemente (**cheque**), se  $\{\gamma', \gamma''\}$  é uma base ordenada (não necessariamente ortonormal) positivamente orientada.
- A curva  $\gamma$  é **negativamente orientada**, ou orientada no **sentido horário**, ou **sinistrógira**, se  $\{T, N\}$  é uma base ordenada (ortonormal) negativamente orientada ou, equivalentemente (**cheque**), se  $\{\gamma', \gamma''\}$  é uma base ordenada (não necessariamente ortonormal) negativamente orientada.

**Exemplo 2 (semelhança de matrizes X orientação).** Consideremos os campos lineares  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectivamente determinados pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Note-se que  $B = A^T$ , a matriz transposta de  $A$ .]

Sejam os sistemas lineares homogêneos respectivamente associados

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Sabemos que (e é trivial por inspeção direta)

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

A semelhança entre as matrizes  $A$  e  $B$  segue de [abaixo, a matriz  $P$  em  $PAP^{-1} = B$  representa uma reflexão em relação ao eixo  $Ox$  e a identidade  $P^{-1} = P$  é válida]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Portanto,  $A$  e  $B$  tem mesmo polinômio característico

$$p_A(z) = p_B(z) = z^2 + 1.$$

Seja  $\gamma = xe_1 + ye_2$  uma curva-solução de  $\gamma' = A\gamma$ . Segue

$$\det(\gamma', \gamma'') = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y & -x \\ x & -y \end{vmatrix} = y^2 + x^2 > 0.$$

Seja  $\varphi = xe_1 + ye_2$  uma curva-solução de  $\varphi' = B\varphi$ . Segue

$$\det(\varphi', \varphi'') = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -x \\ -x & -y \end{vmatrix} = -y^2 - x^2 < 0.$$

Logo,  $\gamma$  tem sentido anti-horário e  $\varphi$  tem sentido horário. Vide figura abaixo.

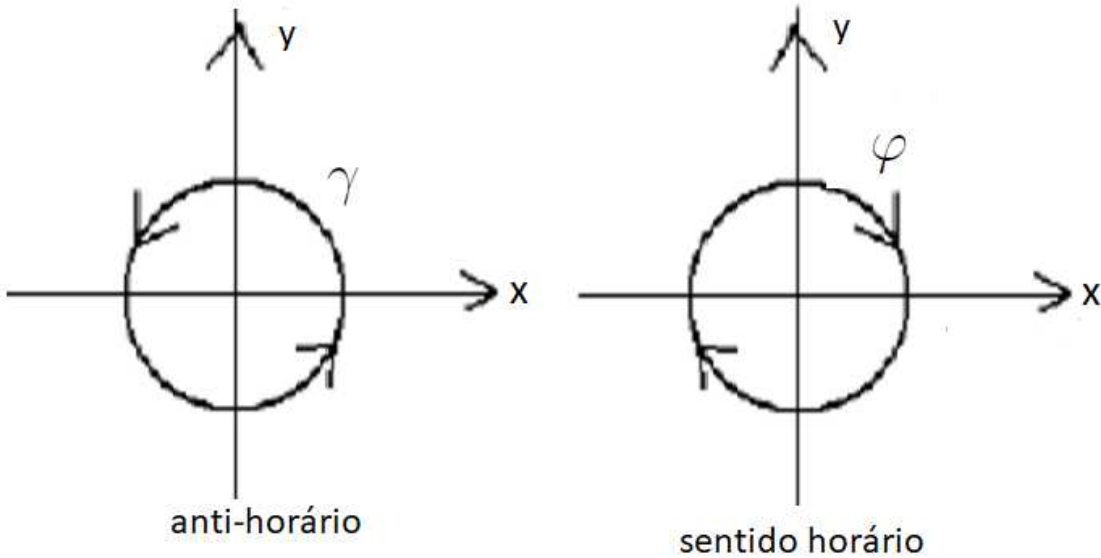


Figura 4: Orientação de  $\gamma$ , com  $\gamma' = A\gamma$ , e a orientação de  $\varphi$  onde  $\varphi' = B\varphi$ .

Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  as curvas (soluções) respectivamente determinadas pela primeira e pela segunda colunas de  $e^{tA}$ . Notemos que

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \gamma_1\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Analogamente, se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são as curvas (soluções) respectivamente determinadas pela primeira e pela segunda colunas de  $e^{tB}$ , então encontramos

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = -\varphi_1\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

**Proposição (Orientação).** Consideremos, no plano, o sistema linear com coeficientes reais e constantes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{com } ad - bc \neq 0.$$

(Logo, o único ponto singular é a origem). Suponhamos que as raízes do polinômio característico da matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  acima são complexas não reais. Isto é,

$$p_A(z) = z^2 - \text{tr}(A)z + \det(A) = (z - \lambda)(z - \bar{\lambda}) = z^2 - 2\alpha z + |\lambda|^2,$$

com  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\beta \neq 0$ . Então, valem as seguintes propriedades.

- (1)  $bc < 0$ .
- (2) As órbitas são elipses centradas na origem (se  $2\alpha = a + d = 0$ ) ou espirais em torno da origem (se  $\alpha \neq 0$ ). As órbitas tem uma mesma orientação (isto é, todas tem o sentido anti-horário ou todas tem o sentido horário).
- (3) Se  $c > 0$ , as trajetórias (órbitas) são positivamente orientadas. Se  $c < 0$ , as trajetórias são negativamente orientadas.

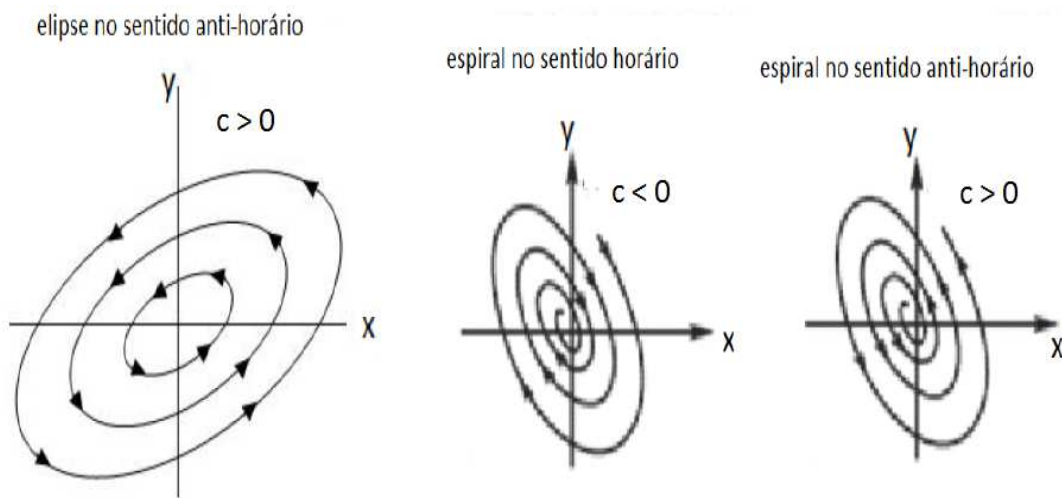


Figura 5: Elipse positivamente orientada [ $\alpha = \text{tr}(A) = 0$  e  $c > 0$ ] – Espiral negativamente orientada ( $c < 0$ ) – Espiral positivamente orientada ( $c > 0$ ).



**Prova.**

(1) Temos  $\det A = |\lambda|^2$  e  $\operatorname{tr}(A) = a + d = 2\alpha$ . Donde segue

$$ad - bc = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \beta^2.$$

Logo (cheque),

$$-bc = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \beta^2 > 0.$$

(2) Identificação das órbitas. Sejam  $w = u + iv$  e  $\bar{w} = u - iv$  autovetores associados a  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  respectivamente, com  $u$  e  $v$  vetores reais. Fixemos a base ordenada  $\{v, u\}$ , de orientação desconhecida. Temos

$$Au + iAv = (\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v).$$

A matriz de representação do operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $TX = AX$  para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ , em relação à base ordenada  $\{v, u\}$  é dada por

$$[T]_{\{v,u\}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

[A matriz de  $T$  em relação à base ordenada  $\{u, v\}$  é a transposta de  $[T]_{\{v,u\}}$ .]

Donde segue (já vimos)

$$[e^{tT}]_{\{v,u\}} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução geral da edo  $\gamma' = A\gamma$  é [onde denotamos por  $v = v(t)$  e  $u = u(t)$  as coordenadas com respeito à base ordenada  $\{v, u\}$ ] dada por

$$\begin{cases} v(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t) \\ u(t) = e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t), \end{cases} \quad \text{com } c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Identificando  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$  (como espaços vetoriais reais), escrevamos

$$(c_1, c_2) = re^{i\theta} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v(t) = re^{\alpha t} \cos(\theta + \beta t) \\ u(t) = re^{\alpha t} \sin(\theta + \beta t). \end{cases}$$

Isto é,  $\gamma(t) = v(t) + iu(t) = re^{\alpha t} e^{i(\theta + \beta t)}$ .

Logo, as trajetórias são circunferências ( $\alpha = 0$ ) ou espirais [ $\gamma = e^{\alpha t} C(t)$  com  $C(t)$  uma circunferência e  $\alpha \neq 0$ ] na base  $\{v, u\}$ .

Mudando para a base  $\{e_1, e_2\}$ , vemos que as trajetórias são elipses ( $\alpha = 0$ ) ou espirais [ $\gamma = e^{\alpha t} E(t)$  com  $E(t)$  uma elipse e  $\alpha \neq 0$ ] no usual sistema  $Oxy$ .

Orientação das orbitas. Escrevamos  $\gamma = re^{(\alpha+i\beta)t}e^{i\theta}$ . Segue

$$\gamma' = (\alpha + i\beta)\gamma \equiv (v', u') \quad \text{e} \quad \gamma'' = (\alpha + i\beta)^2\gamma \equiv (v'', u'').$$

Sejam  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  ambos em  $\mathbb{R}^2$  e “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” o produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

Vale a fórmula (cheque)

$$(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle + i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

[Vide <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Determinante2x2.pdf> .]

Seja  $\text{Im}(z)$  a parte imaginária de um número complexo  $z$ . Temos então

$$\begin{aligned} \det(\gamma', \gamma'') &= \begin{vmatrix} v' & v'' \\ u' & u'' \end{vmatrix} \\ &= \text{Im}(\overline{\gamma'}, \gamma'') \\ &= \text{Im} \left[ \overline{(\alpha + i\beta)\gamma} (\alpha + i\beta)^2\gamma \right] \\ &= |\alpha + i\beta|^2 |\gamma|^2 \beta. \end{aligned}$$

Donde todas as trajetórias (em relação a  $\{v, u\}$ ) tem uma mesma orientação.

Logo, todas as trajetórias dadas em relação à base canônica também tem uma mesma orientação (que pode diferir da orientação no parágrafo acima).

[De fato, dada uma matriz real e inversível  $P$  (i.e., uma matriz mudança de base no plano  $\mathbb{R}^2$ ), a relação entre as orientações da curva  $\gamma$  e da curva  $P\gamma$  é dada por (cheque)

$$\det((P\gamma)', (P\gamma)'') = \det(P) \det(\gamma', \gamma'').]$$

(3) Determinemos  $e^{tA}$ . Graças à fórmula explícita para  $e^{tA}$  encontramos

$$\frac{e^{tz}}{(z - \lambda)(z - \bar{\lambda})} = q(z) + \frac{c_1}{z - \lambda} + \frac{c_2}{z - \bar{\lambda}}, \quad \text{com } c_1 = \frac{e^{\lambda t}}{2i\beta} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{e^{\bar{\lambda}t}}{-2i\beta}.$$

Donde segue  $e^{tz} = q(z)p_A(z) + c_1(z - \bar{\lambda}) + c_2(z - \lambda)$  e portanto

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{-ie^{\lambda t}}{2\beta}(A - \bar{\lambda}I) + \frac{ie^{i\bar{\lambda}t}}{2\beta}(A - \lambda I) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \text{Re} \left\{ -i(\cos \beta t + i \sin \beta t)(A - \bar{\lambda}I) \right\}. \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \operatorname{Re} \left\{ (\sin \beta t - i \cos \beta t) \left[ \begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \left[ \sin \beta t \begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} + \cos \beta t \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Donde segue

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \frac{(a-\alpha)\sin \beta t}{\beta} + \cos \beta t & \frac{b\sin \beta t}{\beta} \\ \frac{c\sin \beta t}{\beta} & \frac{(d-\alpha)\sin \beta t}{\beta} + \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Para determinar a orientação das trajetórias, é suficiente (**cheque**) nos termos na primeira e na segunda colunas de  $e^{tA}$ . De fato, basta uma coluna pois todas as trajetórias tem uma mesma orientação. Analisemos a primeira coluna de  $e^{tA}$  (tal coluna depende do coeficiente  $c$ ). Seja  $\Gamma_1$  a curva correspondente. A orientação de  $\Gamma_1$  não muda ao longo da curva, pois o sinal de  $\det(\Gamma'_1, \Gamma''_1)$  é invariável (ou  $> 0$  para todo  $t$ , ou  $< 0$  para todo  $t$ ).

Assim, a orientação de  $\Gamma_1$  é revelada já no instante  $t = 0$ .

Escrevamos  $\Gamma_1 = e^{\alpha t} \gamma_1(t)$ . Temos

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left( \frac{(a-\alpha)\sin \beta t}{\beta} + \cos \beta t, \frac{c\sin \beta t}{\beta} \right) \\ \gamma'_1 = \left( (a-\alpha)\cos \beta t - \beta \sin \beta t, c \cos \beta t \right) \\ \gamma''_1 = \left( -(a-\alpha)\beta \sin \beta t - \beta^2 \cos \beta t, -c\beta \sin \beta t \right) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \gamma_1(0) = (1, 0) \\ \gamma'_1(0) = (a-\alpha, c) \\ \gamma''_1(0) = (-\beta^2, 0). \end{cases}$$

Temos também

$$\begin{cases} \Gamma_1 = e^{\alpha t} \gamma_1 \\ \Gamma'_1 = \alpha e^{\alpha t} \gamma_1 + e^{\alpha t} \gamma'_1 \\ \Gamma''_1 = \alpha^2 e^{\alpha t} \gamma_1 + 2\alpha e^{\alpha t} \gamma'_1 + e^{\alpha t} \gamma''_1. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Gamma'_1(0) = \alpha(1, 0) + (a-\alpha, c) \\ \Gamma''_1(0) = (\alpha^2 + 2\alpha(a-\alpha) - \beta^2, 2\alpha c). \end{cases}$$

Donde

$$\begin{aligned} \det(\Gamma'_1(0), \Gamma''_1(0)) &= \begin{vmatrix} a & 2\alpha a - \alpha^2 - \beta^2 \\ c & 2\alpha c \end{vmatrix} = 2\alpha a c - 2\alpha a c + \alpha^2 + c\beta^2 \\ &= c(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

Portanto, o sentido de  $\Gamma_1$  é anti-horário se  $c > 0$  e horário se  $c < 0$ .

Ainda que não necessária, a análise com a curva determinada pela segunda coluna de  $e^{tA}$  (tal coluna depende do coeficiente  $b$ ) é análoga (**cheque**).

A prova está completa♣

**Comentários à prova acima.** Em boa parte dos livros textos não consta a análise da orientação das trajetórias elípticas e espirais como uma função dos coeficientes da matriz  $A$ . Sendo assim, vale a pena aproveitar a oportunidade para nos familiarizarmos um pouco mais com esta parte ligeiramente delicada da teoria.

Vejamos então outras formas de identificar a orientação das trajetórias do sistema linear

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{com } ad - bc \neq 0$$

e polinômio característico com raízes complexas  $\alpha \pm i\beta$ .

Apresentemos duas outras argumentações. Em cada uma destas argumentações analisamos as duas colunas de  $e^{tA}$  (ainda que baste analisar apenas uma coluna pois, como já vimos, todas as trajetórias tem a mesma orientação).

Sejam, respectivamente,

$$\Gamma_1 = e^{\alpha t} \gamma_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = e^{\alpha t} \gamma_2$$

as curvas correspondentes à primeira coluna e à segunda coluna da matriz

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \frac{(a-\alpha)\sin\beta t}{\beta} + \cos\beta t & \frac{b\sin\beta t}{\beta} \\ \frac{c\sin\beta t}{\beta} & \frac{(d-\alpha)\sin\beta t}{\beta} + \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Já sabemos que  $bc < 0$ .

**Primeira argumentação.** A primeira coluna. Em  $t = 0$  temos

$$\Gamma_1(0) = (1, 0), \quad \text{um ponto no eixo } Ox.$$

A segunda coordenada  $y = y(t)$  da curva  $\Gamma_1$  satisfaz

$$\left( \frac{e^{\alpha t} c \sin \beta t}{\beta} \right)' \Big|_{t=0} = \frac{\alpha e^{\alpha t} c \sin \beta t + e^{\alpha t} c \beta \cos \beta t}{\beta} \Big|_{t=0} = c.$$

Logo, se  $c > 0$  então a segunda coordenada  $y = y(t)$  de  $\Gamma_1$  é estritamente positiva para  $t > 0$  e  $t \approx 0$ . Donde  $\Gamma_1$  tem sentido anti-horário.

Portanto, se  $b < 0$ , temos  $c > 0$  e trajetórias no sentido anti-horário.

Se  $b > 0$ , seguem  $c < 0$  e a segunda coordenada  $y = y(t)$  de  $\Gamma_1$  estritamente negativa para  $t > 0$  e  $t \approx 0$ . Neste caso,  $\Gamma_1$  tem sentido horário.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segunda coluna de  $e^{tA}$ . No instante  $t = 0$  temos

$$\Gamma_2(0) = (0, 1), \quad \text{um ponto no eixo } Oy.$$

A primeira coordenada  $x = x(t)$  da curva  $\Gamma_2(t) = e^{\alpha t}\gamma_2$  satisfaz

$$\left( \frac{e^{\alpha t} b \sin \beta t}{\beta} \right)' \Big|_{t=0} = b.$$

Se  $b > 0$ , então a primeira coordenada  $x = x(t)$  de  $\Gamma_2$  é estritamente positiva para  $t > 0$  e  $t \approx 0$ . Neste caso,  $\Gamma_2$  tem sentido horário.

Se  $b < 0$ , então a coordenada  $x = x(t)$  de  $\Gamma_2$  é estritamente negativa para  $t > 0$  e  $t \approx 0$ . Neste caso,  $\Gamma_2$  tem sentido anti-horário.

A primeira argumentação está completa.

**Segunda argumentação.** Utilizemos os itens (1) e (2) da proposição acima.

Graças ao item (2), as curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  descrevem elipses. Portanto,  $\Gamma_1 = e^{\alpha t}\gamma_1$  e  $\gamma_1$  tem mesma orientação. Analogamente para  $\Gamma_2 = e^{\alpha t}\gamma_2$  e  $\gamma_2$ .

**Orientação de  $\gamma_1$ .** Temos

$$\begin{aligned} \det(\gamma'_1, \gamma''_1) &= \begin{vmatrix} (a - \alpha) \cos \beta t - \beta \sin \beta t & -(a - \alpha) \beta \sin \beta t - \beta^2 \cos \beta t \\ c \cos \beta t & -c\beta \sin \beta t \end{vmatrix} \\ &= c\beta^2 \sin^2 \beta t + c\beta^2 \cos^2 \beta t \\ &= c\beta^2. \end{aligned}$$

Logo, se  $b < 0$ , por (1) segue  $c > 0$  e então  $\{\gamma'_1, \gamma''_1\}$  é positivamente orientada. Inversamente, se  $b > 0$ , temos  $c < 0$  e  $\{\gamma'_1, \gamma''_1\}$  negativamente orientada.

**Orientação de  $\gamma_2$ .** Neste caso, encontramos

$$\begin{aligned} \det(\gamma'_2, \gamma''_2) &= \begin{vmatrix} b \cos \beta t & -b\beta \sin \beta t \\ (d - \alpha) \cos \beta t - \beta \sin \beta t & -(d - \alpha) \beta \sin \beta t - \beta^2 \cos \beta t \end{vmatrix} \\ &= -b\beta^2 \cos^2 \beta t - b\beta^2 \sin^2 \beta t \\ &= -b\beta^2. \end{aligned}$$

Desta forma, se  $b < 0$  então a base  $\{\gamma'_2, \gamma''_2\}$  é positivamente orientada. Inversamente, se  $b > 0$  então  $\{\gamma'_2, \gamma''_2\}$  é negativamente orientada♣

**Exemplo 3. Sistemas lineares homogêneos, no plano.** Seja

$$F = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ com } \det A \neq 0$$

(logo, o único ponto singular é a origem). Analisemos o polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Os autovalores são dados por

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{[\text{tr}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Distinguímos os três seguintes casos abaixo.

- (1) Raízes reais distintas  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  [não nulas, pois  $\det(A) \neq 0$ ].
- (2) Raiz real dupla  $\lambda_1 = \lambda_2$ .
- (3) Raízes complexas  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ , com  $\beta \neq 0$ .

**Verificação.**

- (1) A solução geral de  $\varphi' = A\varphi$ , onde  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^2$ , é

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v},$$

com  $c_1$  e  $c_2$  reais quaisquer e autovetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (linearmente independentes) associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente. Sejam  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$  as coordenadas de um vetor arbitrário em relação à base ordenada  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

Supondo  $c_1 \neq 0$ , eliminamos o parâmetro  $t$  e encontramos

$$\begin{cases} u = c_1 e^{\lambda_1 t} & [\iff t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{u}{c_1}] \\ v = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \iff v = c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln(\frac{u}{c_1})} = c_2 \left(\frac{u}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Isto é, se  $c_1 \neq 0$  então  $\varphi^* = \text{Imagem}(\varphi)$  coincide com o gráfico da função

$$u \mapsto \frac{c_2}{(c_1)^{\lambda_2/\lambda_1}} u^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Tal gráfico pode ser escrito como  $\{(u, au^\lambda) : u \in \mathbb{R}\}$ ,  $a$  uma constante real.

Assim, se  $\lambda > 1$ , temos que o gráfico tangencia o eixo  $u$  (no sistema  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ).

Nas coordenadas  $x, y$  vemos que no caso  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , e no caso  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , a curva-solução  $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}$  tangencia a reta de direção  $\vec{u}$ .

Como ilustração, a imagem da curva  $(e^t, e^{2t}) = e^t \vec{e}_1 + e^{2t} \vec{e}_2$ , onde  $t \in [-\infty, +\infty)$ , é a semi-parábola  $\{(x, x^2) : x \geq 0\}$  que tangencia o eixo  $x$ , de direção  $\vec{e}_1$ .

A seguir, esboçamos os possíveis retratos de fase.

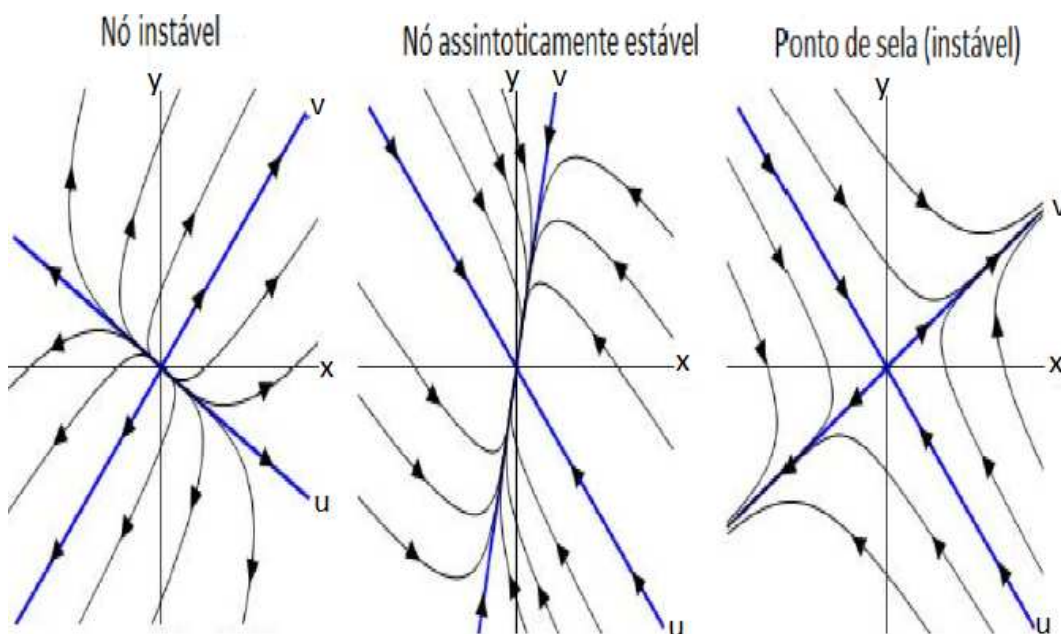


Figura 6: Nó instável (fonte),  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  – Nó assintoticamente estável (poço), com  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  — Ponto de sela, com  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

- (3) Raízes não reais  $\alpha \pm i\beta$  [portanto,  $2\alpha = \text{tr}(A)$  e  $\det A = ad - bc = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ ]. Este caso é consequência direta da *proposição orientação*.

Seguem três possibilidades para o retrato de fase, esboçadas no plano  $Oxy$ .

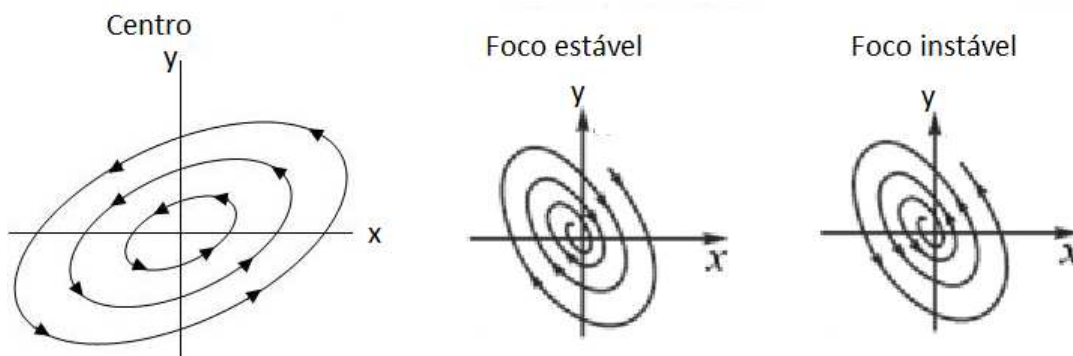


Figura 7: Centro,  $\alpha = 0$  e sentido anti-horário ( $b < 0$ )– Foco estável (poço),  $\alpha < 0$  e sentido horário ( $b > 0$ ) – Foco instável (fonte),  $\alpha > 0$  e sentido anti-horário ( $b > 0$ ).

As três possibilidades faltantes diferem das acima pela orientação. Cheque.

(2) Suponhamos  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ . Seja  $\lambda = \lambda_1$ . Temos duas situações a analisar. O caso em que a multiplicidade geométrica [a dimensão de  $\ker(A - \lambda I)$ ] é 1 e o caso  $\dim[\ker(A - \lambda I)] = 2$ .

(2.1) O caso  $\lambda$  de multiplicidade geométrica 2. Neste caso,  $A$  é diagonalizável. Sejam  $v_1$  e  $v_2$  autovetores LI. A solução geral é

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 = e^{\lambda t} (c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Os possíveis retratos de fase são

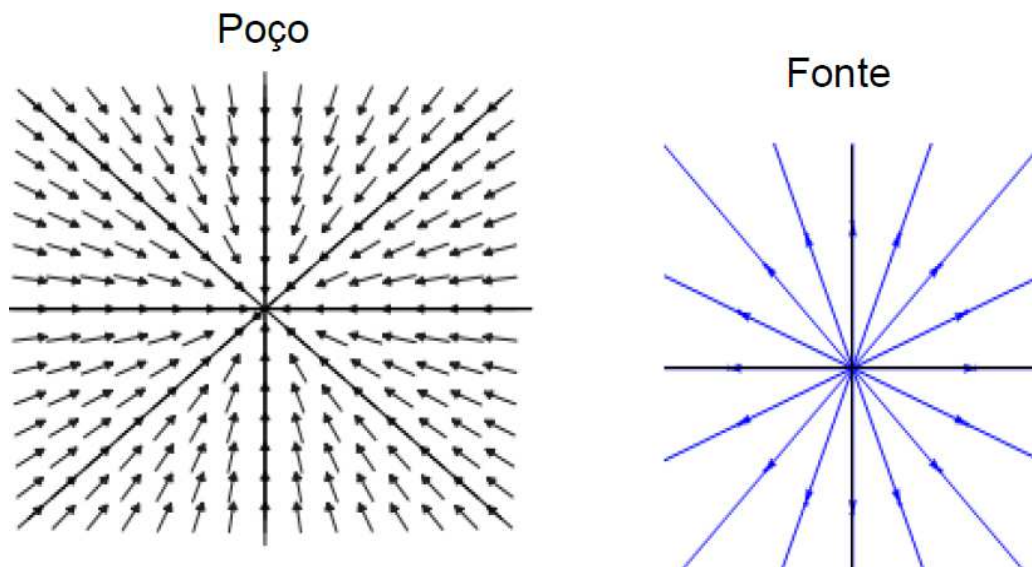


Figura 8: Um poço, se  $\lambda < 0$ . Uma fonte, se  $\lambda > 0$ . Em ambos os casos, existem dois autovetores LI.

(2.2) O caso  $\lambda$  de multiplicidade geométrica 1. Seja  $T$  o operador associado a  $A$ . Consideremos  $u$  um autovetor associado a  $\lambda$  e um vetor não nulo  $v \in \ker(T - \lambda I)^2$  [um autovetor generalizado] tal que o conjunto ordenado  $\{u, v\}$  é LI. Tal vetor  $v$  existe pois  $\dim[\ker(T - \lambda I)^2] = 2$ . Segue  $(T - \lambda I)^2 v = 0$  e  $(T - \lambda I)v \in \ker(T - \lambda I)$ . Logo, existe um  $\alpha \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $(T - \lambda I)v = \alpha u$ , donde segue

$$Tv = \alpha u + \lambda v.$$

Desta forma, o operador  $T$  é representável pela matriz

$$[T]_{\{u,v\}} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$



Então, a matriz do operador  $S$  associado à matriz exponencial  $e^{tA}$  é

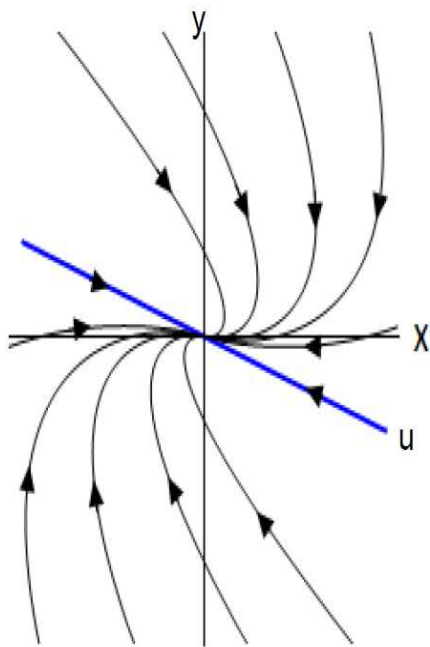
$$\begin{aligned} [e^{tT}]_{\{u,v\}} &= \exp \left\{ \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & \alpha t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução geral, com  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$  as coordenadas de  $\varphi(t)$  em relação à base  $\{u, v\}$ , é

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 \alpha t) e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

As possibilidades para o retrato de fase são esboçadas abaixo.

Nó impróprio assintoticamente estável



Nó impróprio instável

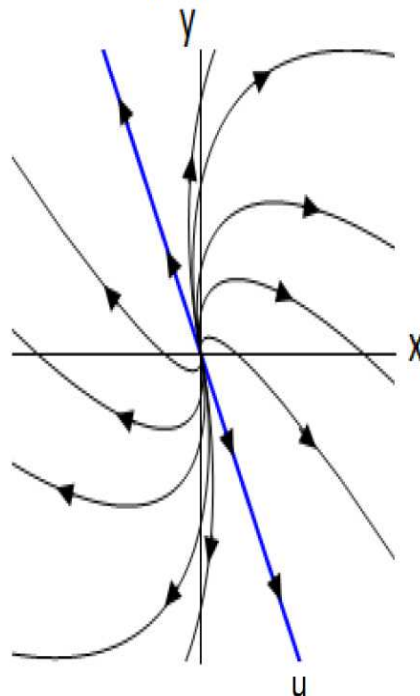


Figura 9: Nó impróprio estável,  $\lambda < 0$ . Nó impróprio instável,  $\lambda > 0$ . Em ambos os casos, a dimensão geométrica do autovalor  $\lambda$  é 1 [i.e.,  $\dim[\ker(A - \lambda I)] = 1$ ].

## 5.4 - FLUXOS CONJUGADOS

**Definições, notações e comentários.** Consideremos dois campos vetoriais

$$X_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad X_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

com  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  abertos em  $\mathbb{R}^n$ , ambos contínuos e localmente de Lipschitz. Consideremos seus respectivos fluxos e respectivas curvas integrais maximais

$$\begin{cases} \Phi_1 : D_1 \longrightarrow \Omega_1 & \text{e} & \Phi_2 : D_2 \longrightarrow \Omega_2 \\ \gamma_{1,x} : J_1(x) \longrightarrow \Omega_1 & \text{e} & \gamma_{2,x} : J_2(x) \longrightarrow \Omega_2. \end{cases}$$

- O campo  $X_1$  é topologicamente conjugado a  $X_2$  se existir um homeomorfismo

$$h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

tal que para todo par  $(t, x) \in D_1$  temos

$$\boxed{h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x))} \quad \text{e em particular, } t \in J_2(h(x)).$$

Verifiquemos a identidade  $\boxed{J_1(x) = J_2(h(x))}$ .

*Verificação.* Por definição segue  $J_1(x) \subset J_2(h(x))$ . Se  $J_1(x) \not\subset J_2(h(x))$ , podemos supor  $\omega_+(1, x) \in J_2(h(x))$ . Então,  $\omega_+(1, x) \in \mathbb{R}$  e existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow \omega_+(1, x)} \Phi_1(t, x) = (h^{-1} \circ \Phi_2)(\omega_+(1, x), h(x)) \in \Omega_1.$$

Portanto (já mostramos) podemos definir  $\gamma_{1,x}$  no instante  $t = \omega_+(1, x)$ !

Resumindo, seguem

$$J_1(x) = J_2(h(x)), \quad h \circ \gamma_{1,x} = \gamma_{2,h(x)} \quad \text{e} \quad h(\gamma_{1,x}^*) = \gamma_{2,h(x)}^*.$$

Ainda, o homeomorfismo  $h$  preserva trajetórias e preserva orientações visto que a curva integral maximal pelo ponto  $x$ , definida e orientada no intervalo  $J_1(x) = (\omega_-(1, x), \omega_+(1, x))$ , é levada na curva integral maximal pelo ponto  $h(x)$ , a qual é definida e orientada no intervalo  $(\omega_-(2, h(x)), \omega_+(2, h(x)))$ .

O homeomorfismo  $h$  é dito uma **conjugação topológica** entre  $X_1$  e  $X_2$ .

- Se  $X_1$  e  $X_2$  forem de classe  $C^k$ , onde  $1 \leq k \leq \infty$ , pelo teorema *diferenciabilidade do fluxo* segue que  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  também o são. Dizemos então que os campos  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^k$  **conjugados** se existir uma conjugação topológica  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  tal que  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

Tal conjugação é uma relação de equivalência entre campos  $C^k$  (cheque).

**Mais comentários.** Seja  $h$  uma conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$ . Vale o que segue.

- $h$  preserva pontos singulares.
- $h$  preserva órbitas periódicas e respectivos períodos.

**Definições.** Consideremos o campo  $X : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e os campos  $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  abertos em  $\mathbb{R}^n$ , os três de classe  $C^k$ . Sejam  $\Phi_1$  o fluxo de  $X_1$  e  $\Phi_2$  o fluxo de  $X_2$ . Sejam  $x$  a variável em  $\Omega_1$  e  $y$  a variável em  $\Omega_2$ . Consideremos  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  diferenciável e  $Dh(x)$  o diferencial de  $h$  no ponto  $x$ .

- Dizemos que  $X_2$  é  $h$ -relacionado a  $X_1$  (pela função diferenciável  $h$ ) se ocorre

$$Dh(x)[X_1(x)] = X_2(h(x)), \text{ para todo } x \in \Omega_1.$$

Escrevemos então

$$X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1 \text{ ou, brevemente, } X_2 \sim X_1.$$

- Suponhamos que  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^{k+1}$ . O push-forward do campo  $X : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h$  é o campo de classe  $C^k$

$$\begin{aligned} h_*(X) : \Omega_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{dado por} \\ h_*(X)(y) &= Dh(x)X(x) \text{ onde } x = h^{-1}(y). \end{aligned}$$

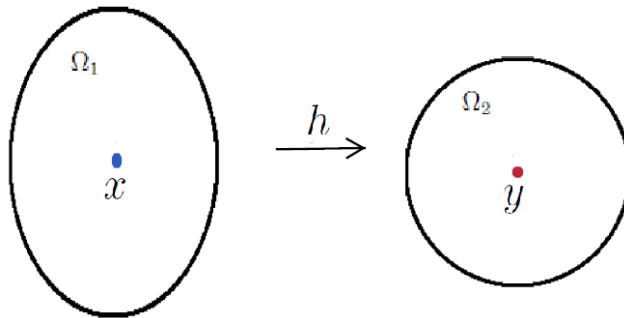


Figura 10: A troca de variável  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ .

- Dizemos que a função diferenciável  $h$  preserva curvas integrais se

$$(t, x) \in D_1 \implies h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x)).$$

[Isto é,  $h$  leva curvas integrais de  $X_1$  em curvas integrais de  $X_2$ .]

**Proposição (Campos relacionados e push-forward).** *Mantenhamos as notações acima. Vale a implicação:*

$$\begin{cases} h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \text{ um difeomorfismo } C^{k+1} \\ X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1 \end{cases} \iff X_2 = h_* X_1.$$

**Prova.** Trivial (cheque) ♣

**Proposição (Campos relacionados e preservação das curvas integrais).** *Mantidas as demais notações acima, seja  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  diferenciável. Então, temos*

$$X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1 \iff h \text{ preserva curvas integrais.}$$

[Logo, se  $X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1$  e  $h$  é homeomorfismo,  $X_1$  é topologicamente conjugado a  $X_2$ .]

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Dado  $x \in \Omega_1$ , seja  $\varphi$  dada por

$$\begin{aligned} J_1(x) & \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto h(\Phi_1(t, x)). \end{aligned}$$

Então,  $\varphi$  é derivável e sua derivada é

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= Dh(\Phi_1(t, x))X_1(\Phi_1(t, x)) \\ &\stackrel{X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1}{=} X_2[h(\Phi_1(t, x))] \\ &= X_2(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\varphi$  é curva integral de  $X_2$ . É claro que  $\varphi(0) = h(x)$ . Segue então  $J_1(x) \subset J_2(h(x))$ . Segue também (cheque)

$$\varphi(t) = \Phi_2(t, h(x)) \text{ para todo } t \in J_1(x).$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  diferenciável satisfazendo

$$h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x)) \text{ para todo par } (t, x) \in J_1(x) \times \Omega_1.$$

Diferenciando e em seguida avaliando em  $t = 0$ , encontramos

$$Dh(x)X_1(x) = X_2(h(x)) \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Proposição (Caracterização das  $C^k$ -conjugações).** *Sejam*

$$X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*dois campos de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$  e com  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos um difeomorfismo  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  de classe  $C^{k+1}$ . Então,*

$$h \text{ é uma } C^k\text{-conjugação entre } X_1 \text{ e } X_2 \iff h_* X_1 = X_2.$$

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) É claro que o campo  $X_1$  é topologicamente conjugado a  $X_2$ . Logo,  $h$  preserva curvas integrais. A proposição *campos relacionados e preservação de curvas integrais* nos assegura

$$X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1.$$

A seguir, a proposição *campos relacionados e push-forward* nos garante

$$X_2 = h_* X_1.$$

( $\Leftarrow$ ) A proposição *campos relacionados e push-forward* nos garante

$$X_2 \stackrel{h}{\sim} X_1.$$

A proposição *campos relacionados e preservação de curvas integrais* nos assegura que  $h$  preserva curvas integrais. Logo, o difeomorfismo  $h \in C^{k+1}$  é uma conjugação topológica. Donde  $h$  é uma  $C^k$ -conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$  ♣

**Exemplo (campos conjugados).** Consideremos a função

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right), \end{aligned}$$

e os campos planares

$$X(x, y) = (x, -y) \quad \text{e} \quad Y(u, v) = (u, u^3 - v).$$

Claramente  $h \in C^\infty$  e (cheque)

$$h^{-1}(u, v) = \left(u, v - \frac{u^3}{4}\right) \text{ é } C^\infty.$$

Verifiquemos que  $h$  satisfaz

$$h_* X = Y.$$

Esboçemos também os retratos de fase de  $X$  e de  $Y$ .

**Verificações.** Com  $(x, y) = h^{-1}(u, v) = \left(u, v - \frac{u^3}{4}\right)$ , valem os cálculos

$$\begin{aligned} h_*X(u, v) &= Dh\left(u, v - \frac{u^3}{4}\right)\left[X\left(u, v - \frac{u^3}{4}\right)\right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3u^2}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{u^3}{4} - v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ u^3 - v \end{pmatrix} \\ &= Y(u, v). \end{aligned}$$

Para esboçar o retrato de fase de  $Y$  basta desenhar o de  $X$  e então aplicar  $h$ . Seguem o retrato de fase de  $X$  e as principais órbitas orientadas de  $Y$ .

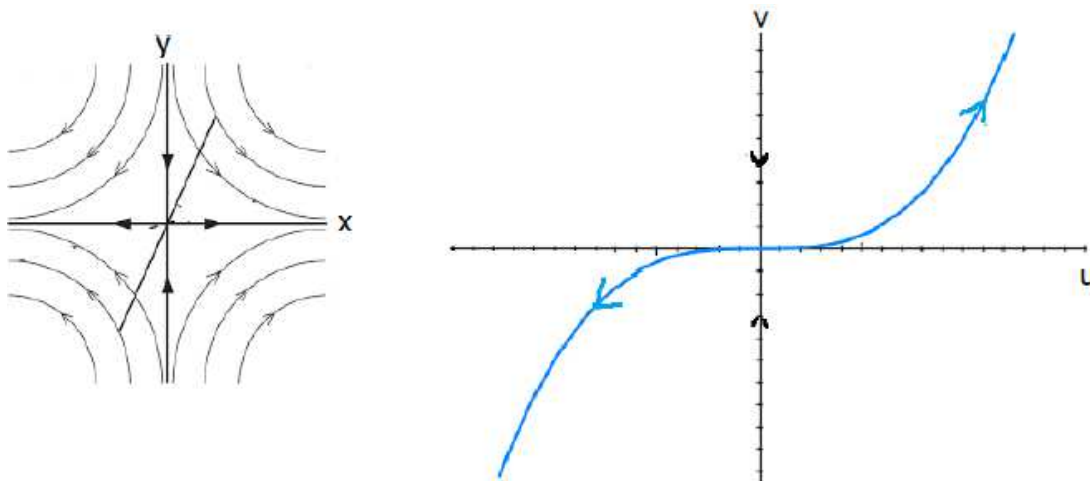


Figura 11: Retrato de fase de  $X$  e, à direita, órbitas principais orientadas de  $Y$ .

Para esboçar o retrato de fase de  $Y$ , notemos que o difeomorfismo  $h$  envia o eixo  $y$  no eixo  $v$ . Ainda,  $h$  envia o eixo  $x$  na cúbica

$$v \mapsto \frac{u^3}{4}.$$

Vide as orientações na figura acima.

Notemos que  $X$  é uma “sela”. Logo,  $Y$  também.

A única singularidade de  $X$  é a origem. A única singularidade de  $Y$  é a origem.

Complete então o retrato de fase de  $Y(u, v) = (u, u^3 - v)$  ♣

## 5.5 - PONTOS SINGULARES HIPERBÓLICOS

**Definições.** Consideremos um campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$  com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $k \geq 1$ , e  $p$  um ponto singular de  $X$ .

- O ponto  $p$  é **hiperbólico** se todo autovalor de  $DX(p)$  tem parte real não nula (isto é, o autovalor não é imaginário puro).
- Se  $p$  é hiperbólico, o campo  $DX(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o **linearizado** de  $X$  em  $p$ .

Dada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  suficientemente derivável, o seu diferencial é denotado  $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{mn}$ . Também escrevemos  $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , com  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  o espaço das transformações lineares  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

O diferencial de  $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é denotado  $D^2F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mn^2} \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn})$ .

**Lema (Pontos singulares, conjugação e semelhança dos diferenciais).** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos de classe  $C^2$  e uma  $C^2$ -conjugação  $h$  entre  $X$  e  $Y$  numa vizinhança de uma singularidade  $p$  de  $X$ . Então  $q = h(p)$  é singularidade de  $Y$  e*

$$DY(q) = Dh(p)DX(p)[Dh(p)]^{-1}.$$

*Ainda,  $DX(p)$  e  $DY(q)$  tem mesmos autovalores com mesmas multiplicidades.*

**Prova.**

Numa vizinhança de  $p$ , podemos supor  $Y = h_*X$ . Escrevamos  $y = h(x)$  com  $x$  a variável independente e  $y$  a variável dependente. Por hipótese temos

$$Y(y) = Dh(x)X(x) = Dh(h^{-1}(y))X(h^{-1}(y)).$$

Diferenciando obtemos

$$DY(y) = D^2h(h^{-1}(y))Dh^{-1}(y)X(h^{-1}(y)) + Dh(h^{-1}(y))DX(h^{-1}(y))Dh^{-1}(y).$$

Logo,

$$DY(q) = D^2h(p)[Dh(p)]^{-1}X(p) + Dh(p)DX(p)[Dh(p)]^{-1}.$$

Graças à hipótese  $X(p) = 0$  encontramos  $DY(q) = Dh(p)DX(p)[Dh(p)]^{-1} \clubsuit$

**Definição.** O índice de estabilidade de um ponto (singular) hiperbólico  $p$  de um campo  $X$  é o número de autovalores com parte real estritamente negativa.

Pelo lema imediatamente acima, o índice de estabilidade é invariante por  $C^2$ -conjugações em torno de uma singularidade hiperbólica.

Seja  $p$  um ponto hiperbólico de  $X$ . O teorema enunciado a seguir, sem demonstração, estabelece que o retrato de fase do linearizado  $DX(p)$  determina (a menos de conjugação) o retrato de fase de  $X$  numa vizinhança do ponto  $p$ .

**Teorema de Linearização (Hartman-Grobman).** *Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^1$ , com  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ , e um ponto singular hiperbólico  $p$ . Então, existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  e uma vizinhança  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que*

$$X|_V \text{ é topologicamente conjugado a } DX(p)|_W.$$

**Prova.** Vide [3, pp. 281–295] ♣

**Exemplo (ao teorema de Hartman-Grobman).** Consideremos o campo

$$Y : \quad \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y + x^3 \end{pmatrix}.$$

Claramente, a origem  $(0, 0)$  é ponto singular. Temos

$$DY(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DY(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz  $DY(0, 0)$  são 1 e  $-1$ . Logo,  $0 = (0, 0)$  é ponto singular hiperbólico.

Portanto, pelo teorema de linearização (Hartman-Grobman), o campo  $Y$  é topologicamente conjugado em uma vizinhança da origem ao linearizado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \clubsuit$$



## 5.6 - LINEARIZAÇÕES

Seja um campo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  e o sistema autônomo não linear

$$x' = F(x), \text{ para } x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Suponhamos que  $(0, 0)$  é uma singularidade isolada do campo  $F$  e que  $A = DF(0, 0) \in M_2(\mathbb{R})$  tem determinante não nulo. Em muitos casos (mas não todos) podemos classificar a singularidade de  $F$  na origem segundo a de

$$x' = Ax$$

na origem. O tipo de singularidade de  $F$  coincide com o de  $A$  em todos os casos na **tabela abaixo**, com exceção dos casos 4, 7 e 8. A prova desta correlação se encontra em Coddington e N. Levinson *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York (1955).

Seja  $\Delta$  o discriminante do polinômio característico  $p_A(\lambda)$ .

	Autovalores	Tipo de singularidade
1.	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (sinais contrários)	sela
2.	$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ (estritamente negativos)	nó estável
3.	$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ (estritamente positivos)	nó instável
4.	$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\theta$ com $\theta \neq 0$ (imaginários puros)	centro
5.	$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a \pm i\theta$ com $a < 0$ e $\theta \neq 0$	espiral estável
6.	$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a \pm i\theta$ com $a > 0$ e $\theta \neq 0$	espiral instável
7.	$\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (raiz dupla, menor que zero)	nó estável
8.	$\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (raiz dupla, maior que zero)	nó instável

### Comentários.

- As classificações dependem das raízes do polinômio característico  $p_A$  da matriz  $A = DF(0)$ . Estas por sua vez dependem do discriminante  $\Delta$  de  $p_A$ .
- As classificações (vide tabela) dependentes de desigualdades estritas se mantêm.
- Se a origem é um centro [logo,  $\Delta < 0$  e  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\overline{\lambda_2}) = 0$ ] para o sistema

$$x' = Ax,$$

então a origem pode ser um **centro** ou um **ponto espiral** para o sistema autônomo

$$x' = F(x).$$

- Se a origem é um ponto nodal (estável ou instável) com

$$\Delta = 0 \text{ e } \lambda_1 = \lambda_2$$

para o sistema linear  $x' = Ax$ , então a origem pode ser um **nó** ou um **ponto espiral** para o sistema autônomo

$$x' = F(x).$$

De uma forma pouco rigorosa e tendo em vista os *teoremas de continuidade e diferenciabilidade das soluções em relação aos parâmetros* e a dependência contínua das raízes de um polinômio em relação a seus coeficientes, é bastante razoável suspeitar que as correlações apontadas acima sejam verdadeiras.

Entretanto, a demonstração de que tais correspondências valem requer um bom número de verificações.

### 5.7 - TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON

**Definições (Conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de uma órbita).** Consideremos um campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , um ponto  $p \in \Omega$  e o intervalo maximal  $J(p) = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Adotamos as notações abaixo.

- Se  $\omega_+(p) = +\infty$ , o conjunto  $\omega$ -limite é

$$\omega(p) = \{q \in \Omega : \text{existe } t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } \Phi(t_n, p) \rightarrow q\}.$$

- Se  $\omega_-(p) = -\infty$ , o conjunto  $\alpha$ -limite é

$$\alpha(p) = \{q \in \Omega : \text{existe } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } \Phi(t_n, p) \rightarrow q\}.$$

**Exemplo.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $X(x, y) = (x, -y)$ . O retrato de fase é

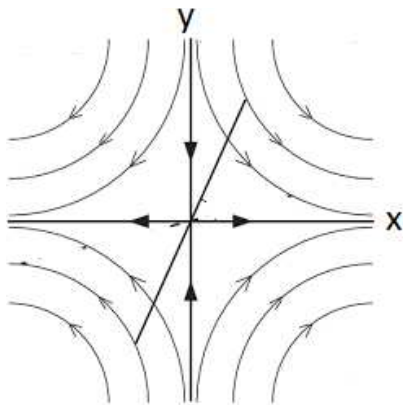


Figura 12: Retrato de fase de  $X(x, y) = (x, -y)$ .

Valem as seguintes afirmações.

- Se  $p = (0, y)$ , com  $y \neq 0$ , então  $\omega(p) = \{(0, 0)\}$  e  $\alpha(p) = \emptyset$ .
- Se  $p = (x, 0)$ , com  $x \neq 0$ , então  $\omega(p) = \emptyset$  e  $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ .
- Se  $p = (0, 0)$ , então  $\omega(p) = \{(0, 0)\}$  e  $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ .
- Para qualquer outro ponto  $p$ , temos  $\omega(p) = \emptyset$  e  $\alpha(p) = \emptyset$ .

**Exemplo.** Considerando o sistema não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

- (a) resolvamos o sistema.
- (b) esboçemos as órbitas e
- (c) identifiquemos os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite.

**Solução.**

- (a) Com  $r \neq 0$ , utilizemos as coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Substituindo no sistema de edo's dado encontramos

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = -r \sin \theta + r \cos \theta(1 - r^2) \\ r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = r \cos \theta + r \sin \theta(1 - r^2). \end{cases}$$

Convenientemente multiplicando tais equações por  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  e então somando e subtraindo encontramos

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) = r - r^3 \\ r\theta' = r. \end{cases}$$

Donde segue, para a segunda equação do sistema acima,

$$\theta' = 1 \quad \text{e} \quad \theta(t) = t + \theta_0 \quad \text{para algum } \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

A primeira equação no sistema acima é de **Bernoulli**. Escrevendo

$$\frac{r'}{r^3} - \frac{1}{r^2} + 1 = 0 \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{r^2},$$

encontramos

$$-\frac{u'}{2} - u + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \text{então} \quad u' + 2u - 2 = 0.$$

Donde segue

$$u'e^{2t} + 2ue^{2t} - 2e^{2t} = 0 \quad \text{e} \quad \text{então} \quad (ue^{2t})' = 2e^{2t}.$$

Integrando esta última achamos

$$ue^{2t} = e^{2t} + c_1 \quad \text{e então} \quad u(t) = 1 + c_1 e^{-2t}.$$

Logo,

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}.$$

Portanto a solução geral é  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$  para todo  $t$ , ou

$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}} (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)), \quad \text{com } \theta_0 \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

(b) Imponhamos a condição inicial  $\theta_0 = 0$ .

Se  $c = 0$ , temos a circunferência  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  anti-horária. Se  $c > 0$  então temos  $r(t) > 1$  para todo  $t$ . Se  $c < 0$  então temos  $r(t) < 1$  para todo  $t$ .

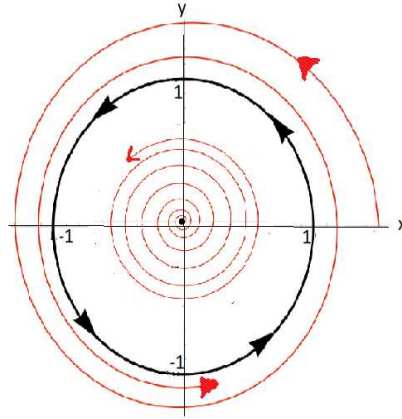


Figura 13: Órbitas correspondentes a  $c < 0$ ,  $c = 0$  e  $c > 0$ .

(c) No problema considerado temos os seguintes casos.

- ◇ Caso  $c > 1$ . O conjunto  $\omega$ -limite é  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .
- ◇ Caso  $c = 1$ . Os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite coincidem com  $S^1$ .
- ◇ O caso  $c < 1$ . O conjunto  $\omega$ -limite é  $S^1$ . O conjunto  $\alpha$ -limite é  $\{(0, 0)\}$  ♣

**Exemplo.** Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , e  $p \in \Omega$ . Valem as seguintes afirmações.

- (a) Se  $\gamma_p$  é periódica, com período  $T$ , então  $\alpha(p) = \omega(p) = \gamma_p^*$ .
- (b) Se  $q \in \gamma_p^*$ , então  $\omega(q) = \omega(p)$  e  $\alpha(q) = \alpha(p)$ .

**Verificação.**

- (a) A imagem  $\gamma_p^* = \gamma_p([0, T])$  é compacta. Donde segue  $\alpha(p) \cup \omega(p) \subset \gamma_p^*$ . Inversamente, se  $q = \gamma_p(\tau) \in \gamma_p^*$  então

$$\gamma_p(\tau \pm nT) = q \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q.$$

Logo,  $\gamma_p^* \subset \omega(p) \cap \alpha(p)$ .

- (b) Suponhamos  $q = \gamma_p(\tau)$ . Sejam  $r \in \omega(q)$  e  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\Phi(t_n, q) \rightarrow r$ . Então segue  $r = \lim \Phi(t_n, \Phi(\tau, p)) = \lim \Phi(t_n + \tau, p)$ . Isto mostra  $\omega(q) \subset \omega(p)$ . Por outro lado, sabemos que  $p \in \gamma_q^*$  e então por simetria segue  $\omega(p) \subset \omega(q)$ . A prova para o conjunto  $\alpha$ -limite é análoga (cheque)♣

**Comentário.** Mantenhamos as notações acima. Seja  $\gamma_p$  a curva integral do campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$  com  $k \geq 1$ . Então,

$$\tilde{\gamma}_p(t) = \gamma_p(-t)$$

é curva integral do campo  $-X$ . Se  $\omega_+(p, X) = +\infty$ , então  $\omega_-(p, -X) = -\infty$  e

$$\omega(p, X) = \alpha(p, -X).$$

[Assim, basta enunciar e provar propriedades para conjuntos  $\omega$ -limites.]

**Notação.** Seja  $\gamma$  um órbita do campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$  e com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Vimos acima a propriedade  $\omega(p) = \omega(q)$  se  $p \in \gamma^*$  e  $q \in \gamma^*$ . Escrevemos então, brevemente,

$$\omega(\gamma) \text{ para } \omega(p), \text{ onde } p \text{ é um ponto qualquer em } \gamma^*.$$

**Teorema (Propriedades do conjunto  $\omega$ -limite).** *Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$ , com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Seja*

$$\gamma^+(p) = \{\gamma_p(t) : t \geq 0 \text{ e } t \in J(p)\}$$

*a semiórbita positiva do campo  $X$  pelo ponto  $p \in \Omega$ . Suponha  $\gamma^+(p) \subset K$ , com  $K$  compacto em  $\Omega$ . Então, valem as seguintes propriedades.*

- (a)  $\omega(p) \neq \emptyset$ .
- (b)  $\omega(p)$  é compacto.
- (c)  $\omega(p)$  é invariante por  $X$  [isto é, se  $q \in \omega(p)$  então  $\gamma_q^* \subset \omega(p)$ ].
- (d)  $\omega(p)$  é conexo.

**Prova.**

- (a) O teorema solução maximal garante  $(t, \gamma_p(t)) \rightarrow \partial(\mathbb{R} \times \Omega)$  se  $t \rightarrow \omega_+(p)$ . Como  $\gamma_p(t) \in K$  para todo  $t \geq 0$ , com  $K$  compacto em  $\Omega$ , temos  $\omega_+(p) = +\infty$ . Temos então  $\Phi(n, p) \in K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, existe uma subsequência  $\Phi(n_j, p) \rightarrow q \in K$ . Donde concluímos  $q \in \omega(p)$ .

- (b) Como  $\omega(p) \subset K$ , basta mostrar que  $\omega(p)$  é fechado. Consideremos uma sequência  $(q_n) \subset \omega(p)$  tal que  $q_n \rightarrow q$ . É claro que  $q \in \Omega$ . Seja a bola aberta

$$B = B\left(q, \frac{1}{N}\right) \subset \Omega, \text{ com } N \in \mathbb{N}.$$

Existe  $n \geq N$  tal que  $q_n \in B$ . Temos  $q_n = \lim \gamma_p(t_{n,m})$  para alguma sequência  $t_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$ . Logo, existe  $\tau_N \geq N$  satisfazendo  $\gamma_p(\tau_N) \in B$ . Portanto

$$\gamma_p(\tau_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} q \text{ com } \tau_N \rightarrow +\infty.$$

Logo,  $q \in \omega(p)$ .

- (c) Sejam  $q \in \omega(p)$  e  $r = \Phi_\tau(q) \in \gamma_q^*$ . Existe  $t_n \rightarrow +\infty$  com  $\Phi_{t_n}(p) \rightarrow q$ . Seguem

$$r = \Phi_\tau(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\tau \circ \Phi_{t_n}(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\tau+t_n}(p) \text{ e } r \in \omega(p).$$

(d) Suponhamos  $\omega(p)$  não conexo.

- ◊ **Cisão.** Notação: o símbolo  $\cup$  indica uma união de conjuntos disjuntos. Existe uma cisão

$$\omega(p) = A \cup B,$$

com  $A$  e  $B$  não vazios, disjuntos e ambos abertos e fechados em  $\omega(p)$ . Então, como  $\omega(p)$  é compacto, concluímos que  $A$  e  $B$  são compactos (**cheque**).

Segue  $2d = \text{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A \text{ e } y \in B\} > 0$ . **Cheque**.

Escrevamos  $\gamma = \gamma_p$ . Fixemos  $a \in A$  e  $b \in B$ . Existem

$$\begin{cases} s_n \rightarrow +\infty \\ t_n \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{tais que} \quad \begin{cases} \gamma(s_n) \rightarrow a \\ \gamma(t_n) \rightarrow b. \end{cases}$$

Seja  $(\tau_n)$  dada por  $\tau_{2n} = s_{2n}$  e  $\tau_{2n+1} = t_{2n+1}$ . Logo,

$$\gamma(\tau_{2n}) \rightarrow a \quad \text{e} \quad \gamma(\tau_{2n+1}) \rightarrow b.$$

- ◊ **Distância.** É trivial constatar a continuidade da função (**cheque**)

$$D(t) = \text{dist}(\gamma(t), A).$$

Pode-se supor (**cheque**)

$$D(\tau_{2n}) < d \quad \text{e} \quad D(\tau_{2n+1}) > d.$$

Dados  $\tau_n$  e  $\tau_{n+1}$ , o TVI (valor intermediário) garante  $\sigma_n$  entre  $\tau_n$  e  $\tau_{n+1}$  com

$$D(\sigma_n) = \text{dist}(\gamma(\sigma_n), A) = d.$$

Logo, todo  $\gamma(\sigma_n)$  está no compacto  $A + D(0, d) = \{x + y : x \in A \text{ e } y \in D(0, d)\}$ , onde  $D(0, d) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq d\}$ . **Cheque** a compacidade.

Donde existe uma subsequência satisfazendo

$$\gamma(\sigma_{n_j}) \longrightarrow c \in A + D(0, d).$$

Gratos à convergência  $\sigma_{n_j} \rightarrow \infty$ , vemos que  $c \in \omega(p)$ . Por continuidade temos

$$\text{dist}(c, A) = \lim D(\sigma_{n_j}) = d.$$

Donde segue

$$c \in B \text{ e } \text{dist}(B, A) < 2d \nexists$$

A prova do teorema está completa♣



Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Corolário.** *Mantenhamos as hipóteses acima. Se  $q \in \omega(p)$ , então*

$$J(q) = \mathbb{R}.$$

**Prova.** Escrevamos  $J(q) = (\omega_-, \omega_+)$ .

Então, a afirmação segue de (cheque)

$$\gamma_q^* \subset \omega(p), \text{ com } \omega(p) \text{ compacto em } \Omega, \text{ e de } (t, \gamma_q(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \omega_\pm(q)} \partial(\mathbb{R} \times \Omega) \clubsuit$$

**Teorema (Poincaré-Bendixon).** *Consideremos um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , um campo planar  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$  com  $k \geq 1$  e um ponto  $p \in \Omega$ . Suponhamos que existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que*

$$\gamma_p^+ \subset K \quad [\text{logo, } \omega_+(p) = +\infty]$$

e que  $X$  tem no máximo um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ . Seguem então as alternativas abaixo.

(a) Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então

$$\omega(p) \text{ é uma órbita periódica.}$$

(b) Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então

$$\omega(p) \text{ é um (único) ponto singular.}$$

(c) Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e pontos singulares, então

$$\omega(p) \text{ é um conjunto de órbitas.}$$

Cada uma dessas órbitas tende a algum ponto singular em  $\omega(p)$  se  $t \rightarrow +\infty$ .

## 5.8 - ESTABILIDADE (LIAPUNOV)

**Definição (Estabilidade, no sentido de Liapunov).** Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo e localmente de Lipschitz e um ponto de equilíbrio (ou singular)  $p \in \Omega$ .

- $p$  é **estável** se para toda vizinhança  $O$  de  $p$ , existe uma vizinhança  $O_1 \subset O$  do ponto  $p$  tal que para todo ponto  $x \in O_1$  temos

$$\omega_+(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \gamma_x^+ \subset O.$$

- $p$  é **assintoticamente estável** se  $p$  é estável e pudermos escolher  $O_1$  (na definição acima) satisfazendo

$$\text{para todo } x \in O_1 \text{ temos } \gamma_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} p.$$

- $p$  é **instável** se não é estável.

**Definição (Função de Liapunov).** Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuo e localmente de Lipschitz e um ponto de equilíbrio (ou singular)  $p \in \Omega$ . Dada uma vizinhança  $O \subset \Omega$  de  $p$ , dizemos que

$$V : O \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma **função de Liapunov** para  $p$  se as seguintes condições estão satisfeitas.

- (a)  $V(p) = 0$  e  $V > 0$  em  $O \setminus \{p\}$ .
- (b)  $V$  é contínua, diferenciável em  $O \setminus \{p\}$  e a função

$$\begin{aligned} \dot{V} : O \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \nabla V(x) \cdot X(x) \end{aligned}$$

satisfaz  $\dot{V} \leq 0$  em todo ponto de  $O \setminus \{p\}$ .

**Definição.** Se em (b), na definição de função de Liapunov, vale a desigualdade estrita “<”, então  $V$  é dita uma **função de Liapunov estrita**.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Teorema (Critério de Liapunov).** *Com as notações acima, vale o que segue.*

- (a) *Se existir uma função de Liapunov para  $p$ , então  $p$  é estável.*
- (b) *Se existir uma função de Liapunov estrita para  $p$ , então  $p$  é assintoticamente estável.*

**Prova.** Em preparação.

**Exemplo.** Sejam  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e o campo

$$X = -\nabla V.$$

Seja  $p$  um ponto singular isolado de  $X$ . Se  $p$  é um ponto de mínimo local (logo, estrito) de  $V$ , então  $p$  é assintoticamente estável.

**Verificação.**

Seja  $O \subset \Omega$  uma vizinhança aberta de  $p$  satisfazendo

$$V(p) < V(x) \text{ para todo } x \in O \setminus \{p\}.$$

Então, a função

$$\begin{aligned} \psi : O &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto V(x) - V(p) \end{aligned}$$

é uma função de Liapunov estrita para  $p$ . De fato,  $\psi$  é de classe  $C^2$ , estritamente positiva em  $O \setminus \{p\}$  e para todo ponto  $x \in O \setminus \{p\}$  encontramos

$$\begin{aligned} D\psi(x) \cdot X(x) &= -\langle \nabla V(x), \nabla V(x) \rangle \\ &= -|\nabla V(x)|^2 < 0 \clubsuit \end{aligned}$$

**Exemplo (melhorando o exemplo acima).** Sejam  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e o campo

$$X = -\nabla V.$$

Seja  $p$  um ponto crítico de  $X$ . Vale o que segue.

Se  $p$  é um ponto de mínimo local estrito de  $V$ , então  $p$  é estável.

Se  $p$  é ponto de mínimo local estrito de  $V$  e um ponto crítico isolado, então  $p$  é assintoticamente estável.

**Verificação.** A mesma que a dada acima  $\clubsuit$

## 5.9 - CAMPOS HAMILTONIANOS

**Definição.** O campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , com  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^{2n}$ , é **hamiltoniano** se existe uma função  $H \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  tal que

$$X = -J \circ \nabla H, \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto (-y, x). \end{array}$$

**Notações.** Escrevemos

$$\nabla H = \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}, \frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right).$$

Escrevemos também  $\nabla = D$  e então

$$\nabla H = DH = (D_x H, D_y H).$$

Com a notação acima temos

$$X = -J(D_x H, D_y H) = (D_y H, -D_x H).$$

**Comentários.** Mantenhamos a notação acima.

- (1) A função  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma integral primeira do campo  $X$ . Isto é,  $H$  é constante ao longo das trajetórias de  $X$ .
- (2) Se  $z_0 \in \Omega$  é um ponto de mínimo local estrito de  $H$ , então  $z_0$  é ponto de equilíbrio estável de  $X$ .

**Verificações.**

- (1) Seja  $z \in \Omega$  e  $\gamma = \gamma_z$  a curva integral para  $X$  com  $\gamma(0) = z$ . Então temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H \circ \gamma(t)] &= \langle DH(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle DH(\gamma(t)), X(\gamma(t)) \rangle \\ &= D_x H D_y H - D_x H D_y H \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (2) Basta ver que  $H - H(z_0)$  é uma função de Liapunov em  $z_0$ ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

## REFERÊNCIAS

1. Doering, C. I. e Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 2010.
2. Figueiredo, D. G. e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, 3<sup>a</sup> ed., IMPA, 2008.
3. Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979.

*Departamento de Matemática - Universidade de São Paulo*  
*São Paulo, SP - Brasil*  
*oliveira@ime.usp.br*  
<http://www.ime.usp.br/~oliveira>