# DETERMINANTES DE MATRIZES $3 \times 3$

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira (IMEUSP)

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

2018

## Introdução.



## Desenvolvimento por Laplace.



## Caracterização de Determinantes $3 \times 3$.

Dados $x_i, y_i$ e $z_i$ números reais, para $i = 1, 2, 3$, seja a matriz dada por

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Abaixo, assumimos as propriedades básicas para determinantes de matrizes $2 \times 2$.

**Definição.** O **determinante** de $M$ é

$$\det M = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

**Propriedade 1 (Invariância do determinante, por transposição).** *Seja $M^T$ a matriz transposta de $M$. Então,*

$$\det M^T = \det M.$$

**Prova.**

Temos

$$\begin{aligned}
\det M^T &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= \det M \clubsuit
\end{aligned}$$

**Propriedade 2 (Alternância).** *Ao trocarmos duas linhas consecutivas de $M$, uma pela outra, o determinante troca de sinal. Ao trocarmos duas colunas consecutivas de $M$, uma pela outra, o determinante troca de sinal.*

**Prova.**

- Pela propriedade (1), basta mostrar a afirmação sobre linhas consecutivas.
- Troquemos a primeira linha pela segunda linha e a segunda pela primeira. Obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} &= y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= y_1(x_2z_3 - x_3z_2) - y_2(x_1z_3 - x_3z_1) + y_3(x_1z_2 - x_2z_1) \\
&= x_1(y_3z_2 - y_2z_3) - x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_2z_1 - y_1z_2) \\
&= -\big[\, x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \,\big] \\
&= -\left\{ x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right\} \\
&= - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= -\det M.
\end{aligned}$$

- Trocando a segunda linha pela terceira linha e vice-versa, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} &= x_1 \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= -x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= -\det M \clubsuit
\end{aligned}$$

**Propriedade 3.** *Se uma linha de $M$ é nula ou uma coluna de $M$ é nula, então*

$$\det M = 0.$$

**Prova.**

Segue da definição de determinante e da Propriedade (2). Cheque♣

Também denotamos uma arbitrária matriz $3 \times 3$ de números reais por

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ com } a, b, c, d, e, g, h \text{ e } i \text{ números reais.}$$

**Propriedade 4.** *Se duas linhas de $M$ são iguais, então* $\det M = 0$. *Se duas colunas de $M$ são iguais, então* $\det M = 0$.

**Prova.**

- ◇ Pelas Propriedades (1) e (2), basta supormos que a primeira linha e a segunda linha são iguais.

- ◇ Então, pela propriedade (2) segue

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} \\ &= g \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + 0 \\ &= 0 \clubsuit \end{aligned}$$

**Propriedade 5 (Combinação linear de linhas/colunas e o determinante).** *Ao adicionarmos um múltiplo de uma linha a uma outra linha, o determinante não muda. Analogamente, ao adicionarmos um múltiplo de uma coluna a uma outra coluna, o determinante não muda.*

**Prova.** Seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Devido à propriedade $\det M^T = \det M$, basta considerarmos as linhas.

- Caso 1. Adicionando à primeira linha um múltiplo da segunda linha. Pela definição de determinante e pela Propriedade (4) encontramos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+\lambda d & b+\lambda e & c+\lambda f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= (a+\lambda d)\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - (b+\lambda e)\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \\
&\quad + (c+\lambda f)\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det M + 0 = \det M
\end{aligned}$$

- Caso 2. Adicionando à primeira linha um múltiplo da terceira linha. Utilizando, nesta ordem, a Propriedade (2), o primeiro caso mostrado acima e novamente a Propriedade (2) encontramos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+\lambda g & b+\lambda h & c+\lambda i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a+\lambda g & b+\lambda h & c+\lambda i \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det(M).
\end{aligned}$$

$\diamond$ Caso 3. Adicionando à segunda linha um múltiplo da primeira linha. Utilizando a Propriedade (2) e os dois casos anteriores, segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+\lambda a & e+\lambda b & f+\lambda c \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} d+\lambda a & e+\lambda b & f+\lambda c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det M.
\end{aligned}$$

$\diamond$ Caso 4. Adicionando à segunda linha um múltiplo da terceira linha. Utilizando a Propriedade (2) e o Caso 2, segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+\lambda g & e+\lambda h & f+\lambda i \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} d+\lambda g & e+\lambda h & f+\lambda i \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det M \clubsuit
\end{aligned}$$

◇ Caso 5. Adicionando à terceira linha um múltiplo da primeira linha. Utilizando a Propriedade (2) e o Caso 3, segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+\lambda a & h+\lambda b & i+\lambda c \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g+\lambda a & h+\lambda b & i+\lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det M.
\end{aligned}$$

◇ Caso 6. Adicionando à terceira linha um múltiplo da segunda linha. Utilizando a Propriedade (2) e o Caso 4, segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+\lambda d & h+\lambda e & i+\lambda f \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g+\lambda d & h+\lambda e & i+\lambda f \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \det M \clubsuit
\end{aligned}$$

**Propriedade 6 (Linearidade nas linhas e colunas, com respeito à adição).** *Seja $M$ uma matriz real de ordem $3 \times 3$, com linhas $L_1$, $L_2$ e $L_3$. Ao adicionarmos a uma linha de $M$ uma linha $L$ arbitrária, mantendo as outras duas linhas, o determinante da matriz então obtida é soma do determinante de $M$ com o determinante da matriz $N$ que coincide com $M$ quanto as duas linhas mantidas da matriz $M$ e cuja outra linha é $L$. Vale uma propriedade análoga para as colunas.*

**Prova.**

- ◇ Escrevamos

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}).$$

- ◇ Primeiro caso, o efeito na primeira linha. Utilizando a definição de determinante encontramos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= (a+\alpha)\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - (b+\beta)\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \\
&\quad +(c+\gamma)\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= \alpha\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A prova do primeiro caso está completa.

$\diamond$ Segundo caso, o efeito na segunda linha. Temos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+\alpha & e+\beta & f+\gamma \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} d+\alpha & e+\beta & f+\gamma \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ g & h & i \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A prova do segundo caso está completa.

$\diamond$ Terceiro caso, o efeito na terceira linha. Temos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+\alpha & h+\beta & i+\gamma \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} g+\alpha & h+\beta & i+\gamma \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A prova do terceiro caso está completa.

A prova da Propriedade 6 está completa$\clubsuit$

**Propriedade 7 (Linearidade do determinante nas linhas e colunas, com respeito à multiplicação por escalar).**

- *Ao multiplicarmos uma linha de $M$ por uma constante real $\lambda$, o determinante da matriz obtida é*
$$\lambda \det M.$$

- *Analogamente, ao multiplicarmos uma coluna por $\lambda$, o determinante da matriz obtida é $\lambda \det M$. Em particular,*
$$\det(\lambda M) = \lambda^3 \det M.$$

**Prova.**

◇ Os determinantes de $M$ e de sua transposta $M^T$ são iguais e portanto basta nos determos nas linhas de $M$.

◇ Primeiro caso, multiplicando a primeira linha por $\lambda$. Segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \lambda a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \lambda b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \lambda c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= \lambda \left[ a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \right] \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \lambda \det M.
\end{aligned}$$

A prova do primeiro caso está completa.

◇ Segundo caso, multiplicando a segunda linha por $\lambda$. Segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \lambda \det M.
\end{aligned}$$

A prova do segundo caso está completa.

◇ Terceiro caso, multiplicando a terceira linha por $\lambda$. Segue

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda g & \lambda h & \lambda i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda g & \lambda h & \lambda i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & d \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a & b & d \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= \lambda \det M.
\end{aligned}$$

A prova do terceiro caso está completa.

A prova da Propriedade 7 está completa♣

**Propriedade 7.** *Consideremos duas matrizes reais*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

## DESENVOLVIMENTO POR LAPLACE.

### Introdução

*Consideremos a matriz* $3 \times 3$ *de sinais.*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

*Escrevendo uma arbitrária matriz real* $A$*, de tamanho* $3 \times 3$*, na forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*obtemos a identidade*

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix}.$$

*Utilizando a notação*

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$$

*ou, brevemente,* $A = (a_{ij})$ *encontramos a identidade*

$$\mathcal{S} = (s_{ij}), \text{ com } s_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ para cada } 1 \leq i \leq 3 \text{ e } 1 \leq j \leq 3.$$

*Notemos também que o determinante de* $A$ *pode ser escrito como*

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

*Esta expressão pode ser vista como o determinante desenvolvido pela primeira linha. Notemos que para o cômputo deste determinante atribuímos à posição* $(1,1)$ *o sinal* $+$*, à posição* $(1,2)$ *o sinal* $-$ *e à posição* $(1,3)$ *o sinal* $+$*. Ainda mais, multiplicamos* $+a_{11}$ *pelo determinante* $2 \times 2$ *obtido pela eliminação da primeira linha e da primeira coluna. Multiplicamos* $-a_{12}$ *pelo determinante* $2 \times 2$ *obtido pela eliminação da primeira linha e da segunda coluna. Multiplicamos* $+a_{13}$ *pelo determinante* $2 \times 2$ *obtido pela eliminação da primeira linha e da terceira coluna. Para finalizar, somamos os resultados obtidos por estas três multiplicações.*

**Desenvolvimento por Linhas**

*Mostremos, no que segue, que podemos também desenvolver o determinante pelas demais linhas de uma matriz $3 \times 3$ e que obtemos regras similares às obtidas para o desenvolvimento pela primeira linha.*

*Consideremos a matriz real*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

*Por definição, o determinante é dado por*

$$\det M = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

*Isto é,*

$$\boxed{\det M = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.}$$

*Observemos que então temos (por conveniência, repetimos o determinante desenvolvido pela primeira linha)*

$$\begin{aligned} \det M &= +a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= -d(bi - ch) + e(ai - cg) + f((bg - ah) \\ &= +g(bf - ce) - h(af - cd) + i(ae - bd). \end{aligned}$$

*Estas são as fórmulas para o desenvolvimento do determinante para a primeira, a segunda e a terceira linhas, ordenadamente. Escrevendo as três identidades acima utilizando determinantes de ordem 2 encontramos os* **desenvolvimentos de Laplace pela primeira, segunda e terceira linhas** *(respectivamente)*

$$\begin{aligned} \det M &= +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= +g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Desenvolvimento por Colunas**

*Analogamente, para desenvolver*

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

*segundo suas três colunas escrevemos a fórmula*

$$\boxed{\det M = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}$$

*nas seguintes três maneiras, respectivamente correspondentes aos desenvolvimentos pela primeira, segunda e terceira colunas,*

$$\begin{aligned} \det M &= +a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce) \\ &= -b(di - fg) + e(ai - cg) - h(af - cd) \\ &= +c(dh - eg) - f(ah - bg) + i(ae - bd). \end{aligned}$$

*Apresentando as três identidades acima utilizando determinantes de ordem 2 encontramos os* **desenvolvimentos de Laplace pela primeira, segunda e terceira colunas** *(respectivamente)*

$$\begin{aligned} \det M &= +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= +c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

*Observemos que, nas três equações acima, o sinal à frente de um coeficiente* $a, b, c, d, e, f, g, h$ *e* $i$ *é precisamente o sinal na matriz de sinais* $\mathcal{S}$ *que corresponde à posição do coeficiente* $a, b, c, d, e, f, g, h$ *e* $i$ *na matriz* $M$.

## CARACTERIZAÇÃO DE DETERMINANTES $3 \times 3$.

### Introdução.

*Veremos nesta seção que a função determinante é caracterizada por um pequeno conjunto de propriedades (quatro propriedades).*

*Seja* $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *o conjunto das matrizes* $3 \times 3$ *de números reais e seja* $M$ *uma matriz* $3 \times 3$ *de números reais.*

*As colunas de* $M$ *são aqui indicadas por* $M_1$ *(primeira coluna),* $M_2$ *(segunda coluna) e* $M_3$ *(terceira coluna). Desta forma, podemos escrever*

$$\det(M) = \det(M_1, M_2, M_3)$$

*e a função determinante*

$$\det : M_{3x\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

*pode ser apresentada na forma*

$$\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Isto é, dada uma matriz*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

*temos as colunas*

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

*e então*

$$\begin{aligned} \det M &= \det(M_1, M_2, M_3) \\ &= \det\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

**Comentário (Linearidade nas colunas).** *Sejam $A$, $A_1$, $A_2$, $B$, $B_1$, $B_2$, $C$, $C_1$ e $C_2$ colunas, de tamanho $3 \times 1$, de números reais. Vimos na Propriedade 6, chamada* linearidade do determinante nas linhas e colunas, quanto à adição, *que a função determinante satisfaz*

$$\begin{cases} \det(A_1 + A_2, B, C) = \det(A_1, B, C) + \det(A_2, B, C), \\ \\ \det(A, B_1 + B_2, C) = \det(A, B_1, C) + \det(A, B_2, C), \\ \\ \det(A, B, C_1 + C_2) = \det(A, B, C_1) + \det(A, B, C_2). \end{cases}$$

*Vimos na Propriedade 7, chamada* linearidade do determinante nas linhas e colunas, quanto à multiplicação por escalar, *que dado $\lambda \in \mathbb{R}$ a função determinante satisfaz*

$$\begin{cases} \det(\lambda A, B, C) = \lambda \det(A, B, C), \\ \\ \det(A, \lambda B, C) = \lambda \det(A, B, C), \\ \\ \det(A, B, \lambda C) = \lambda \det(A, B, C). \end{cases}$$

*Utilizando a propriedade $\det M^T = \det M$, é imediato que vale um comentário análogo para as linhas da matriz $M$.*

**Definição (Linearidade do determinante).** *Englobando as duas propriedades (Propriedade 6, linearidade quanto a adição de linhas e quanto a adição de colunas, e Propriedade 7, linearidade quanto à multiplicação de linhas por escalar e quanto à multiplicação de colunas por escalar), dizemos que a função determinante é* **linear nas colunas** *e* **linear nas linhas**.

*Segue então o resultado central desta seção.*

## Teorema de Caracterização

**Teorema (Caracterização).** *Seja $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de tamanho $3\times 3$. A função determinante*

$$\det : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

*é a única função $D : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades.*

- *Linearidade nas colunas.*
- *Anula-se para toda matriz com duas colunas iguais.*
- *Troca de sinal ao permutarmos duas colunas consecutivas de uma matriz.*
- *Assume o valor 1 na matriz identidade.*

**Prova.**

◇ *Já vimos que a função determinante possui as quatro propriedades acima.*

◇ *Mostremos que se $D : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as quatro propriedades elencadas, então $D$ é a função determinante. Façamos duas provas.*

*Computemos $D(M)$ utilizando tão somente as quatro regras (propriedades) acima. Identifiquemos a matriz por suas colunas, com a notação*

$$M_{3\times3}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

**Primeira Prova.**

*Escrevamos*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

*Sejam $M_1$, $M_2$ e $M_3$ a primeira, a segunda e a terceira colunas de $M$, respectivamente. Sejam*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Então temos*

$$\begin{aligned} D(M) &= D(M_1, M_2, M_3) \\ &= D(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) \\ &= D\left(\sum_{i=1}^{3} x_ie_i, \sum_{j=1}^{3} y_je_j, \sum_{k=1}^{3} z_ke_k\right). \end{aligned}$$

*Segue então (omitindo a variação dos índices, mas explicitando os índices)*

$$\begin{aligned} D(M) &= \sum_i D\left(x_ie_i, \sum_j y_je_j, \sum_k z_ke_k\right) \\ &= \sum_i x_i D\left(e_i, \sum_j y_je_j, \sum_k z_ke_k\right) \\ &= \sum_i x_i \sum_j D\left(e_i, y_je_j, \sum_k z_ke_k\right) \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j D\left(e_i, e_j, \sum_k z_ke_k\right) \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j \sum_k D\left(e_i, e_j, z_ke_k\right) \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j \sum_k z_k D\left(e_i, e_j, e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_iy_jz_k D\left(e_i, e_j, e_k\right). \end{aligned}$$

*Com a delicada* **notação de Einstein** *(isto é, interpretando como óbvio, omitimos no somatório o conjunto de índices subjacente à soma), escrevemos*

$$\boxed{D(M) = \sum x_iy_jz_k D\left(e_i, e_j, e_k\right).}$$

*Pela Propriedade 4 temos $D(e_i, e_j, e_k) = 0$ se $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$. Donde segue*

$$\begin{aligned} D(M) &= \sum_{i\neq j, i\neq k, j\neq k} x_iy_jz_k D\left(e_i, e_j, e_k\right) \\ &= x_1y_2z_3D(e_1, e_2, e_3) + x_1y_3z_2D(e_1, e_3, e_2) \\ &\quad + x_2y_1z_3D(e_2, e_1, e_3) + x_2y_3z_1D(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + x_3y_1z_2D(e_3, e_1, e_2) + x_3y_2z_1D(e_3, e_2, e_1). \end{aligned}$$

*A função* $D : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *troca de sinal ao permutarmos duas colunas consecutivas. Assim,*

$$\begin{aligned} D(M) &= x_1y_2z_3D(e_1,e_2,e_3) - x_1y_3z_2D(e_1,e_2,e_3) \\ &\quad - x_2y_1z_3D(e_1,e_2,e_3) + x_2y_3z_1D(e_1,e_2,e_3) \\ &\quad + x_3y_1z_2D(e_1,e_2,e_3) - x_3y_2z_1D(e_1,e_2,e_3). \end{aligned}$$

*Seja* $I$ *a matriz identidade* $3\times 3$*. A função* $D$ *possui a propriedade*

$$D(I) = D(e_1,e_2,e_3) = 1.$$

*Encontramos então*

$$\begin{aligned} D(M) &= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 \\ &\quad - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 \\ &\quad + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\ &= x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \det(M). \end{aligned}$$

*A primeira prova está completa.*

**Segunda prova.**

*Consideremos uma matriz real*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

*Computemos* $D(M)$ *utilizando tão somente as quatro regras (propriedades) acima. Empreguemos a notação*

$$D(M) = \|M\|.$$

*Então, pela linearidade (para a adição) na primeira coluna,*

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\|.$$

*Logo, continuando com a linearidade (para a adição) na segunda coluna,*

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{matrix} \right\| \\ &\quad + \left\| \begin{matrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\|. \end{aligned}$$

*A seguir, utilizamos a linearidade quanto ao produto escalar de uma coluna por um número real e novamente a linearidade aditiva para colunas.*

*Encontramos então*

$$
\begin{aligned}
\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix}
&= ab\begin{Vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} \\
&= ab\begin{Vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + ac\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + bc\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} \\
&= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix}
\end{aligned}
$$

*Donde então segue*

$$\begin{aligned}
\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} \\
&= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} \\
&\quad + de \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + gh \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 1 & 1 & i \end{Vmatrix}.
\end{aligned}$$

*Descartando as parcelas com colunas iguais (a quarta e a sexta parcelas) e expandindo por linearidade a quinta e a sexta parcelas, encontramos*

$$\begin{aligned}
\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{Vmatrix}.
\end{aligned}$$

*As quatro últimas parcelas (imediatamente acima) são nulas. Segue*

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix}.$$

*Desenvolvendo por linearidade cada uma das parcelas à direita em duas parcelas (e cada uma destas também em duas parcelas) encontramos*

$$
\begin{aligned}
\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix} \\
&= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & i \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & 0 \end{Vmatrix}.
\end{aligned}
$$

*Temos então 12 parcelas. Considerando a ordem de surgimento, as parcelas 1 e 4, assim como as parcelas 5 e 8 e também as parcelas 9 e 12, se anulam.*

*Chegamos então a*

$$\begin{aligned}\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} \\ &+ \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix} \\ &+ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{Vmatrix}.\end{aligned}$$

*O sinal muda ao permutarmos duas colunas consecutivas. Logo,*

$$\begin{aligned}\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & h \end{Vmatrix} \\ &- \begin{Vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{Vmatrix} \\ &+ \begin{Vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & h \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & g \end{Vmatrix}.\end{aligned}$$

*Utilizando a linearidade nas colunas temos*

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} = aei \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} - afh \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$-bdi \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} + bfg \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$+cdh \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} - ceg \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

*Por hipótese, temos* $D(I) = \|I\| = 1$ *com* $I$ *a matriz identidade. Segue então*

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

*Isto mostra que* $D(M) = \det M$. *A segunda prova está completa.*

*A prova do teorema está completa*♣

*Departamento de Matemática*
*Universidade de São Paulo*
*oliveira@ime.usp.br*
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`