Ano 2017-2022

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Referência: "A Formula Substituting the Undetermined Coefficients and the Annihilator Methods", O. R. B. de Oliveira, *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology* **44**(3) (2013), 462–468, www.tandfonline.com: `http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2012.714496`

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Neste texto apresentamos a solução geral da equação diferencial

$$P(D)x(t) = R(t)e^{\gamma t}, \text{ onde } D = \frac{d}{dt},$$

com $R = R(t)$ um polinômio real, γ um número real ou complexo e

$$P(D)$$

um operador diferencial linear com coeficientes constantes e reais.

1. Existência de Solução Particular Polinomial (caso $\gamma = 0$).

Lema 1 [Input-output (entrada-saída) Polinomial]. *Sejam $a_n, \ldots, a_1, a_0$ números não todos nulos e*

$$R(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$$

um polinômio de grau menor ou igual a n. Consideremos a edo na variável real t

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \ a_1 x' + a_0 x \ = \ R(t) \ = \ b_n t^n \ + \cdots + \ b_1 t \ + b_0.$$

(a) *Se $a_0 \neq 0$, então existe uma solução polinomial Q, com grau$(Q) =$ grau(R).*

(b) *Seja $k = \max\{l : a_0 = 0, \ldots, a_l = 0\}$. Então, a edo tem uma solução polinomial da forma $Q = t^{k+1} R_1$, com grau$(R_1) =$ grau(R).*

Prova.

(a) Resolvamos o par de equações

$$(1.1) \quad \begin{cases} Q(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \\ a_0 Q + a_1 Q' + a_2 Q'' + \cdots + \ a_j Q^{(j)} + \cdots + a_{n-1} Q^{(n-1)} + a_n Q^{(n)} = R, \end{cases}$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, onde $0 \leq j \leq i$ [notemos que nas demais parcelas tal coeficiente é zero]. Fixada uma tal parcela $a_j Q^{(j)}$, um fator do coeficiente de t^{n-i} surge do trivial cômputo

$$c_{n-i+j} \frac{d^j}{dt^j} \{ \, t^{n-i+j} \} = c_{n-i+j} (n-i+j)(n-i+j-1) \cdots (n-i+1) t^{n-i}.$$

O coeficiente de t^{n-i} na parcela $a_j Q^{(j)}$ é então

$$a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}.$$

O coeficiente do monômio t^{n-i} no sistema (1.1) satisfaz, ordenando a soma abaixo em ordem decrescente em j, desde $j = i$ até $j = 0$,

$$(1.2) \qquad \begin{cases} a_i c_n \frac{n!}{(n-i)!} + \cdots + a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} + \cdots + a_0 c_{n-i} = b_{n-i}, \\ \\ \text{para cada } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Pelas expressões (1.2) acima obtemos a equação matricial abaixo, que é trivialmente resolúvel (pois a matriz que surge é triangular inferior),

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \frac{n!}{(n-2)!} & a_1 \frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_i \frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1} \frac{(n-1)!}{(n-i)!} & . & a_j \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 \\ a_n n! & . & . & . & . & . & . & . & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-i} \\ . \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-i} \\ . \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) Neste caso, a equação é

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_{k+1} x^{(k+1)} = R.$$

Seja $y = x^{(k+1)}$. Por (a), a equação

$$a_n y^{(n-k-1)} + \cdots + a_{k+1} y = R, \text{ com } k+1 \leq n,$$

têm solução $y(t) = Q(t)$, com grau$(Q) =$ grau(R).

Então, integrando $k+1$ vezes a função $y = y(t)$ e escolhendo em cada integração o número 0 para termo independente, obtemos a solução desejada (vide seção 4 - Exemplos)♣

2. A fórmula para $P(D)\{Q(t)e^{\gamma t}\}$, onde $D = \frac{d}{dt}$.

Consideremos os operadores diferenciais lineares

$$D = \frac{d}{dt} \quad \text{e} \quad D^j = \frac{d^j}{dt^j} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Sejam $a_n, \ldots, a_1, a_0$ números fixados. Dada uma função $x = x(t)$ suficientemente derivável, consideremos a expressão

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x.$$

Consideremos também o operador diferencial linear com coeficientes constantes

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I, \text{ com } I = D^0 \text{ o operador identidade.}$$

Notemos que $P(D)x = a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x$.

A seguir, consideremos a equação homogênea

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

É razoável procurar uma solução de tal equação homogênea na forma

$$x(t) = e^{\lambda t}, \text{ para alguma constante } \lambda.$$

Observemos que

$$D[e^{\lambda t}] = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad D^j[e^{\lambda t}] = \lambda^j e^{\lambda t}.$$

Segue então

$$\begin{aligned} P(D)[e^{\lambda t}] = 0 &\Longleftrightarrow (a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0 \\ &\Longleftrightarrow a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Isto aponta uma relação entre soluções da equação diferencial homogênea

$$P(D)x = a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

e raízes da equação polinomial

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Definição. Mantenhamos a notação acima. O **polinômio característico** associado ao operador $P(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 I$ é

$$\boxed{p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.}$$

Dizemos também que $p = p(\lambda)$ é o polinômio característico associado à equação $a_n x^{(n)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$.

Lema 2 (Regra de Leibnitz para derivadas). *Consideremos duas funções, f e g, ambas em $C^\infty(\mathbb{R})$. Então,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Prova.

Para $n = 1$ temos $(fg)' = f'g + fg'$. Supondo a fórmula para n, temos

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} f^{(j+1)} g^{(n-j)} + \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \clubsuit
\end{aligned}$$

Derivada de um polinômio. Dado um polinômio

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

é trivial ver que

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j}.$$

O resultado a seguir é o principal deste texto.

Teorema 3 (Fórmula Básica). *Consideremos o operador diferencial com coeficientes constantes e reais*

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 I$$

e seu polinômio característico (com coeficientes reais)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Seja $Q = Q(t)$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Seja γ um número arbitrário fixado. Então, vale a fórmula

$$P(D)\left\{ Q(t)e^{\gamma t} \right\} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q \right] e^{\gamma t}.$$

Prova.

Pela regra de Leibnitz segue

$$P(D)[Q(t)e^{\gamma t}] = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left[Q(t)e^{\gamma t} \right]$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t) \gamma^{k-j} \right] e^{\gamma t}.$$

Trocando a ordem no último somatório (entre colchetes) encontramos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)} \gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} \gamma^{k-j} \right] \frac{Q^{(j)}}{j!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(\gamma) \frac{Q^{(j)}}{j!}.$$

Logo,

$$P(D)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(\gamma)}{j!} Q^{(j)} \right] e^{\gamma t} \clubsuit$$

3. A Fórmula para uma Solução Particular (γ arbitrário).

Seja $R(t)$ um polinômio com coeficientes reais, na variável real t. Seja $\gamma \in \mathbb{C}$. Seja $P(D)$ um operador diferencial como no Teorema 3.

Teorema 4 (Fórmula para Solução Particular). *A equação diferencial*

$$P(D)x = R(t)e^{\gamma t}, \tag{4.1}$$

admite uma solução particular da forma

$$Q(t)e^{\gamma t},$$

com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo a edo

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = R. \tag{4.2}$$

(a) *Se γ é um número real, podemos supor $Q = Q(t)$ um polinômio real e então,*

$$x_p = x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} \text{ é uma função real.}$$

(b) *Se γ não é real, então $Q(t)$ têm coeficientes complexos e*

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$$

é uma solução complexa da edo (4.1) . Escrevendo $\gamma = \alpha + \beta i$, as funções

$$x_p = Re\{\, z_p \,\} \ \text{ e } \ y_p = Im\{\, z_p \,\}$$

satisfazem

$$P(D)x_p = R(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e} \quad P(D)y_p = R(t)e^{\alpha t}\sin\beta t \ .$$

(c) *Se $p(\gamma) \neq 0$, então temos grau(Q) = grau(R).*

(d) *Se γ é raiz de multiplicidade k do polinômio característico, podemos supor*

$$Q(t) = t^k R_1(t), \ \text{com grau}(R_1) = \text{grau}(R).$$

Prova.

Notemos que
$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} = 1.$$

Pelo Lema 2 uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ satisfaz
$$\begin{aligned} P(D)\left\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\right\} &= \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \,+\, \cdots \,+\, \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \,+\, p'(\gamma)Q' \,+\, p(\gamma)Q\,\right] e^{\gamma t} \\ &= R(t)e^{\gamma t}, \end{aligned}$$
donde segue a equação (4.2).

Pelo Lema 1 segue que existe um polinômio $Q(t)$ resolvendo a equação (4.2).

Provamos as afirmações iniciais.

A seguir, provemos (a), (b), (c) e (d).

(a) Como $R(t)$ é um polinômio real e γ é real, pelo Lema 1 segue trivialmente que podemos supor $Q(t)$ um polinômio com coeficientes reais.

(b) Como γ é complexo, pelo Lema 1 segue que $Q(t)$ tem coeficientes complexos. Escrevendo
$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} = x_p(t) + iy_p(t), \text{ com } x_p(t) \in \mathbb{R} \text{ e } y_p(t) \in \mathbb{R},$$
obtemos
$$P(D)z_p = P(D)x_p + iP(D)y_p = R(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + iR(t)e^{\alpha t}\sin\beta t.$$
Donde concluímos (b).

(c) É óbvio, devido à equação (4.2), que se $p(\gamma) \neq 0$ então
$$\text{grau}(Q) = \text{grau}(R).$$

(d) Se γ é raiz de multiplicidade k do polinômio característico, então a edo
$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \,+\, \cdots \,+\, \frac{p^{(k)}(\gamma)}{2!}Q^{(k)} \,= R(t),$$
tem, devido ao Lema 1, uma solução polinomial $y(t) = Q^{(k)}(t)$, satisfazendo $\text{grau}(y) = \text{grau}(R)$. Integrando o polinômio $y = y(t)$ k-vezes, e escolhendo termos independentes nulos a cada passo da integração, obtemos uma solução particular na forma desejada♣

4. Exemplos

(E1) Resolva a edo
$$x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^3e^{3t}.$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.

A solução geral da edo homogênea associada é
$$x_h = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{-t}, \quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}.$$

[A fórmula 4.2 implica muito trivialmente que $P(D)[te^{3t}] = 0$. Cheque!]

Pelo Teorema 4 segue que existe uma solução particular $x_p = Q(t)e^{3t}$, com $Q(t)$ um polinômio real, da edo (E1), tal que

$$(E1.1) \qquad \frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q = t^3.$$

Mas, $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$. Donde (E1.1) reduz-se a
$$Q''' + 4Q'' = t^3,$$
com solução polinomial $Q'' = \frac{t^3}{4} + at^2 + bt + c$. Donde, $Q''' = \frac{3}{4}t^2 + 2at + b$ e
$$t^3 = 4Q'' + Q''' = t^3 \;+\; \Big(4a + \frac{3}{4}\Big)t^2 \;+\; \Big(4b + 2a\Big)t \;+\; (4c + b).$$
Logo,
$$a \;=\; -\frac{3}{16}\,, \quad b \;=\; \frac{3}{32} \quad \text{e} \quad c \;=\; -\frac{3}{128}\;,$$
$$Q'' \;=\; \frac{t^3}{4} \;-\; \frac{3}{16}t^2 \;+\; \frac{3}{32}t \;-\; \frac{3}{128}$$
e escolhemos as primitivas com termo independente nulo
$$Q' \;=\; \frac{t^4}{16} \;-\; \frac{t^3}{16} \;+\; \frac{3t^2}{64} \;-\; \frac{3}{128}t\,,$$
$$Q \;=\; \frac{t^5}{80} \;-\; \frac{t^4}{64} \;+\; \frac{t^3}{64} \;-\; \frac{3t^2}{256}.$$

A solução geral é,
$$x_g = \; c_1e^{3t} \;+\; c_2te^{3t} \;+\; c_3e^{-t} \;+\; \Big(\frac{t^5}{80} \;-\; \frac{t^4}{64} \;+\; \frac{t^3}{64} \;-\; \frac{3t^2}{256}\Big)e^{3t}\,, \quad c_{i's} \in \mathbb{R}\clubsuit$$

(E2) Resolva a edo

$$x'' - 2x' + 2x = t^2 e^t \cos t.$$

Solução. Notemos que $t^2 e^t \cos t \ = \ \mathrm{Re}\Big(t^2 e^{(1+i)t} \Big)$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = 1 \pm i$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$x_h(t) \ = \ c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \,, \quad c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $z_p(t)$ é solução particular complexa de

$$z'' - 2z' + 2z \ = \ t^2 e^{(1+i)t} = t^2 e^t (\, \cos t + i \sin t \,) \,,$$

então $x_p(t) \ = \ \mathrm{Re}\big(\, z_p(t) \, \big)$ é solução particular real de (E2). Já vimos que existe uma tal $z_p(t)$ na forma

(1) $\qquad z_p(t) = Q(t) e^{(1+i)t}$, com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo

$$Q'' + p'(1+i) Q' + p(1+i) Q = t^2.$$

Temos $p(1+i) = 0$, $p'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1)$ e $p'(1+i) = 2i$. Obtemos

$$Q'' + 2iQ' = t^2.$$

Logo, Q' é um polinômio de grau dois cujo coeficiente do monômio t^2 é $\frac{1}{2i}$:

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + at + b \Rightarrow Q'' = \frac{t}{i} + a = -it + a \quad \text{e}$$

$$t^2 = 2iQ' + Q'' = t^2 + (2ai - i)t + (2bi + a) \ .$$

Logo, $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$. Donde,

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \ = \ -\frac{t^2 i}{2} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \ \text{ e escolhemos } \ Q(t) = -\frac{t^3 i}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{ti}{4}.$$

Substituindo $Q(t)$ na equação (1) obtemos,

$$z_p(t) = \Big[-\frac{t^3}{6} i \ + \ \frac{t^2}{4} \ + \ \frac{t}{4} i \Big] e^t \Big(\, \cos t + i \sin t \Big)$$

e

$$x_p(t) \ = \ \mathrm{Re}\big(\, z_p(t) \, \big) = e^t \Big[\, \frac{t^2 \cos t}{4} \ + \ \frac{t^3 \sin t}{6} \ - \ \frac{t \sin t}{4} \, \Big]$$

Resposta.

$$x_g(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \, + \, e^t \Big[\, \frac{t^2 \cos t}{4} \, + \, \frac{t^3 \sin t}{6} \, - \, \frac{t \sin t}{4} \, \Big] , \ \ c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R} \clubsuit$$

(E3) Resolvamos a edo

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t} \sin \beta t \, , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1, \text{ com raízes } \lambda = -1 \pm i.$$

A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t \, , \quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\beta = 0$ a edo é homogênea, cuja solução geral já foi dada.

Se $\beta \neq 0$, como temos $e^{\alpha t} \sin \beta t = \mathrm{Im}\{ e^{(\alpha + i\beta)t} \}$ e o problema é em $\mathbb{R}$, a parte imaginária de uma solução da edo complexa

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\gamma t}, \text{ com } \gamma = \alpha + i\beta,$$

é solução da edo dada.

Para obtermos uma solução $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ da edo complexa, notemos que pelo Teorema 4 o polinômio $Q(t)$ satisfaz

$$(E3.1) \qquad \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q \;=\; Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q \;=\; 1.$$

Separemos a análise em três casos.

(1) Caso $\gamma \neq -1 \pm i$ (γ não é raiz característica).

Então,

$$Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)} \text{ resolve } (E3.1)$$

ao passo que

$$z_p = \frac{\overline{p(\gamma)}}{|p(\gamma)|^2} e^{\gamma t} \text{ resolve a edo complexa}$$

e que

$$x_p = \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \mathrm{Im}\{ p(\overline{\gamma}) e^{\gamma t} \} \text{ resolve a edo dada.}$$

A solução geral é

$$x_g \;=\; c_1 e^{-t} \cos t \;+\; c_2 e^{-t} \sin t \;+\; \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \mathrm{Im}\{ p(\overline{\gamma}) e^{\gamma t} \}, \quad c_1 \, , c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

(2) Caso $\gamma = -1 + i$.

Escrevemos a equação (E3.1) como
$$Q'' + 2iQ' = 1,$$
com solução
$$Q' = \frac{1}{2i} \text{ e } Q = -\frac{t}{2}\, i.$$
Donde segue,
$$z_p = Q(t)e^{\gamma t} = -\frac{t}{2}e^{-t}\, i\, e^{it} \;\text{ e }\; x_p(t) = \mathrm{Im}\{\, z_p(t)\,\} = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t.$$
A solução geral x_g é dada por
$$x_g \;=\; c_1e^{-t}\cos t \;+\; c_2e^{-t}\sin t \;-\; \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,,\ \text{com } c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(3) Caso $\gamma = -1 - i$. A solução é
$$x_g \;=\; c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\mathrm{sen}\, t + \frac{t}{2}e^{-t}\cos t\,, c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\ \clubsuit$$

(E4) Resolva a equação
$$\ddot{x} - 4x = (1 + t + t^2)e^{2t}\ .$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, com raízes $\lambda = \pm 2$. A solução geral da edo homogênea associada é
$$x_h = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}\ ,\ \text{com } c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Para uma solução particular $x_p = Q(t)e^{2t}$, com Q um polinômio, resolvemos
$$Q'' + p'(2)Q' + p(2)Q = 1 + t + t^2.$$
Isto é, pois $p(2) = 0$ e $p'(2) = 4$,
$$Q'' + 4Q' = 1 + t + t^2.$$
Substituindo $R = Q'$ temos $R'+4R = 1+t+t^2$ com solução $R = At^2+Bt+C$, donde segue $R' + 4R = (2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = 1 + t + t^2$ e portanto $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$ e $C = \frac{7}{32}$. Logo, escolhendo
$$Q = \int R(t)\, dt = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32},$$
a solução geral da equação dada é
$$x_g(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + \Big(\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}\Big)\clubsuit$$

(E5) Resolva a equação
$$\ddot{x} + 4x = t^2 \sin 2t \ .$$

Solução. Notemos que $t^2 \sin 2t = \text{Im}(t^2 e^{2it})$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, com raízes $\lambda = \pm 2i$. A solução geral real da equação homogênea associada é

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \,, \quad c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Procuremos uma solução complexa particular na forma $z_p(t) = Q(t)e^{2it}$, com Q um polinômio, da edo complexa

$$\ddot{z} + 4z = t^2 e^{2it}.$$

Pelo Teorema 4 temos

$$Q'' + p'(2i)Q' + p(2i)Q = t^2.$$

Como $p(2i) = 0$ e $p'(2i) = 4i$, com a substituição $R = Q'$ obtemos

$$R' + 4iR = t^2.$$

Donde, supondo $R = At^2 + Bt + C$ temos

$$R' = 2At + B \ \text{ e } \ R' + 4iR = (2At + B) + 4i(At^2 + Bt + C) = t^2.$$

Assim, temos $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{i}{32}$ e $Q' = R(t) = -\frac{i}{4}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{i}{32}$ e

$$\text{escolhemos} \ \ Q(t) = -\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i.$$

Logo, a solução particular complexa é

$$z_p(t) = \Big(-\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i \Big)(\cos 2t + i \sin 2t) \ .$$

Uma solução particular real ao problema dado é

$$x_p(t) = \text{Im}(z_p)(t) = -\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} \ .$$

A solução geral (real) da edo dada é

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \Big[-\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} \Big] \,, \text{ com } c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R} \clubsuit$$

5. Introdução à Equação Homogênea.

Introduzamos algumas notações e façamos algumas observações a serem utilizadas nas demonstrações dos próximos resultados,

Sejam $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ coeficientes reais, com $a_n \neq 0$. Estamos interessados em resolver a equação homogênea

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Comentário. Se $x = x(t)$ é uma solução de tal equação homogêna então $x = x(t)$ é infinitamente derivável.
Verificação.

De fato, a derivada $x^{(n)}$ existe e satisfaz

$$x^{(n)} = -\frac{1}{a_n}\Big(a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x\Big).$$

O lado direito desta equação é uma combinação linear de funções deriváveis. Portanto, a função $x^{(n)}$ é derivável e encontramos

$$x^{(n+1)} = -\frac{1}{a_n}\Big(a_{n-1}x^{(n)} + \cdots + a_1 x^{(2)} + a_0 x'\Big).$$

Iterando tal argumento concluímos que x é de classe C^∞♣

Assim, para resolver $a_n x^{(n)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$ basta considerar o operador derivação

$$\boxed{D = \tfrac{d}{dt} : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}).}$$

A seguir, consideremos o operador diferencial linear de ordem n e com coeficientes constantes e reais

$$P(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 I,$$

onde $I : C^\infty(\mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R})$ é o operador identidade, e seu polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra encontramos a fatoração

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são as raízes (características) do polinômio $p(\lambda)$ e de multiplicidades algébricas $m_1, \ldots, m_k$, respectivamente.

Observemos que vale fórmula

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

para todo número λ e para toda função f em $C^\infty(\mathbb{R})$. Dita de outra forma,

$$\text{o operador derivação } D = \frac{d}{dt} \text{ comuta com o operador } \lambda I.$$

Destaque-se que λ pode ser um número complexo e que f pode ser uma função a valores complexos. Isto é, podemos supor que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ onde

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ com } g \text{ infinitamente derivável}\}.$$

Dependendo do contexto, a notação $C^\infty(\mathbb{R})$ indica o espaço vetorial

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ com } g \text{ infinitamente derivável}\}$$

ou o espaço $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

É trivial verificar que comutam quaisquer dois operadores da forma

$$D - rI \ \text{ e } \ D - sI, \text{ onde } r \text{ e } s \text{ são números.}$$

Lema 5 (Fatoração do operador $P(D)$). *Mantenhamos a notação acima. Vale a fatoração*

$$P(D) = a_n(D - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k I)^{m_k} = a_n \prod_{j=1}^{k} (D - \lambda_j I)^{m_j}.$$

Prova. Segue dos comentários acima♣

Exercício. *Mantenhamos a notação acima. Consideremos a edo homogênea*

$$P(D)x(t) = a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

Se r é raiz de multiplicidade algébrica m de $p(\lambda) = 0$, então as m funções

$$e^{rt}, te^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}$$

são soluções da edo homogênea.

Solução. Vejamos duas provas.

- Primeira prova. Temos $p(r) = p'(r) = \cdots = p^{(m-1)}(r) = 0$ e

  $$D^k(t^j) = 0 \text{ se } k > j.$$

  Assim, ao computarmos

  $$P(D)(t^j e^{rt}), \text{ para } j = 0, \ldots, m-1,$$

  pela fórmula dada pelo Teorema 3 encontramos

  $$P(D)(t^j e^{rt}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k(r)}{k!} D^k(t^j) \; + \; \sum_{k=m}^{n} \frac{p^k(r)}{k!} D^k(t^j) = 0 + 0.$$

- Segunda prova. Seja $Q = Q(t)$ infinitamente derivável. É trivial ver que

  $$(D - rI)(Qe^{rt}) = Q'e^{rt}.$$

  Donde segue

  $$(D - rI)^m(Qe^{rt}) = Q^{(m)}e^{rt}.$$

  Temos então

  $$(D - rI)^m(t^j e^{rt}) = 0, \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

  Por fim, notemos que vale a fatoração $P(D) = Q(D)(D - rI)^m$, com $Q(t)$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes♣

Conclusão. Dada uma edo com coeficientes constantes e de ordem n, determinando suas raízes características e suas respectivas multiplicidades algébricas encontramos n soluções da edo homogênea.

6. Base de Soluções para a Equação Homogênea

Seja $Q = Q(t)$ uma função na variável real t e a valores reais ou complexos.

Observação: $Q^{(m)} = 0$ **se e só se** Q **é um polinômio com grau**$(Q) \leq m-1$**.**

Prova.

◇ Escrevendo $Q = Q_1 + iQ_2$, com $Q_1 = \mathrm{Re}(Q)$ e $Q_2 = \mathrm{Im}(Q)$, temos

$$Q^{(m)} = Q_1^{(m)} + iQ_2^{(m)}.$$

Logo, basta provar a observação para uma função Q a valores reais.

($\Leftarrow$) É claro que se Q é um polinômio de grau$(Q) \leq m-1$, então $Q^{(m)} = 0$.

($\Rightarrow$) Provemos por indução em m.

Caso $m = 1$. Se $Q' = 0$, o TVM (teorema do valor médio) mostra Q constante (cheque).

Supondo a afirmação válida para m, provemo-la para $m+1$. Seja Q tal que

$$0 = Q^{(m+1)} = [Q']^{(m)}.$$

Por hipótese de indução existem constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ tais que

$$Q' = c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1}.$$

Logo,

$$\Big(Q - c_1 t - \frac{c_2}{2}t^2 - \cdots - \frac{c_m}{m}t^m\Big)' = 0.$$

Então, pelo caso $m = 1$ obtemos

$$Q - c_1 t - \frac{c_2}{2}t^2 - \cdots - \frac{c_m}{m}t^m = c_0, \text{ para algum } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Donde segue

$$Q = c_0 + c_1 t - \frac{c_2}{2}t^2 + \cdots + \frac{c_m}{m}t^m \clubsuit$$

Lema 6. *Sejam $m \in \mathbb{N}^*$ e λ em $\mathbb{C}$. O espaço (vetorial) das soluções de*

$$(D - \lambda I)^m z(t) = 0$$

é o conjunto das combinações lineares complexas das funções $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$.

Provas.

- ◇ Podemos supor que $z = z(t)$ tem a forma $z(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ com $Q \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- ◇ Primeira prova. Temos $(D - \lambda I)z = (D - \lambda I)(Qe^{\lambda t}) = Q'e^{\lambda t}$. Logo,

$$0 = (D - \lambda I)^m (Qe^{\lambda t}) = Q^{(m)}e^{\lambda t} \Longleftrightarrow Q^{(m)} = 0.$$

  Assim, a função $z = z(t)$ é uma solução da edo desejada se e somente se temos $z(t) = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1}t^{m-1})e^{\lambda t}$, com $c_0, \ldots, c_{m-1}$ em $\mathbb{C}$.

- ◇ Segunda Prova. Seja $p(\xi) = (\xi - \lambda)^m$ o polinômio característico de $(D - \lambda I)^m$. Pelo Teorema 3, uma função $Q(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfaz

$$(D - \lambda I)^m \left[Q(t)e^{\lambda t}\right] = 0 = 0e^{\lambda t} \tag{6.1}$$

  se e somente se

$$\frac{p^{(m)}(\lambda)}{m!}Q^{(m)} + \cdots + \frac{p^{(0)}(\lambda)}{0!}Q^{(0)} = 0.$$

  É claro que

$$p^{(0)}(\lambda) = \cdots = p^{(m-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(m)}(\lambda) = m!.$$

  Logo, $Q(t)$ é solução de (6.1) se e somente se

$$Q^{(m)} = 0.$$

  Portanto,

$$z(t) = Q(t)e^{\lambda t}$$

  é solução de (6.1) se e só se $Q(t)$ é um polinômio de grau no máximo $m-1$ ♣

Convenção. O grau do polinômio nulo é $-\infty$.

Teorema 7 (Base de Soluções Complexas). *Consideremos a edol homogênea de coeficientes constantes e reais,*

(7.1) $$P(D)x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2x^{(2)} + a_1x^{(1)} + a_0x^{(0)} = 0.$$

Seja $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ *seu polinômio característico, com raízes distintas* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *de respectivas multiplicidades* $m_1, \ldots, m_k$*. Vale o que segue.*

(a) É linearmente independente, sobre $\mathbb{C}$*, o conjunto*

$$\left\{t^l e^{\lambda_j t} : \text{ onde } 1 \leq j \leq k \ \text{ e } \ 0 \leq l \leq m_j - 1\right\}.$$

(b) Uma função $z = z(t)$ *é solução complexa da edo dada se e somente se temos*

$$z(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + p_k(t)e^{\lambda_k t},$$

com cada $p_j(t)$ *um polinômio [coeficientes em* $\mathbb{C}$*] de* grau$(p_j) \leq m_j - 1$.

(c) O conjunto em (a) é uma base de soluções complexas da edo dada.

Prova.

(a) Basta mostrarmos que dados N *números complexos distintos* $w_1, \ldots, w_N$ *e* N *polinômios* $P_1(t), \ldots, P_N(t)$ *com coeficientes complexos, tais que*

$$P_1(t)e^{w_1 t} \ + \ \cdots \ + \ P_N(t)e^{w_N t} = 0, \text{ para todo } t,$$

então os polinômios $P_1, \ldots, P_N$ *são nulos.*

O caso $N = 1$ *é trivial. Fixemos* $N \geq 2$*. Mostremos que* P_1 *é nulo.*

Seja M *em* $\mathbb{N}$ *tal que* $M > \max\{\text{grau}(P_2), \ldots, \text{grau}(P_N)\}$*. Definamos*

$$S(D) = (D - w_2 I)^M \cdots (D - w_N I)^M.$$

Seja $s(\lambda)$ *o polinômio característico de* $S(D)$ *e* $\sigma = \text{grau}(s)$*.*

Por hipótese e pelo Lema 6 temos, para todo t *na reta,*

$$0 = S(D)\left[P_1(t)e^{w_1 t} + \cdots + P_N(t)e^{w_N t}\right] = S(D)\left[P_1(t)e^{w_1 t}\right].$$

Exprimindo $S(D)[P_1(t)e^{w_1 t}]$ *pela fórmula no Teorema 3, encontramos*

$$0 = \frac{s^{(\sigma)}(w_1)}{\sigma!}P_1^{(\sigma)}(t) + \cdots + \frac{s'(w_1)}{1!}P_1'(t) + \frac{s(w_1)}{0!}P_1(t).$$

Como $s(w_1) \neq 0$*, o polinômio* $P_1(t)$ *é nulo. Analogamente para* $P_2, \ldots, P_N$*.*

(b) *Mostremos tal afirmação por indução em n, a ordem da edol considerada.*

O caso $n = 1$ segue do Lema 6.

Suponhamos (b) verdadeira se a ordem da edol é menor ou igual a $n - 1$.

Provemos (b) no caso em que a edol tem ordem n. Mantenhamos a notação.

Pelo Lema 5 e pelo Lema 6 vemos que $z(t)$ satisfaz

$$P(D)z(t) = (D - \lambda_1 I)^{m_1} \left[\prod_{j \neq 1} (D - \lambda_j I)^{m_j} z(t) \right] = 0$$

se e somente se $z(t)$ satisfaz a edo

$$\prod_{j=2}^{k} (D - \lambda_j I)^{m_j} z(t) = p_1(t) e^{\lambda_1 t}, \tag{7.2}$$

com p_1 um polinômio (arbitrário, coeficientes em $\mathbb{C}$] e grau$(p_1) \leq m_1 - 1$.

Por hipótese de indução, a solução geral da edo homogênea associada a (7.2) é

$$z_h(t) = p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + p_k(t)e^{\lambda_k t},$$

com p_j um polinômio [coeficientes em $\mathbb{C}$] e grau$(p_j) \leq m_j - 1$ se $j = 2, \ldots, k$.

Observemos que o número λ_1 não é um zero do polinômio característico $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ associado à edo (7.2).

Pelo Teorema 4(c), existe uma solução particular $z_{\text{part}}(t)$ de (7.2), na forma

$$z_{\text{part}}(t) = q_1(t)e^{\lambda_1 t},$$

com $q_1(t)$ um polinômio de coeficientes em $\mathbb{C}$ e grau$(q_1) =$ grau$(p_1) \leq m_1 - 1$.

Como é bem sabido, a solução geral de (7.2) é então da forma

$$\begin{aligned} z(t) &= z_{\text{part}}(t) + z_h(t) \\ &= q_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + p_k(t)e^{\lambda_k t}. \end{aligned}$$

(c) *Imediato de (a) e (b)*♣

Com notação e as hipóteses do Teorema 7, temos os resultados que seguem.

Corolário 8. *Se as k raízes características $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são todas reais, então o espaço vetorial das soluções reais da equação (7.1) tem por base de soluções (reais)*

$$\{\ t^l e^{\lambda_j t} :\ 1 \leq j \leq k \ \ \text{e} \ \ 0 \leq l \leq m_j - 1\}.$$

Prova.

Basta ver que a parte real (e a imaginária) das soluções complexas são soluções reais da edol homogênea (7.1) e que como o conjunto no enunciado é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$ então ele também o é sobre $\mathbb{R}$ ♣

Lema 9. *Seja $\lambda = \alpha + i\beta$, onde α e β pertencem a $\mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, os espaços vetoriais complexos gerados pelos conjuntos de funções*

$$\{t^j e^{\lambda t}, t^j e^{\overline{\lambda} t}\} \ \ \text{e} \ \ \{t^j e^{\alpha t} \cos \beta t\, , t^j e^{\alpha t} \text{sen} \beta t\}$$

são iguais.

Prova.

Basta notar que

$$\begin{cases} t^j e^{\lambda t} &= t^j e^{\alpha t} \cos \beta t + i t^j e^{\alpha t} \text{sen} \beta t\, , \\ \\ t^j e^{\overline{\lambda} t} &= t^j e^{\alpha t} \cos \beta t - i t^j e^{\alpha t} \text{sen} \beta t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} t^j e^{\alpha t} \cos \beta t &= \frac{1}{2} t^j e^{\lambda t} + \frac{1}{2} t^j e^{\overline{\lambda} t} \\ \\ t^j e^{\alpha t} \text{sen} \beta t &= \frac{1}{2i} t^j e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} t^j e^{\overline{\lambda} t} \end{cases} ♣$$

Teorema 10 (Base de Soluções Reais). *Suponhamos que*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\} \quad e \quad \{\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_s, \overline{\mu_s}\}$$

sejam, respectivamente, o conjunto das r (distintas) raízes reais e o conjunto das $2s$ (distintas) raízes complexas mass não reais, do polinômio característico da equação diferencial linear e homogênea (7.1). Seja m_j a multiplicidade da raiz real λ_j, para $j = 1, \ldots, r$, e seja n_k a multiplicidade da raiz complexa $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, para $k = 1, \ldots, s$. Então, uma base do espaço das soluções reais *da equação diferencial (7.1) é dada por*

$$\Big\{t^l e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq r \text{ e } 0 \leq l \leq m_j - 1\Big\} \text{ reunido com}$$

$$\bigcup \Big\{t^l e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t\,,\ t^l e^{\alpha_k t} \mathrm{sen}\, \beta_k t : 1 \leq k \leq s \text{ e } 0 \leq l \leq n_k - 1\Big\}.$$

Prova.

◇ Seja $\mathcal{B}$ a reunião dos conjuntos de funções no enunciado.

◇ Se $s = 0$ (toda raiz é real), basta utilizar o Corolário 8.

◇ Suponhamos $s \geq 1$.

Pelo Teorema 7 (c) [*Base de soluções complexas*] e pelo Lema 9, o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base do espaço das soluções complexas da edol homogênea (7.1). Logo, $\mathcal{B}$ é também linearmente independente sobre $\mathbb{R}$.

Pelo parágrafo acima, toda solução real é uma combinação linear finita e com coeficientes complexos de elementos de $\mathcal{B}$. Logo, toda solução real é parte real de uma solução complexa e em consequência é uma combinação linear com coeficientes reais de funções pertencentes ao conjunto $\mathcal{B}$ ♣

7. EDOLCC, Sistema Associado, Matriz Companheira e Polinômios Característicos

Consideremos a equação diferencial linear e com coeficientes reais e constantes (edolcc) de ordem n e homogênea,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Escrevamos

$$\begin{cases} y_1 &= x \\ y_2 &= x' \\ & \vdots \\ y_{n-1} &= x^{(n-2)} \\ y_n &= x^{(n-1)} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad S : \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0y_1 - a_1y_2 - \cdots - a_{n-1}y_n. \end{cases}$$

[No caso $n = 1$ temos $y_1 = x$ e $S : \{y_1' = -a_0y_1.$]

Então, encontrar uma solução x da edolcc acima é equivalente a encontrar uma solução $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ do sistema S acima.

Escrevamos também

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Reescrevamos o sistema S como

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Matriz companheira. A matriz quadrada de ordem n acima é a matriz companheira do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Denotemos tal matriz por A.

Podemos então reescrever o sistema de equações diferenciais S como

$$\boxed{Y' = AY.}$$

Proposição 11. São iguais o polinômio característico da edolcc considerada e o polinômio característico da matriz A companheira. Isto é,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Prova.

◇ Mostremos por indução em $n \geq 1$. Notemos que

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

◇ O caso $n = 1$. Temos a edolcc $x' + a_0 x = 0$, com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda + a_0$. A matriz companheira é $A = (-a_0)$, o polinômio característico associado a tal matriz é $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda + a_0 = p(\lambda)$.

◇ Supondo a afirmação válida para $n - 1$, mostremo-la para n.

Seja A de ordem n. Computemos $\det(\lambda I - A)$ pela primeira coluna. Devido à hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} \det|\lambda I - A| &= \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda^0) + a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= p(\lambda) \clubsuit \end{aligned}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Agradecimentos. Agradeço a Leandro Cândido pelos comentários e Luciana Bonatto pelas indagações e a ambos pelo estímulo.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`