Ano 2015

**COORDENADAS ESFÉRICAS ($n$-dimensionais)**

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

1. **Sistemas de coordenadas polar e esféricos** (os principais não lineares).

Em $\mathbb{R}^2$ temos as coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 < r < +\infty\,, \ 0 < \theta < 2\pi.$$

Em $\mathbb{R}^3$ temos as coordenadas esféricas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\,\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\,\sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

onde $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_1 < \pi$ e $0 < \theta_2 < 2\pi$.

Generalizemos tais coordenadas a $\mathbb{R}^n$, supondo $n$ suficientemente grande.

A primeira coordenada esférica é obtida projetando o vetor posição $\overrightarrow{x}$ sobre o eixo $Ox_1$, na direção do semi-espaço superior, utilizando o ângulo $\theta_1$, onde $0 < \theta_1 < \pi$, de $Ox_1$ a $\overrightarrow{x}$. Temos,

$$x_1 = |x|\cos\theta_1.$$

A projeção $\overrightarrow{v}$, de $\overrightarrow{x}$ sobre o hiperplano $x_1 = 0$, tem comprimento $|x|\sin\theta_1$ e projetando-a na direção e sobre o eixo $Ox_2$, utilizando o ângulo $\theta_2$, de $Ox_2$ a $\overrightarrow{v}$ e com $0 < \theta_2 < \pi$, , encontramos a segunda coordenada

$$x_2 = |x|\sin\theta_1\cos\theta_2.$$

A projeção $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{v}$ sobre o hiperplano $x_2 = 0$ tem comprimento $|x|\sin\theta_1 \sin\theta_2$ e projetando-a na direção do eixo $Ox_3$, usando o ângulo $\theta_3$, onde $0 < \theta_3 < \pi$, medido de $Ox_3$ a $\overrightarrow{w}$, encontramos a terceira coordenada

$$x_3 = |x|\sin\theta_1\ \sin\theta_2 \cos\theta_3.$$

Por indução temos

$$x_4 = |x|\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 cos\theta_4,$$

$$x_5 = |x|\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ \sin\theta_3\ \sin\theta_4 \cos\theta_5,\ \text{ etc.}$$

Este processo continua até

$$x_{n-2} = r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2}$$

quando conclui com, em analogia com as coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$,

$$x_{n-1} = r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-3}\ \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \quad \text{e}$$

$$x_n = r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-3}\ \sin\theta_{n-2}\ \sin\theta_{n-1},\ \text{ onde } 0 < \theta_{n-1} < 2\pi.$$

Temos então,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ . \\ . \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ . \\ . \\ r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\ r\ \sin\theta_1 .... \sin\theta_{n-2}\ \sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

onde, $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_j < \pi$ para $1 \leq j \leq n-2$ e, por último, $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$, para $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_j < \pi$ , $j = 1, 2$, e $0 < \theta_3 < 2\pi$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\,\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\,\sin\theta_3 \end{pmatrix}.$$

**Afirmação.** Se $n \geq 3$ então,

$$\det J\varphi \;=\; r^{n-1}\,\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2 .... \,\sin\theta_{n-2}.$$

**Prova.**

É fácil verificar a fórmula para $n = 3$. Suponhamos a fórmula válida para $n-1$ e provemos a validade para $n$.

A matriz jacobiana de $\varphi$ têm por $i$-ésima linha $\nabla\varphi_i$, o gradiente da i-ésima função coordenada $\varphi_i$ de $\varphi$ ou, equivalentemente, por $i$-ésima coluna a derivada de $\varphi$ em relação a sua $i$-ésima ordenada. Ainda, como $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta_j} = 0$ se $j > i$, a partir de duas posições acima da diagonal principal as entradas da matriz jacobiana são nulas. O jacobiano de $\varphi$ é então,

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} & . & . & . & -r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-1} & . & . & . & r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo-o pela primeira linha temos dois determinantes de ordem $n-1$.

Iniciando pela posição $(1, 1)$ temos $\cos\theta_1$ vezes um determinante de ordem $n-1$ cuja primeira coluna, oriunda da segunda coluna do determinante acima, têm o fator $r\cos\theta_1$ em cada entrada.

Para as demais colunas pomos $\sin\theta_1$ em evidência.

O primeiro determinante é então, $\cos\theta_1 r\cos\theta_1 \sin^{n-2}\theta_1$ multiplicado por

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -r\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ \sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} & . & . & . & . & -r\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1} & . & . & . & . & r\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix},$$

que é, por hipótese de indução,

$$\gamma = r^{n-2}\sin^{n-3}\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}.$$

Desenvolvendo $\det J\varphi$ a partir da posição $(1,2)$, temos o cofator

$$-(-r\sin\theta_1) = r\sin\theta_1$$

multiplicado por um determinante de ordem $n-1$ com todas as entradas múltiplas de $\sin\theta_1$. O segundo determinante é então, é fácil ver,

$$r\sin\theta_1 \sin^{n-1}\theta_1$$

multiplicado pelo mesmo determinante acima. Assim, o jacobiano de $\varphi$ é

$$\begin{aligned} r\cos^2\theta_1 \sin^{n-2}\theta_1\,\gamma + r\sin^n\theta_1\,\gamma &= r\sin^{n-2}\theta_1\gamma \\ &= r\sin^{n-2}\theta_1 r^{n-2}\sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} \\ &= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2} \clubsuit \end{aligned}$$

**Comentários.**

2. Utilizando coordenadas esféricas pode ser provada a (provavelmente) mais importante integral definida

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\,dx = 1.$$

[Vide https://www.ime.usp.br/ oliveira/MEDIDACAP2-2016.pdf – p. 85.]

3. Consideremos a função

$$\Phi(t) = \int_{\alpha}^{f(t)} F(x,t)\,dx, \text{ onde } t \in I = (a,b),$$

com $f$ derivável no intervalo $I$ e $F \in C^1(\mathbb{R} \times (a,b))$.

Utilizando a regra de Leibnitz para a derivação sob o sinal de integração obtemos a fórmula de derivação

$$\Phi'(t) = \int_{\alpha}^{f(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dx + F(f(t),t)f'(t)\ .$$

4. Seja $f$ contínua em $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Utilizando coordenadas esféricas e a fórmula de derivação enunciada acima pode ser provado que

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r(x)} f(y)dy = \int_{S_r(x)} f(\omega)d\omega\ .$$

*Departamento de Matemática*
*Universidade de São Paulo*
*oliveira@ime.usp.br*
`http:www.ime.usp.br/~oliveira`