EDP's ELÍPTICAS - MAT5812 - IMEUSP - 2017

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas baseiam-se em Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (2001) e, como material de apoio, em G. B. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed, John Wiley & Sons. Agradeço particularmente às notas de aula do curso sobre os mesmos tópicos e ministrado por J. C. D. Fernandes.

Capítulo 1

ESPAÇOS L^p e de HILBERT

Capítulo 2

PRODUTO DE CONVOLUÇÃO, APROXIMAÇÃO E REGULARIZAÇÃO

Capítulo 3

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Capítulo 4

SOLUÇÕES GENERALIZADAS E REGULARIDADE

4.1 Introdução

Seja Ω um aberto limitado, conexo e com $\partial\Omega$ de classe C^1.

Consideremos um operador diferencial linear (elíptico) da forma

$$Pu = P(x, \partial)u = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum_i b_i\partial_i u + cu,$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$ e b_i são funções mensuráveis em Ω. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é simétrica. Com a notação "$\cdot$" para produto interno em $\mathbb{R}^n$, escrevemos

$$b = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{e} \quad \sum_i b_i\partial_i u = b \cdot \nabla u.$$

Ainda mais, se u é de classe C^2 então $\partial_i\partial_j u = \partial_j\partial_i u$ e ainda

$$\sum_{i,j} a_{ij}\partial_i\partial_j u = \sum_i a_{ii}\partial_i^2 u + 2\sum_{i<j} a_{ij}\partial_i\partial_j u.$$

A seguir, mostramos (rememoramos) propriedades de $A = A(x)$. O teorema fundamental da álgebra garante que A tem ao menos um auto-valor complexo.

Representemos um vetor $z \in \mathbb{C}^n$ como uma matriz-coluna $z \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Seja $\overline{z}$ o conjugado de z, coordenada a coordenada. Dada uma matriz arbitrária M seja M^T sua **transposta**. Dados vetores z e w, ambos em $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, indiquemos o **produto interno complexo** $z \cdot w$ pelo produto matricial

$$z \cdot w = \overline{w}^T z.$$

Portanto temos

$$\|z\|^2 = \overline{z}^T z = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = \|\overline{z}\|^2 \text{ para todo } z^T = (z_1, \ldots, z_n).$$

Definição. Uma matriz simétrica e real $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é **definida positiva** se

$$v^T A v = Av \cdot v > 0, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}.$$

Ainda, A é **positiva (negativa) semi-definida** se $v^T A v \geq 0$ (≤ 0) para todo v.

Proposição. *Seja A uma matriz $n \times n$, simétrica e real.*

- *Os auto-valores de A são reais*
- *A matriz A é definida positiva se e somente se todos os seus auto-valores são estritamente positivos. Neste caso, se λ e Λ são, respectivamente, o menor e o maior auto-valores de A então temos*

$$0 < \lambda\|v\|^2 \leq v^T A v \leq \Lambda\|v\|^2, \text{ para todo } v \neq 0.$$

Prova.

◇ Seja α um auto-valor de A e $v \neq 0$ um auto-vetor, possivelmente complexos. Podemos supor $\|v\| = 1$. Notemos que

$$Av = \alpha v \quad \text{e} \quad A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\alpha v} = \overline{\alpha}\,\overline{v}.$$

Isto é, $\overline{\alpha}$ é auto-valor associado ao auto-vetor $\overline{v}$, com $\|\overline{v}\| = 1$. Segue

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha\,\overline{v}^T v = \overline{v}^T \alpha v = \overline{v}^T A v = (\overline{v}^T A v)^T \\ &= v^T A^T \overline{v} = v^T A \overline{v} = v^T\,\overline{\alpha}\,\overline{v} = \overline{\alpha} v^T \overline{v} \\ &= \overline{\alpha}. \end{aligned}$$

◇ Por hipótese, A é simétrica. Consideremos a função (**forma bilinear**)

$$B(v) = v^T A v, \text{ onde } v \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo *teorema do máximo de Weierstrass*, a restrição $B : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ assume um máximo em algum v_M e um mínimo em algum v_m, ambos em S^{n-1}.

◇ O gradiente $\nabla B(v) = 2Av$. Seja e_1 o primeiro vetor canônico. Segue

$$v^T A e_1 = (v^T A e_1)^T = e_1^T A^T v = e_1^T A v = Av \cdot e_1$$

é a primeira coordenada de Av. Por *quocientes de Newton* encontramos

$$\frac{(v+te_1)^T A(v+te_1) - v^T A v}{t} = v^T A e_1 + e_1^T A v + t e_1^T A e_1 \xrightarrow{t\to 0} 2(Av \cdot e_1).$$

Analogamente para as demais coordenadas. Logo, $\nabla B(v) = 2Av$.

◇ Por *multiplicadores de Lagrange*, ∇B é ortogonal a S^{n-1} em v_m e em v_M.

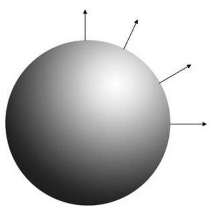

Figura 4.1: Em v_m e v_M (talvez vários), temos ∇B ortogonal a S^{n-1}.

Ainda por Lagrange, existem reais λ_m e λ_M satisfazendo

$$\nabla B(v_m) = 2\lambda_m v_m \qquad \text{e} \qquad \nabla B(v_M) = 2\lambda_M v_M.$$

Logo, $2Av_m = 2\lambda_m v_m$ e $2Av_M = 2\lambda_M v_M$. Isto é, λ_m e λ_M são auto-valores. Ainda mais, $B(v_m) = v_m^T A v_m = \lambda_m \|v_m\|^2 = \lambda_m$. Analogamente, $B(v_{_M}) = \lambda_M$.

◇ Seja α um auto-valor. Como usual, podemos supor $Av = \alpha v$ com $v \in S^{n-1}$. Segue $\alpha = v^T A v = B(v) \in B(S^{n-1})$. Concluímos então

$$B(S^{n-1}) = [\lambda_m, \lambda_M] = [\lambda, \Lambda].$$

◇ Dado $v \neq 0$, segue $\lambda \leq B(v/\|v\|) \leq \Lambda$. Tal desigualdade é equivalente a

$$\lambda \|v\|^2 \leq v^T A v \leq \Lambda \|v\|^2, \text{ se } v \neq 0.$$

◇ Se A é definida positiva, seja v_λ um auto-vetor unitário associado ao menor auto-valor λ. Segue $\lambda = v_\lambda^T A v_\lambda > 0$. Se todo auto-valor de A é maior que zero, então $B(S^{n-1}) \subset (0, +\infty)$. Donde segue (é trivial) $v^T A v > 0$ se $v \neq 0$♣

Definições. Mantendo a notação, consideremos o operador

$$P = P(x, \partial) = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_i b_i\partial_i + c.$$

Sejam $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ o menor e o maior auto-valores de $A(x)$, respectivamente.

- O operador diferencial P é **elíptico no ponto** $x \in \Omega$ se a matriz (simétrica)

  $$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  é positiva. Isto é, se todos os auto-valores de $A(x)$ são estritamente positivos. Equivalentemente,

  $$0 < \lambda(x)\|\xi\|^2 \leq \sum a_{ij}\xi_i\xi_j = \xi^T A\xi \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}.$$

- O operador P é **elíptico** em Ω se P é elíptico em todo ponto de Ω.

- P é **estritamente elíptico** em Ω se existe uma constante λ_0 satisfazendo

  $$\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

- P é **uniformemente elíptico** se P é elíptico e a função

  $$\frac{\Lambda}{\lambda} \text{ é limitada em } \Omega.$$

- A **parte principal** de P é

  $$\sum a_{ij}\partial_i\partial_j.$$

Exemplo. Consideremos, no plano, o operador

$$Q = \partial_x^2 + x\partial_y^2.$$

No semi-plano à direita, Q é elíptico mas não uniformemente elíptico.

Nas faixas verticais $(a, b) \times (-\infty, +\infty)$, temos que Q é uniformemente elíptico (cheque).

Neste capítulo, estudaremos o operador P cuja parte principal possa ser apresentada na forma divergente (i.e., segundo o teorema da divergência) e com hipóteses de suavidade (regularidade) fracas para seus coeficientes.

Como motivação, suponhamos que os coeficientes a_{ij} são funções diferenciáveis, com os demais coeficientes mensuráveis. Então, dada $f \in C^2(\Omega)$ temos

$$a_{ij}\partial_i\partial_j f = \partial_i\left(a_{ij}\partial_j f\right) - \partial_i(a_{ij})\partial_j f.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Pf &= \sum_{i,j} a_{ij}\partial_i\partial_j f + \sum_i b_i\partial_i f + cf \\ &= \sum_{i,j} \partial_i\left(a_{ij}\partial_j f\right) - \sum_{i,j}\partial_i(a_{ij})\partial_j f + \sum_i b_i\partial_i f + cf. \end{aligned}$$

Escrevemos Pf na forma (com $\beta_i = 0$)

$$Pf = \sum_i \partial_i\left(\sum_j \alpha_{ij}\partial_j f + \beta_i f\right) + \sum_i \gamma_i\partial_i f + \delta f.$$

Então, renomeando P por L e abusando da notação retornamos às letras a, b e c, introduzimos a letra d e passamos a estudar o operador L dado por

$$Lu = \sum_{i,j}\partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_i \partial_i(b_i u) + \sum_i c_i\partial_i u + du.$$

O operador L é extensível a uma classe de funções bem mais ampla que $C^2(\Omega)$.

Definição. Uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é **uma solução fraca ou generalizada** da equação homogênea

$$Lu = 0$$

se e somente se vale a condição

$$\int_\Omega \left(-\sum_{i,j} a_{ij}(\partial_j u)(\partial_i\varphi) - \sum_i b_i u\partial_i\varphi + \sum_i c_i(\partial_i u)\varphi + du\varphi\right)dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$.

Toda função φ no espaço $C_c^1(\Omega)$ é chamada **função teste**.

A seguir, consideremos formalmente a **forma bilinear**

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij}(\partial_j u)(\partial_i v) + \sum_i b_i u \partial_i v - \sum_i c_i(\partial_i u)v - duv \right) dx.$$

Seja $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Indiquemos o produto interno "$\cdot$" em $\mathbb{R}^n$ por "$\langle \, , \, \rangle$". Logo,

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Como u e v são funções reais, podemos também reescrever

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \left[\, \langle A\nabla u, \nabla v \rangle + u \langle b, \nabla v \rangle - \langle c, \nabla u \rangle v - duv \, \right] dx.$$

Sejam $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e L com coeficientes suaves o suficiente. Segue

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (Lu)\varphi \, dx &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_i \partial_i(b_i u) + \sum_i c_i \partial_i u + du \right) \varphi \, dx \\
&= \int_\Omega \left(-\sum_{i,j} (a_{ij}\partial_j u)(\partial_i \varphi) - \sum_i b_i u(\partial_i \varphi) + \sum_i c_i(\partial_i u)\varphi + du\varphi \right) dx \\
&= -\mathcal{L}(u, \varphi).
\end{aligned}$$

Definições e Notações. Escrevemos

- $Lu = 0$ se e só se $\mathcal{L}(u,\varphi) = 0$ para toda função teste $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Neste caso, u é uma **solução fraca**.
- $Lu \geq 0$ se e só se $\mathcal{L}(u,\varphi) \leq 0$ para toda função não-negativa $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Neste caso, u é uma **sub-solução**.
- $Lu \leq 0$ se e só se $\mathcal{L}(u,\varphi) \geq 0$ para toda função não-negativa $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Neste caso, u é uma **super-solução**.

Observemos que se L é o operador **Laplaciano**, então

$$\mathcal{L}(u,v) = \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx.$$

Ainda, as condições $Lu = 0$, $Lu \geq 0$ e $Lu \leq 0$, para $u \in C^2(\Omega)$, correspondem às seguintes situações similares no caso do operador laplaciano.

- $\Delta u = 0$ e então u é dita **harmônica**.
- $\Delta u \geq 0$ e então u é dita **sub-harmônica**.
- $\Delta u \leq 0$ e então u é dita **super-harmônica**.

Definição. Seja $L = Lu = \sum \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum \partial_i(b_i u) + \sum c_i \partial_i u + du$ como acima. Sejam g e $f_1, \ldots, f_n$ funções localmente integráveis em Ω. Dizemos que uma função fracamente diferenciável u é **solução fraca ou generalizada** da equação não homogênea

$$Lu = g + \sum \partial_i f_i$$

se e somente se vale a identidade integral

$$\mathcal{L}(u,\varphi) = F(\varphi) = \int_\Omega \left(\sum f_i \partial_i \varphi - g\varphi\right) dx \text{ para toda } \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Notemos que

$$\mathcal{L}(u,\varphi) = -\int_\Omega (Lu)\varphi\, dx = -\langle Lu, \varphi\rangle\,.$$

Definição. Mantenhamos a notação para o operador L. Dizemos que L é **estritamente elíptico** se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\xi^T A(x)\xi = \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda\|\xi\|^2, \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n \equiv M_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Doravante, supomos L estritamente elíptico e com coeficientes em $L^\infty(\Omega)$.

Também reescrevemos a hipótese "coeficientes em $L^\infty(\Omega)$" dizendo que existem constantes Λ e $\nu \geq 0$ satisfazendo q.t.p. as condições

$$\sum |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda^{-2}\sum\left(|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2\right) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2.$$

Dado um espaço de matrizes (de um específico tamanho), identificando-o com um espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ adequado e então munindo o espaço das matrizes desta norma euclidiana (às vezes dita **norma de Hilbert-Schmidt** no espaço das matrizes), reescrevemos tais condições como (com $|\cdot|$ indicando tal norma)

$$|A|^2 \leq \Lambda^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda^{-2}(|b|^2 + |c|^2) + \lambda^{-1}|d| \leq \nu^2, \quad \text{ambas q.t.p. em } \Omega.$$

O problema de Dirichlet generalizado. Uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução do problema de Dirichlet generalizado

$$\begin{cases} Lu = g + \sum \partial_i f_i \text{ em } \Omega, \\ u = v \text{ em } \partial\Omega, \text{ onde } v \in W^{1,2}(\Omega), \end{cases}$$

se

$$\begin{cases} u \text{ é uma solução generalizada/fraca de } Lu = g + \sum \partial_i f_i, \\ u - v \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Sejam $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. A *desigualdade de Schwarz* acarreta

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u,\varphi)| &= \left| \int_\Omega \left[\, \langle A\nabla u, \nabla\varphi\rangle + u\,\langle b, \nabla\varphi\rangle - \langle c, \nabla u\rangle\,\varphi - du\varphi \, \right] dx \right| \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo, fixada uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$, o funcional linear

$$\varphi \mapsto \mathcal{L}(u,\varphi)$$

é contínuo em $\overline{C_c^1(\Omega)} = W_0^{1,2}(\Omega)$. Por continuidade, a validade das relações

$$\mathcal{L}(u,\varphi) = 0 \qquad \mathcal{L}(u,\varphi) \leq 0 \qquad \mathcal{L}(u,\varphi) \geq 0$$

para $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ assegura a validade das mesmas trocando φ por $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Ainda mais, a válida estimativa

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \text{ com } u \in W^{1,2}(\Omega) \text{ e } v \in W^{1,2}(\Omega),$$

mostra que $\mathcal{L}$ é uma forma bilinear contínua no espaço de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$ [e no espaço de Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$]. Vide capítulo 3 - seção 3.4 - os espaços $W^{k,p}(\Omega)$.

Desta forma, fixada $u \in W^{1,2}(\Omega)$, podemos definir Lu como um elemento do dual $\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$ através da expressão

$$\boxed{Lu(v) = \mathcal{L}(u,v), \text{ onde } v \in W_0^{1,2}(\Omega).}$$

Sabidamente, pelo *teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert* (vide capítulo 1, seção 1.8 - Lema de Lax-Milgram e a Alternativa de Fredholm) podemos identificar

$$\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^* = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Segue então que o operador L induz uma aplicação

$$L : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega).$$

Neste capítulo mostraremos que a resolubilidade do problema de Dirichlet é redutível à inversibilidade desta aplicação.

4.2 Princípio do máximo fraco (clássico)

Mantenhamos a notação na seção anterior. Sejam $P = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum b_i\partial_i + c$ e $\lambda = \lambda(x)$ o menor auto-valor da matriz simétrica $A = (a_{ij})$ no ponto x. A maioria dos resultados sobre P requer alguma condição que limita a influência dos termos de menor ordem $b_i\partial_i$ e c relativamente à parte principal $\sum a_{ij}\partial_i\partial_j$.

Teorema (Princípio do máximo fraco, clássico). *Seja*

$$P = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum b_i\partial_i + c, \ \textit{com } c = 0.$$

Suponhamos P elíptico no aberto (limitado) Ω e satisfazendo a condição

$$\frac{|b|}{\lambda} \ \textit{limitada}, \quad \textit{onde } b = (b_1, \ldots, b_n).$$

Suponhamos também

$$Pf \geq 0 \ \ (Pf \leq 0) \ \ \textit{em } \Omega, \ \textit{onde } f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Então, o máximo (mínimo) de f é atingido na fronteira $\partial\Omega$. Isto é,

$$\sup_{\Omega} f = \sup_{\partial\Omega} f \qquad \Big(\inf_{\Omega} f = \inf_{\partial\Omega} f\Big).$$

Prova.

- Pelo *teorema de Weierstrass* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ assume um máximo.

- Se $Pf > 0$ em Ω, então vale um **princípio do máximo forte**: todo ponto de máximo de f (pode haver mais que um) não está em Ω. De fato, se p é um ponto de máximo de f e $p \in \Omega$, então temos $\nabla f(p) = 0$ e a matriz hessiana (e simétrica) $Hf = \big(\partial^2_{ij} f\big)$ em p é negativa semi-definida. Isto é,

$$v^T Hf(p) v \leq 0, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \qquad \left[v^T Hf(p) v = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(p)\right].$$

Mas $A = (a_{ij})$ é (definida) positiva, pois P é elíptico, e $b \cdot \nabla f(p) = 0$. Logo,

$$\boxed{0 < Pf(p) = \sum a_{ij}(p)\partial^2_{ij} f(p).}$$

Álgebra linear garante as existências de uma matriz diagonal $D = (d_{ij})$, com cada $d_{ii} \leq 0$, e uma matriz ortogonal $B = (b_{kl})$ [i.e., $BB^T = I$] tal que

$$\big(\partial^2_{ij} f(p)\big) = Hf(p) = B^T D B.$$

[Vide "diagonalização de uma matriz hermítica" em T. M. Apostol, *Cálculo*, vol 2, ed. Reverté, p. 138 ou vide "Real Spectral Theorem" em S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2nd ed., Springer, p. 136.]

Dada uma matriz qualquer $C = (c_{rs})$, também escrevemos $C_{rs} = c_{rs}$. Segue

$$\partial^2_{ij} f(p) = \sum_{k,l} (B^T)_{ik} d_{kl} b_{lj} = \sum_{kl} b_{ki} d_{kl} b_{lj} = \sum_m b_{mi} d_{mm} b_{mj}.$$

Donde segue (a contradição)

$$\sum_{ij} a_{ij}(p) \partial^2_{ij} f(p) = \sum_m d_{mm} \left(\sum_{ij} b_{mi} a_{ij} b_{mj} \right) \leq \sum_m 0 = 0 \lightning$$

[Destaque-se que utilizamos apenas que A é positiva semi-definida.]

◇ Conclusão do teorema. Evidentemente, a desigualdade

$$e_1^T A e_1 \geq \lambda \text{ implica } a_{11} \geq \lambda.$$

Seja β uma constante tal que

$$\frac{|b|}{\lambda} \leq \beta.$$

Então, para uma constante γ grande o suficiente obtemos

$$P(e^{\gamma x_1}) = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma\beta) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Logo, devido à hipótese $Pf \geq 0$, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$P\left(f + \epsilon e^{\gamma x_1}\right) > 0 \text{ em } \Omega$$

e portanto pelo que já provamos acima segue

$$\sup_\Omega \left(f + \epsilon e^{\gamma x_1}\right) = \sup_{\partial\Omega} \left(f + \epsilon e^{\gamma x_1}\right).$$

Impondo $\epsilon \to 0$ encontramos (cheque)

$$\sup_\Omega f = \sup_{\partial\Omega} f \clubsuit$$

A seguir, eliminemos a condição $c = 0$. Investiguemos o caso

$$c \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Definamos o subconjunto

$$\boxed{\Omega^+ = \Big\{x \in \Omega : f(x) > 0\Big\}}.$$

Sob a hipótese $Pf \geq 0$ encontramos

$$P_0 f = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j f + \sum b_i \partial_i f \geq -cf \geq 0 \text{ em } \Omega^+.$$

Logo, o máximo de f em $\overline{\Omega^+}$ é assumido em $\partial(\Omega^+)$ e assim em $\partial\Omega$ (cheque).

Utilizemos as notações $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0) = (-f)^+$.

Corolário. *Seja* $P = (\sum a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum b_i\partial_i + c)$ *elíptico, com* $c \leq 0$ *e* $|b|/\lambda$ *limitada. Suponhamos* $Pf \geq 0$ $(Pf \leq 0)$ *em* Ω*, onde* $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*. Então,*

$$\sup_{\Omega} f \leq \sup_{\partial\Omega} f^+ \qquad \Big(\inf_{\Omega} f \geq \inf_{\partial\Omega} -f^-\Big).$$

Se $Pf = 0$ *em* Ω*, então*

$$\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

Prova. Exercício♣

Teorema (Unicidade da solução e princípio de comparação). *Seja* P *elíptico, com* $c \leq 0$ *em* Ω*. Sejam* f *e* g *funções em* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

- *(Unicidade da solução do problema de Dirichlet clássico.) Vale o que segue.*

$$\begin{cases} Pf = Pg & \text{em } \Omega \\ f = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \implies f = g \text{ em } \Omega.$$

- *(Princípio de comparação.) Vale o que que segue.*

$$\begin{cases} Pf \geq Pg & \text{em } \Omega \\ f \leq g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \implies f \leq g \text{ em } \Omega.$$

Prova. Exercício♣

4.3 Princípio do máximo fraco (estendido)

O princípio do máximo clássico enunciado para o operador P se estende a operadores L no formato do divergente. Para isto conceituamos desigualdade na fronteira para funções em $W^{1,2}(\Omega)$.

Dada uma função u e decompondo

$$u = u^+ - u^-,$$

pelo corolário *gradientes das partes positiva e negativa e do módulo* (capítulo 3, seção 3.3 - regra da cadeia) temos

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \{u^+, u^-\} \subset W^{1,2}(\Omega).$$

Observemos $(-u^-)^+ = 0$, onde u é uma função qualquer.

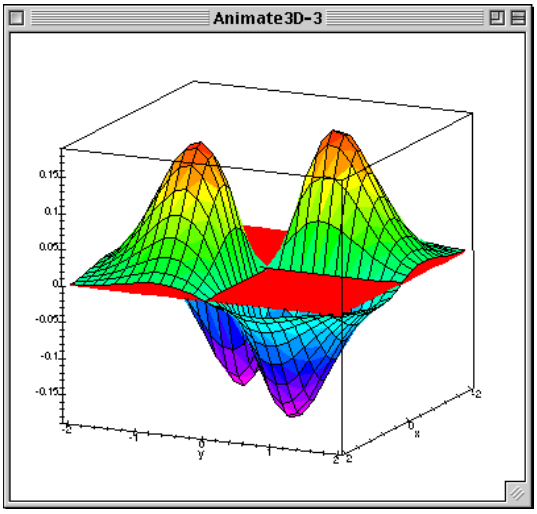

Figura 4.2: Uma função $u = u(x,y)$ com $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$. Vide animação http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL10/C009/lc.gif

Desigualdade na Fronteira para Funções em $W^{1,2}(\Omega)$ [em geral, podemos supor $\partial\Omega$ de classe C^1] . Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Escrevemos

$$\boxed{u \leq 0 \text{ em } \partial\Omega \ \ [\text{no sentido de } W^{1,2}(\Omega)] \ \ \text{se} \ \ u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega).}$$

Proposição (As funções de $W_0^{1,2}(\Omega)$ são negativas na fronteira). *Dada $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então temos*

$$u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ ou, equivalentemente, } u \leq 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ [no sentido de } W^{1,2}(\Omega)].$$

Prova.

- Por definição de $W_0^{1,2}(\Omega)$ e pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual* (vide capítulo 1) segue que existe $(\varphi_n) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que

$$(\varphi_n, \nabla\varphi_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} (u, \nabla u) \quad \text{e} \quad (\varphi_n, \nabla\varphi_n) \xrightarrow{\text{q.t.p.}} (u, \nabla u).$$

- É trivial ver que $\varphi_n^+ \in C_c(\Omega)$ e que $|\varphi_n^+ - u^+| \leq |\varphi_n - u|$. Portanto

$$\|\varphi_n^+ - u^+\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

- É trivial ver que $|\nabla\varphi_n^+ - \nabla u^+|^2 \leq |\varphi_n - \nabla u|^2 + |\nabla\varphi_n|^2 + |\nabla u|^2$ (cheque).

  Seja x tal que $u(x) > 0$. Como $\varphi_n(x) \to u(x)$, para n grande o suficiente temos $\varphi_n^+(x) = \varphi_n(x)$. Segue $\lim \nabla\varphi_n^+(x) = \lim \nabla\varphi_n(x) = \nabla u(x) = \nabla u^+(x)$.

  Seja x tal que $u(x) < 0$. Como $\varphi_n(x) \to u(x)$, para n grande o suficiente temos $\varphi_n^+(x) = 0$. Segue $\lim \nabla\varphi_n^+(x) = 0 = \nabla u^+(x)$.

  Seja x tal que $u(x) = 0$. Logo, $\nabla u(x) = 0$. Como $\nabla\varphi_n(x) \to \nabla u(x)$, obtemos $|\nabla\varphi_n^+(x)| + |\nabla\varphi_n^-(x)| = |\nabla\varphi_n(x)| \to 0$. Segue $\lim \nabla\varphi_n^+(x) = 0 = \nabla u^+(x)$.

  Em suma, temos $\nabla\varphi_n^+ \xrightarrow{\text{q.t.p.}} \nabla u^+$. Donde segue $|\nabla\varphi_n^+ - \nabla u^+|^2 \xrightarrow{\text{q.t.p.}} 0$.

  Por outro lado, temos $|\varphi_n - \nabla u|^2 + |\nabla\varphi_n|^2 + |\nabla u|^2 \xrightarrow{\text{q.t.p.}} 2|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$.

  Desta forma, pelo *teorema da convergência dominada generalizado* segue

$$\int |\nabla\varphi_n^+ - \nabla u^+|^2 \, dx \longrightarrow 0.$$

  Resumindo, encontramos

$$(\varphi_n^+, \nabla\varphi_n^+) \xrightarrow{L^2(\Omega)} (u^+, \nabla u^+).$$

- Temos que $\varphi_n^+ \in W^{1,2}(\Omega)$ e φ_n^+ tem suporte compacto. Seja φ_n^+ próxima a u^+ na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. Pelo lema *regularização e aproximação em $W^{k,p}(\Omega)$*, vide seção 3.5, existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ com ψ próxima a φ_n^+ na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. A desigualdade triangular mostra ψ próxima a u^+ na norma de $W^{1,2}(\Omega)$ ♣

Comentário. Se u é uma função contínua numa vizinhança de $\partial\Omega$, dizemos que u satisfaz $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ se tal desigualdade vale no sentido pontual clássico. A proposição abaixo mostra que não há ambiguidade entre estas definições. Para prová-la, usamos o teorema a seguir (um caso particular de um teorema já visto).

Teorema (Caracterização de $W_0^{1,2}(\Omega)$.) *Seja Ω um aberto conexo e limitado tal que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Seja $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Temos*

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ (no sentido clássico).}$$

Prova. Apresentada no Capítulo 3 (seção 3.12).

- Vide também Treves [15, pp. 193–196] e Treves [15, section "a weak maximum principle", pp. 259–267].

- Vide também Lista 4, Exercício 6, sugerido em Gilioli [9, p. 351].

- É também útil ler no capítulo 3 (seção 3.5 - teoremas de densidade) a demonstração do teorema

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ é denso em } W^{1,2}(\Omega),$$

  no caso em que a fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^1 (estamos assumindo tal suavidade na fronteira, ao longo desta seção).

- Vide também o sétimo comentário dos oito comentários após o exemplo de uma função em $W_0^{1,2}(\Omega) \setminus C_c^1(\Omega)$, o qual é dado logo a seguir.

Proposição (Equivalência entre as definições de "$u \leq 0$" na fronteira). *Seja Ω um aberto conexo e limitado de classe C^1. Seja $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então, temos*

$$u \leq 0 \text{ em } \partial\Omega, \text{ no sentido de } W^{1,2}(\Omega), \Longleftrightarrow u \leq 0 \text{ em } \partial\Omega, \text{ no sentido clássico.}$$

Prova.

($\Rightarrow$) Por hipótese temos $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. É trivial ver que $u^+ \in C(\overline{\Omega})$. Logo,

$$u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Pelo *teorema de caracterização de* $W_0^{1,2}(\Omega)$ segue $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$ pontualmente. Donde segue $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ pontualmente.

($\Leftarrow$) O teorema *o gradiente das partes positiva e negativa e do módulo* garante

$$u^+ \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

A hipótese $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, pontualmente, mostra $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$ pontualmente. Pelo *teorema de caracterização de* $W_0^{1,2}(\Omega)$ segue $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Isto é, $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ no sentido de $W^{1,2}(\Omega)$ ♣

Outras definições para desigualdades na fronteira $\partial\Omega$ seguem naturalmente. Por exemplo, dado um par $\{u, v\}$ em $W^{1,2}(\Omega)$ definimos

$$u \geq 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ se } -u \leq 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Ainda,

$$u \leq v \text{ em } \partial\Omega \text{ se } u - v \leq 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Definimos

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\Big\{k : u \leq k \text{ em } \partial\Omega \ \big[\text{isto é, } (u-k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)\big], \text{ onde } k \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Definimos também

$$\inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u).$$

A seguir, o exemplo mencionado nos comentários acima.

Exemplo [Uma função em $W_0^{1,2}(\Omega) \smallsetminus C_c^1(\Omega)$.] Seja Ω a bola $B(0,2) \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos

$$u(x,y) = \begin{cases} (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{4}} & \text{se } x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 \leq x^2+y^2 < 2. \end{cases}$$

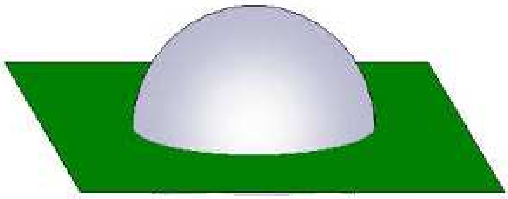

Figura 4.3: Exemplo de $u = u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ou, ainda, $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, com $\Omega = B(0,2)$.

Claramente u é contínua, positiva e $\text{supp}(u) = D(0,1)$ é compacto em $B(0,2)$. Temos

$$\nabla u(x,y) = \begin{cases} \frac{-3(x,y)}{2\sqrt[4]{1-x^2-y^2}} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, u não é de classe C^1. Assim, $u \notin C_c^1\big(B(0,2)\big)$.

Evidentemente $u \in L^2(B(0,2))$. Mostremos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Temos

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{B(0,1)} \frac{9}{4} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\, dy = \frac{9\pi}{2} \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

Esta última integral é finita, pois

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r}} = -2\sqrt{1-r}\,\Big|_0^1 = 2.$$

Logo, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ [assim, u e ∇u estão em $L^2(\Omega)$] e u tem suporte compacto.

Sejam ρ a função curva do sino e a convolução $u_\epsilon = \rho_\epsilon * u \in C_c^\infty(\Omega)$ (vide teorema *derivada do produto de convolução* - capítulo 2, seção 2.2). Pelo lema *derivada fraca e regularização* (capitulo 3, seção 3.2 - derivadas fracas) temos

$$\partial_j(u_\epsilon) = (\partial_j u)_\epsilon, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n.$$

O lema *regularização em $L^p_{loc}(\Omega)$* [cap. 2, seção 2.5 - regularização e L^p_{loc}] mostra

$$\begin{cases} u_\epsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \text{ e} \\ (\partial_j u)_\epsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \partial_j u. \end{cases}$$

Portanto, como $\partial_j(u_\epsilon) = (\partial_j u)_\epsilon$ e $u_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, concluímos que

$$(u_\epsilon, \nabla u_\epsilon) \xrightarrow{L^2(\Omega)} (u, \nabla u) \quad \text{e} \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \clubsuit$$

Comentários (cheque). Sejam u e v, ambas em $W^{1,2}(\Omega)$.

(1) Se $u \leq 0$ em Ω então $u \leq 0$ em $\partial\Omega$. Analogamente, se $u \leq M$ em Ω [isto é, $u - M \leq 0$ no aberto Ω] com M uma constante, então $u \leq M$ em $\partial\Omega$.

(2) Se $u \leq v$ em Ω, então $u \leq v$ em $\partial\Omega$.

(3) Evidentemente $(-u^-)^+ = 0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e então $-u^- \leq 0$ em $\partial\Omega$ (em linguagem figurada, a "parte submersa" $-u^-$ é menor ou igual a zero na fronteira).

(4) Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então existe $(\varphi_n) \subset C_c^1(\Omega)$ convergente a u na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. Podemos supor (vide teorema *convergência em L^p e convergência pontual*) que $(\varphi_n, \nabla\varphi_n) \xrightarrow{\text{q.t.p}} (u, \nabla u)$. Toda φ_n é identicamente nula na fronteira $\partial\Omega$. Logo, podemos definir $u = 0$ em $\partial\Omega$ (mesmo que $|\partial\Omega| > 0$).

(5) Se $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, então temos $\varphi \leq 0$ em $\partial\Omega$ no sentido de $W^{1,2}(\Omega)$.

Sugestão. Pelo corolário *gradientes das partes positiva e negativa e do módulo* (vide capítulo 3, seção 3.4 - regra da cadeia) vemos que φ^+ é fracamente diferenciável, com $\{\varphi^+, \nabla\varphi^+\} \subset L^2(\Omega)$, cheque. Logo, $\varphi^+ \in W^{1,2}(\Omega)$. Evidentemente

$$\text{supp}(\varphi^+) \text{ é compacto em } \Omega.$$

Considerando ρ a "função curva do sino" segue (vide Lista 3 - Exercício 7)

$$\begin{cases} \rho_\epsilon * (\varphi^+) \in C_c^\infty(\Omega) \\ \text{e} \\ \rho_\epsilon * (\varphi^+) \xrightarrow{W^{1,2}(\Omega)} \varphi^+. \end{cases}$$

Concluímos então que

$$\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(6) Temos $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ se a função u^+ (figurativamente, a "parte emersa") é limite de uma sequência em $C_c^1(\Omega)$ e na norma de $W^{1,2}(\Omega)$.

(7) Se $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz $\varphi \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

(8) Se u é limite [no espaço $W^{1,2}(\Omega)$] de uma sequência de funções suaves (de classe C^1 no aberto Ω, neste contexto), todas estas majoradas por 0 em $\partial\Omega$, então segue $u \leq 0$ em $\partial\Omega$.

Recordemos as definições (dadas acima)

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf \Big\{ k : u \leq k \text{ em } \partial\Omega \ \big[\text{isto é, } \ (u-k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)\big], \text{ onde } k \in \mathbb{R} \Big\} \quad \text{e}$$

$$\inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u).$$

Lema (O $\sup u$ em $\partial\Omega$ é um majorante de u em $\partial\Omega$). *Sejam $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e*

$$l = \sup_{\partial\Omega} u < \infty.$$

Então temos

$$u \leq l \text{ em } \partial\Omega \qquad [\textit{equivalentemente, } (u-l)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)].$$

Prova.

◇ Seja k satisfazendo $u \leq k$ em $\partial\Omega$.

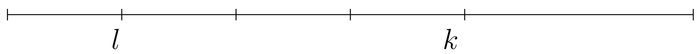

Figura 4.4: A disposição $l \leq k$.

A função x^+ é contínua e satisfaz $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ (cheque).

Seguem

$$|(u-k)^+ - (u-l)^+| \leq |k-l|$$

com $(u-k)^+$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, pela definição de "$u \leq k$ em $\partial\Omega$", e a convergência

$$\|(u-k)^+ - (u-l)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq |k-l|\sqrt{|\Omega|} \xrightarrow{k \searrow l} 0.$$

Pelos *gradientes das partes positiva e negativa e o módulo* (seção 3.3) temos

$$\nabla(u-k)^+ = \begin{cases} \nabla(u-k)^+ = \nabla u & \text{se } u > k \\ 0 & \text{se } u \leq k \end{cases} \quad \text{e} \quad \nabla(u-l)^+ = \begin{cases} \nabla u, & u > l, \\ 0, & u \leq l. \end{cases}$$

Donde segue

$$|\nabla(u-k)^+ - \nabla(u-l)^+| = |\nabla u| \chi_{\{l < u \leq k\}}.$$

Temos (cheque, argumente com sequências se preferir)

$$\{x \in \Omega : l < u(x) \leq k\} \searrow \varnothing \text{ se } k \searrow l.$$

Por hipótese, $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Pelo *teorema da convergência dominada* segue

$$\|\nabla(u-k)^+ - \nabla(u-l)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2\left(\left\{l<u(x)\leq k\right\}\right)} \xrightarrow{k \searrow l} 0.$$

Portanto, $(u-k)^+$ pertence ao espaço completo e fechado $W_0^{1,2}(\Omega)$ e, impondo $k \searrow l$, converge a $(u-l)^+$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo,

$$(u-l)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega) \clubsuit$$

Nas consequências do princípio do máximo clássico (um corolário e um teorema) impusemos o coeficiente c na expressão $P = (\sum a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum b_i\partial_i + c)$ negativo. Isto é, $c \leq 0$. A parcela correspondente para o operador

$$L = Lu = \sum \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum \partial_i(b_i u) + \sum c_i \partial_i u + du$$

é

$$\sum \partial_i b_i + d = \operatorname{div}(b) + d.$$

[Obviamente, $\operatorname{div}(b)$ é o **divergente** de b dado por

$$\operatorname{div}(b) = \partial_1 b_1 + \cdots + \partial_n b_n.]$$

Então, como as derivadas $\partial_i b_i$ podem não existir como funções, a não positividade desta parcela deve ser interpretada no sentido generalizado. Isto é, assumimos

$$\int_\Omega (d\varphi - \sum b_i \partial_i \varphi)dx = \int_\Omega (d\varphi - \langle b, \nabla\varphi\rangle)dx \leq 0 \ \text{ se } \ \varphi \geq 0 \text{ e } \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Como já combinado na seção 4.1, os coeficientes de L são limitados. Então, por densidade, a desigualdade imediatamente acima também vale para toda $w \geq 0$ com $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Isto é,

$$\boxed{\int_\Omega \left(dw - \sum_i b_i \partial_i w\right) dx \leq 0 \text{ se } w \geq 0 \text{ e } w \in W_0^{1,1}(\Omega).}$$

Segue então o princípio abaixo.

Teorema (Princípio do máximo fraco, estendido). *Mantidas as notações acima, sejam L com coeficientes em $L^\infty(\Omega)$ e constantes $\Lambda \geq 0$ e $\nu \geq 0$ satisfazendo*

$$|A|^2 \leq \Lambda^2 \text{ q.t.p.} \qquad e \qquad \lambda^{-2}\left(|b|^2 + |c|^2\right) + \lambda^{-1}|d| \leq \nu^2 \text{ q.t.p..}$$

Suponhamos também

$$\int_\Omega \left(dw - \sum_i b_i \partial_i w\right) dx \leq 0 \text{ se } w \geq 0 \text{ e } w \in W_0^{1,1}(\Omega) \ [\text{ou } w \in C_c^1(\Omega)].$$

Seja uma sub-solução (respectivamente, super-solução) $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $Lu \geq 0$ (respectivamente, $Lu \leq 0$) em Ω. Suponhamos que

$$\sup_{\partial\Omega} u^+ = l \in [0, +\infty).$$

Então,

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \qquad \left(\inf_\Omega u \geq \inf_\Omega -u^-\right).$$

Prova. [Vide também, Trudinger, N. S., *Linear Elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **27**, 265–308 (1973). As hipóteses sobre a matriz A garantem que A é estritamente e uniformemente elíptico e então o artigo generaliza este teorema/princípio.]

◇ Dadas $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, é trivial ver que $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$. De fato, por definição existem $u_n \in C_c^1(\Omega)$ e $v_n \in C_c^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \text{ e } \nabla u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla u, \\ \text{e} \\ v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v \text{ e } \nabla v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla v. \end{cases}$$

A *desigualdade de Schwarz* [ou a continuidade do produto interno em L^2] garante

$$u_n v_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} uv \quad \text{e} \quad \nabla(u_n v_n) = u_n \nabla v_n + v_n \nabla u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u\nabla v + v \nabla u.$$

Pelo teorema *caracterização das derivadas fracas* (especificamente a implicação não direta, vide seção 3.2 - derivadas fracas) segue

$$\nabla uv = u\nabla v + v\nabla u \ \in L^1(\Omega).$$

Logo, $uv \in W^{1,1}(\Omega)$. Como $u_n v_n \in C_c^1(\Omega)$, concluímos que $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

◇ Por definição temos $Lu \geq 0$ se e só se vale a condição $\mathcal{L}(u,\varphi) \leq 0$ para toda $0 \leq \varphi \in C_c^1(\Omega)$. Assim, escrevendo $b_i u \partial_i \varphi = -b_i \varphi \partial_i u + b_i \partial_i(u\varphi)$ e reescrevendo a condição $\mathcal{L}(u,\varphi) \leq 0$ encontramos (cheque, veja também as hipóteses)

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \Big[\sum a_{ij}\partial_i u \partial_j v - \sum_i (b_i + c_i) v \partial_i u\Big] dx \leq \int_\Omega \Big[duv - \sum_i b_i \partial_i (uv)\Big] dx \leq 0$$

se $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é tal que $v \geq 0$ e $w = uv \geq 0$ (vide fórmula destacada acima). [Abreviadamente, dada $v \geq 0$ tal que $uv \geq 0$ obtemos

$$\int_\Omega \big\{ \langle A\nabla u, \nabla v\rangle - \langle b + c, v\nabla u\rangle \big\}\, dx \leq \int_\Omega \big\{duv - \langle b, \nabla(uv)\rangle \big\} dx \leq 0.]$$

Pelas hipóteses sobre os coeficientes de L segue (a ser usada no caso trivial)

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle\, dx \leq \int_\Omega \langle b + c, v\nabla u\rangle\, dx \leq \int_\Omega |b + c|\, |v\nabla u|\, dx$$

e destacamos a desigualdade (a ser usada no caso geral)

$$\boxed{(4.3.1) \qquad \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle\, dx \leq 2\lambda\nu \int_\Omega v|\nabla u|\, dx \text{ se } v \geq 0 \text{ e } uv \geq 0.}$$

◇ Caso trivial: $b + c = 0$. Pelas desigualdades imediatamente acima segue

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle\, dx \leq \int_\Omega |b + c|\, v\, |\nabla u|\, dx = 0.$$

Consideremos a constante

$$l = \sup_{\partial\Omega} u^+ \in [0, +\infty) \qquad \Big[l = \inf\big\{k :\ u^+ \leq k \text{ em } \partial\Omega \text{ com } k \in \mathbb{R}\big\}\Big].$$

Pelo lema "o $\sup u$ em $\partial\Omega$ majora u em $\partial\Omega$" temos $u^+ \leq l$ em $\partial\Omega$. Então, por definição segue

$$u^+ - l \leq 0 \text{ em } \partial\Omega \ \text{ ou, equivalentemente, } \ (u^+ - l)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

É trivial ver que (cheque, use $l \geq 0$)

$$v = \max(u - l, 0) = (u^+ - l)^+ \geq 0.$$

É claro que $v \in W^1(\Omega)$ (cheque, é trivial). Pelo corolário *gradiente para partes positivas, negativas e o módulo* (seção 3.3 - regra da cadeia) segue

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla(u - l) = \nabla u & \text{se } u - l > 0, \\ 0 & \text{se } u - l \leq 0. \end{cases}$$

É trivial constatar a condição $uv = u(u-l)^+ \geq 0$.

Pela expressão para ∇v obtemos

$$0 \geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle \, dx \geq \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla v\rangle \, dx \geq 0.$$

A positividade definida de A garante $\nabla v = 0$. Pela *propriedade funções constantes e gradiente fraco* (seção 3.2 - derivadas fracas), v é constante. Então, pelas desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (seção 3.6) temos

$$v = 0, \text{ com } v = \max(u-l, 0) = 0.$$

Donde segue

$$\sup_\Omega u \leq l = \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

◇ Caso geral. Seja $l \in [0, +\infty)$ como acima. Suponhamos (por contradição) $l < M = \sup\{u(x) : x \in \Omega\}$. Logo, existe k tal que

$$l \leq k < M \text{ e } u \leq k \text{ em } \partial\Omega, \quad \text{e então} \quad v = v_k = (u-k)^+ = (u^+ - k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Pelo corolário *gradientes das partes positiva e negativa e do módulo* (seção 3.3 - regra da cadeia) a função $v = (u-k)^+$ satisfaz

$$(4.3.2) \qquad \nabla v = \begin{cases} \nabla u & \text{se } u > k, \\ 0 & \text{se } u \leq k \end{cases} \quad \text{e} \quad \boxed{\Gamma = \{x : \nabla v(x) \neq 0\} \subset \{x : u(x) > k\}}.$$

É claro que $uv = u(u-k)^+ \geq 0$ (cheque). É trivial ver que

$$v_k(x) \xrightarrow{k \nearrow M} \begin{cases} 0 & \text{se } u(x) < M \\ 0 & \text{se } u(x) = M. \end{cases}$$

A seguir, analisemos as integrais à esquerda e à direita em (4.3.1). Temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle \, dx &= \int_\Gamma \langle \nabla v, A\nabla u\rangle \, dx \\ &\overset{A=A^T}{=} \int_\Gamma \langle A\nabla v, \nabla u\rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle A\nabla v, \nabla v\rangle \, dx. \end{aligned}$$

Para a integral à direita em (4.3.1) temos $v = 0$ se $u \leq k$ e encontramos

$$\int_{\Omega} v|\nabla u|\, dx = \int_{u>k} v|\nabla u|\, dx$$

$$= \int_{u>k} v|\nabla v|\, dx$$

$$\overset{\Gamma \subset \{u>k\}}{=} \int_{\Gamma} v|\nabla v|\, dx.$$

Por tais identidades integrais e a desigualdade (4.3.1) obtemos

$$\int_{\Omega} \langle A\nabla v, \nabla v\rangle\, dx \leq 2\lambda\nu \int_{\Gamma} v|\nabla v| dx.$$

Assim, como L é estritamente elíptico obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq 2\lambda\nu \|v\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

e então

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Gamma)} \leq 2\nu \|v\|_{L^2(\Gamma)}.$$

O caso dimensão $n \geq 3$. Pelas *desigualdades de Sobolev* (seção 3.6 - teorema de imersão) destacamos as desigualdades em normas

$$\boxed{\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\nu C \|v\|_{L^2(\Gamma)}.}$$

Pelo corolário visto na seção 1.4 (desigualdades e interpolações), a função

$$p \mapsto \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é crescente. Como

$$\frac{2n}{n-2} > 2,$$

segue

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} = |\Gamma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq |\Gamma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} = |\Gamma|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}}.$$

Pelas desigualdades já destacadas para normas de v, segue para $|\Gamma|$ a desigualdade

$$\boxed{1 \leq 2\nu C|\Gamma|^{\frac{1}{n}}.}$$

É claro que

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_k \subset \{x : \nabla u(x) \neq 0\}}.$$

Isto é, quase todo ponto de Γ_k pertence a $\{x : \nabla u(x) \neq 0\}$.

Suponhamos k e k' tais que $k < k' \leq M$. Seja x satisfazendo $\nabla v_{k'}(x) \neq 0$. Portanto $\nabla u(x) \neq 0$ e $u(x) > k'$. Logo, $\nabla v_k(x) \neq 0$. Donde encontramos

$$\Gamma_{k'} \subset \Gamma_k.$$

É então trivial ver que (cheque)

$$\text{se } k \nearrow M = \sup_{\Omega} u \quad \text{então} \quad \Gamma = \Gamma_k \searrow u_M = \{x : u(x) = M\}.$$

Logo, $|\Gamma_k| \searrow |u_M|$ e a desigualdade enfatizada para $|\Gamma = \Gamma_k|$ mostra

$$|u_M| > 0.$$

O teorema *gradiente fraco e funções constantes* garante que

$$\nabla u = 0 \text{ em } u_M \quad (\text{i.e., } \nabla u = 0 \text{ q.t.p. em } u_M).$$

Po outro lado, já destacamos que $\Gamma_k \subset \{x : \nabla u(x) \neq 0\}$.

Encontramos então (uma contradição)

$$\begin{cases} |u_M| > 0 \\ \nabla u \equiv 0 \text{ em } u_M \\ u_M \subset \{x : \nabla u(x) \neq 0\} \quad \lightning \end{cases}$$

O caso dimensão $n = 2$. Basta trocar, no caso já analisado $n \geq 3$, o expoente $2n/(n-2)$ por qualquer expoente $p > 2$. Cheque♣

Exemplo. A hipótese

$$\int_\Omega \left(d\varphi - \sum_i b_i \partial_i \varphi \right) dx \leq 0 \text{ se } \varphi \geq 0 \text{ e } \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

é essencial no princípio do máximo acima. De fato, a equação

$$\Delta u + 2u = 0 \text{ em } \Omega, \quad \text{com } u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

no quadrado $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ (vide figura abaixo)

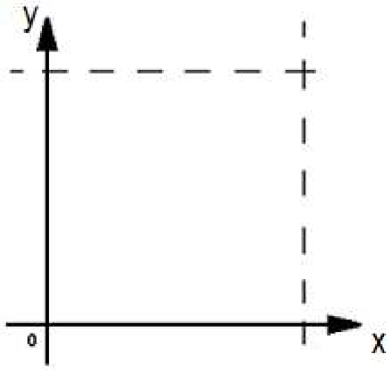

Figura 4.5: O quadrado $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

admite a solução não trivial (cheque os detalhes)

$$u(x, y) = \sin(x)\sin(y) \clubsuit$$

Corolário (Unicidade da solução para o problema de Dirichlet generalizado). *Seja* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *tal que* $Lu = 0$ *em* Ω. *Então,* $u = 0$ *em* Ω.

Prova.

- ◇ Pela proposição "*as funções de* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *são negativas na fronteira*" segue $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, no sentido de $W^{1,2}(\Omega)$.

  É óbvio que $Lu \geq 0$. Pelo *princípio do máximo estendido* segue

  $$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \leq 0.$$

- ◇ Também $-u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $L(-u) \geq 0$. Segue

  $$-\inf_\Omega u = \sup_\Omega -u \leq \sup_{\partial\Omega} (-u)^+ = 0.$$

  Concluímos então $u = 0$ q.t.p. em $\Omega \clubsuit$

4.4 Resolubilidade do Problema de Dirichlet

Como na seção anterior, consideremos o operador L dado por

$$Lu = \sum \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum \partial_i(b_i u) + \sum c_i \partial_i u + du, \text{ com } u \in W^{1,2}(\Omega),$$

e suponhamos que L satisfaz as condições

$$(4.4.1) \qquad \begin{cases} \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \\ |A|^2 \leq \Lambda^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda^{-2}(|b|^2 + |c|^2) + \lambda^{-1}|d| \leq \nu^2, \quad \text{ambas em } \Omega, \\ \\ \int_\Omega [dv - \langle b, \nabla\varphi\rangle]\, dx \leq 0, \text{ para toda } \varphi \geq 0 \text{ com } \varphi \in C_c^1(\Omega). \end{cases}$$

O objetivo nesta seção é provar o teorema de unicidade abaixo.

Teorema (Existência e unicidade para o problema de Dirichlet generalizado). *Seja L satisfazendo (4.4..1). Sejam $v \in W^{1,2}(\Omega)$ e funções $g, f_1, \ldots, f_n$ em $L^2(\Omega)$. Então, o problema de Dirichlet generalizado*

$$\begin{cases} Lu = g + \sum_j \partial_j f_j \\ u = v \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução única.

Redução do problema (e unicidade). Podemos supor $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Consideremos $w = u - v$. Então obtemos

$$\begin{aligned} Lw &= Lu - Lv \\ &= g + \sum \partial_i f_i - \left[\sum \partial_i\big(\sum a_{ij}\partial_j v + b_i v\big) + \sum c_i \partial_i v + dv\right] \\ &= \left[g - \sum c_i\partial_i v - dv\right] + \left[\sum \partial_i \left(f_i - \sum a_{ij}\partial_j v - b_i v\right)\right] \\ &= \widetilde{g} + \sum \partial_i \widetilde{f_i}. \end{aligned}$$

Notemos que $\widetilde{g}$ e $\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_n}$, definidas de forma óbvia, pertencem a $L^2(\Omega)$.

Então, w é solução do problema reduzido

$$\begin{cases} L(w) = \sum \partial_i \widetilde{f_i} + \widetilde{g} \\ w \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Assim, determinada uma solução w de tal problema reduzido vemos que $u = w + v$ resolve o problema original (cheque). A **unicidade** foi estabelecida no corolário acima♣

Como já citado na introdução a este capítulo, para provarmos a existência de uma solução ao problema de Dirichlet generalizado utilizaremos a alternativa de Fredholm. Recordemos (vide seção 4.1 - Introdução) que a forma

$$\mathcal{L} : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ onde}$$
$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \big[\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + u\langle b, \nabla v\rangle - c\langle \nabla u, v\rangle - duv \big] dx,$$

satisfaz

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

e é então contínua. A seguir analisamos $\mathcal{L}$ quanto a coercividade (coerção: *coagir, coibir, reprimir, obrigar*; *controlar*).

Dado $\sigma \in \mathbb{R}$, e uma função u, definamos o operador L_σ pela equacão funcional

(4.4.2) $$\boxed{L_\sigma u = Lu - \sigma u.}$$

Mostremos que $\mathcal{L}_\sigma$ é coerciva para σ grande o suficiente.

Consideremos o problema

$$(D_\sigma) \qquad \begin{cases} L_\sigma u = \sum \partial_i f_i + g \\ \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Recordemos as notações $\langle Lu, \varphi\rangle = -\mathcal{L}(u,\varphi)$ *e* $\langle L_\sigma u, \varphi\rangle = -\mathcal{L}_\sigma(u,\varphi)$]. Por definição, u é solução de (D_σ) se vale a identidade

$$-\mathcal{L}_\sigma(u,\varphi) = -\mathcal{L}(u,\varphi) - \sigma\int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega \Big(-\sum f_i\partial_i\varphi + g\varphi\Big) dx$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ [ou para toda $\varphi = v \in W_0^{1,2}(\Omega)$].

Assim, u é solução de (D_σ) se para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ [ou $\varphi = v \in W_0^{1,2}(\Omega)$] temos

$$\mathcal{L}_\sigma(u,\varphi) = \mathcal{L}(u,\varphi) + \sigma\int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega \Big(\sum f_i\partial_i\varphi - g\varphi\Big) dx.$$

Lema. *É contínuo o funcional linear*

$$\boxed{F(v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n f_i\partial_i v - gv\Big) dx, \quad \text{onde } v \in W_0^{1,2}(\Omega).}$$

Prova. Segue de

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \sum \|f_i\|_2\|\partial_i v\|_2 + \|g\|_2\|v\|_2 \\ &\leq C\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \text{ onde } C = \|g\|_2 + \sum \|f_i\|_2 \clubsuit \end{aligned}$$

Lema. *A forma $\mathcal{L}_\sigma$ é coerciva para σ grande o suficiente.*

Prova.

Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Existe uma constante $m > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(u,u) = \int_\Omega \left[\langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \langle b - c, u\nabla u\rangle - du^2 \right] dx$$

$$\geq \int_\Omega \lambda|\nabla u|^2\,dx - m\int_\Omega |u|\,|\nabla u|\,dx - m\int_\Omega u^2\,dx$$

Notemos que

$$\int_\Omega |u|\,|\nabla u|\,dx \leq \left(\epsilon^2 \int_\Omega u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{-2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\epsilon^2 \int_\Omega u^2\,dx + \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{m}{2\epsilon^2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{m\epsilon^2}{2}\int_\Omega u^2\,dx - m\int_\Omega u^2\,dx.$$

Seja $\epsilon > 0$ determinado por

$$\frac{m}{2\epsilon^2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Segue

$$\mathcal{L}(u,u) + \sigma\int_\Omega u^2\,dx \;\geq\; \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \;+\; \left(\sigma - \frac{m\epsilon^2}{2} - m\right)\int_\Omega u^2\,dx.$$

Então, para σ_0 tal que

$$\sigma_0 - \frac{m\epsilon^2}{2} - m > 0$$

temos que existe uma constante $C_1 > 0$ (dependente de σ_0) tal que

$$L_{\sigma_0}u(u) = \mathcal{L}_{\sigma_0}(u,u) \geq C_1\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Isto mostra que $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ é coerciva♣

No que segue, fixamos $\sigma = \sigma_0$ obtido na demonstração acima.

Pela redução já feita ao problema de Dirichlet generalizado, devemos resolver o problema reduzido

$$(\text{DR}) \qquad \begin{cases} Lu = g + \sum_j \partial_j f_j \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega), \end{cases}$$

Isto é, devemos achar $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo

$$Lu(v) = \mathcal{L}(u,v) = F(v), \text{ para toda } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em outras termos, devemos resolver no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega)$ a equação

$$Lu = F, \text{ dada } F \in \mathcal{H}^*.$$

Fixado σ tal que $\mathcal{L}_\sigma$ é coerciva, estudemos a equação

$$\mathcal{L}_\sigma(u,v) = \mathcal{L}(u,v) + \sigma \int_\Omega uv\,dx. \tag{4.4.3}$$

Seja

$$J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \text{ dado por } Ju(v) = \int_\Omega uv\,dx.$$

Lema. *A aplicação $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$ é compacta.*

Prova.

◇ Podemos fatorar $J = J_1 \circ J_2$, onde

$$\begin{cases} J_2 : \mathcal{H} \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ é a inclusão } J_2(u) = u \\ \text{e} \\ J_1 : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^* \text{ é dada por } J_1(u)(v) = \int_\Omega uv\,dx. \end{cases}$$

◇ Pelo *teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov*, item (a) [vide capítulo 3, seção 3.9 - resultados de compacidade], a inclusão $J_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta se $n > 2$. Se $n = 2$, dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ também a inclusão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta (cheque, vide Lista 5 de exercícios).

◇ A aplicação J_1 é contínua (cheque, é trivial). Logo, $J_1 \circ J_2$ é compacta♣

Pela identidade (4.4.3) e as notações $L_\sigma u(v) = \mathcal{L}_\sigma(u,v)$ e $Lu(v) = \mathcal{L}(u,v)$, obtemos $L_\sigma u(v) = Lu(v) + \sigma Ju(v)$ e então a identidade entre funcionais lineares

$$Lu = L_\sigma u - \sigma Ju. \tag{4.4.4}$$

Donde segue

$$Lu = F \iff \boxed{L_\sigma u - \sigma Ju = F}.$$

Apliquemos os três lemas acima.

Pelos dois primeiros destes três lemas (i.e., o funcional linear F é contínuo e a forma L_σ é coerciva) e pelo *corolário ao lema de Lax-Milgram* [vide capítulo 1, seção 1.8 - o lema de Lax-Milgram e a alternativa de Fredholm, vide também Lista 5 de Exercícios] temos que

$$L_\sigma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \text{ é bicontínua.}$$

Assim, a equação $L_\sigma u - \sigma J u = F$ é equivalente a

$$u - \sigma(L_\sigma)^{-1} J u = (L_\sigma)^{-1} F.$$

Pelo terceiro e último dos três lemas acima (i.e., J é compacta), segue que

$$T = (L_\sigma)^{-1} J$$

é compacta.

Já provamos a unicidade da solução, em $\mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega)$, da equação homogênea

$$Lu = 0$$

e [notando que $Lu = L_\sigma(u - \sigma T u)$] é clara a equivalência

$$Lu = 0 \Longleftrightarrow u - (\sigma T)u = 0.$$

Então, pela *Alternativa de Fredholm* (vide seção 1.8), a equação não homogênea

$$u - (\sigma T)u = (L_\sigma)^{-1} F.$$

tem solução (única) $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Donde, completando a prova do teorema *existência e unicidade para o problema de Dirichlet generalizado*, concluímos que

$$Lu = F \clubsuit$$

A seguir, analisamos o comportamento espectral do operador L. Computemos o **adjunto formal** de L.

Dadas duas funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, utilizemos a notação usual para distribuições

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi\psi \, dx.$$

Dado um operador L, seu adjunto formal é dado pela fórmula

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle .$$

Computemos L^*. Temos

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v \rangle &= \int \big[\textstyle\sum \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum \partial_i(b_i u) + \sum c_i \partial_i u + du \big] v \, dx \\
&= \int \big[-\textstyle\sum (a_{ij}(\partial_j u)(\partial_i v) - \sum b_i u \partial_i v - \sum u \partial_i(c_i v) + duv \big] dx \\
&= \int \big[\textstyle\sum u\partial_j(a_{ij}\partial_i v) - \sum u \partial_i(c_i v) - \sum u b_i \partial_i v + udv \big] dx \\
&= \int u \big[\textstyle\sum \partial_j(a_{ij}\partial_i v) - \sum \partial_i(c_i v) - \sum b_i \partial_i v + dv \big] dx.
\end{aligned}$$

Donde segue a fórmula para o adjunto formal

$$\boxed{L^* v = \textstyle\sum \partial_i(a_{ij}\partial_j v) - \sum \partial_i(c_i v) - \sum b_i \partial_i v + dv}.$$

Então, segue

$$\mathcal{L}^*(u,v) = -\langle L^* u, v \rangle = -\langle u, Lv \rangle = -\langle Lv, u \rangle = \mathcal{L}(v,u).$$

Resunindo encontramos

$$\boxed{\mathcal{L}^*(u,v) = \mathcal{L}(v,u)}.$$

Supondo ambas u e v no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$, concluímos que L^* é também o adunto de L no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Pela equação (4.4.4) temos

$$L_\sigma u = Lu + \sigma J u.$$

Trocando L por L_γ nos argumentos acima encontramos

$$\begin{aligned} L_\gamma u = F &\Longleftrightarrow Lu + \gamma Ju = F \\ &\Longleftrightarrow L_\sigma u + (\gamma - \sigma)Ju = F \\ &\Longleftrightarrow u + (\gamma - \sigma)(L_\sigma)^{-1}Ju = (L_\sigma)^{-1}F \end{aligned}$$

Como antes, definimos

$$\boxed{T = (L_\sigma)^{-1}J}.$$

Segue

$$\begin{aligned} L_\gamma u = F &\Longleftrightarrow (\gamma - \sigma)\big[(\gamma - \sigma)^{-1}u + Tu\big] = (L_\sigma)^{-1}F \\ &\Longleftrightarrow (\gamma - \sigma)^{-1}u + Tu = (\gamma - \sigma)^{-1}(L_\sigma)^{-1}F. \\ &\Longleftrightarrow (\sigma - \gamma)^{-1}u - Tu = (\sigma - \gamma)^{-1}(L_\sigma)^{-1}F. \end{aligned}$$

Ainda mais, o adjunto $T*$ da aplicação compacta T é

$$T* = J^*(L_\sigma^*)^{-1}.$$

Podemos então aplicar a *Alternativa de Fredholm* e obtemos o resultado abaixo.

Teorema (Descrição Espectral de L). *Suponhamos que o operador L satisfaz*

$$(4.4.5) \qquad \begin{cases} \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \\ |A|^2 \leq \Lambda^2 \qquad e \qquad \lambda^{-2}(|b|^2 + |c|^2) + \lambda^{-1}|d| \leq \nu^2, \quad \text{ambas em } \Omega. \end{cases}$$

Então, existe um conjunto enumerável e discreto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ tal que dado

$$\gamma \notin \Gamma$$

então cada um dos problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} L_\gamma u = g + \sum_i \partial_i f_i \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} L_\gamma^* u = g + \sum_i \partial_i f_i \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde as funções $g, f_1, \ldots, f_n$ estão em $L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, tem solução única.

Ainda mais, dado $\gamma \in \Gamma$, os subespaços das soluções dos problemas homogêneos

$$\begin{cases} L_\gamma u = 0 \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} L_\gamma^* u = 0 \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem dimensão finita, e não nula, e o problema

$$\begin{cases} L_\gamma u = g + \sum \partial_i f_i \\ \\ u = \varphi \ \text{em} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

é solúvel se e somente se temos

$$(4.4.6) \int_\Omega \Big[\big(g - \langle c, \nabla\varphi \rangle - d\varphi + \sigma\varphi \big) v - \big(\langle f, \nabla v \rangle - \langle A\nabla\varphi, \nabla v \rangle - \varphi \langle b, \nabla\varphi \rangle \big) \Big] dx = 0,$$

para toda v satisfazendo

$$\begin{cases} L_\gamma^* v = 0 \\ \\ v = 0 \ \text{em} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Ainda mais, se vale a condição

$$\int_\Omega [dv - \langle b, \nabla\varphi \rangle] \, dx \leq 0, \ \text{para toda} \ 0 \leq \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

então temos

$$\Gamma \subset (-\infty, 0).$$

Prova. Esboço.

- Pela alternativa de Fredholm, existe um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ sem pontos de acumulação, com a possivel exceção da origem $k = 0 \in \mathbb{R}$, tal que para cada

$$\gamma - \sigma \notin K$$

  a equação

$$(\sigma - \gamma)^{-1} u - Tu = (\sigma - \gamma)^{-1} (L_\sigma)^{-1} F$$

  tem solução única. Consideramos então o conjunto

$$\Gamma = \sigma + K.$$

- Se $k = \gamma - \sigma \in K$, pela alternativa de Fredholm segue que os subespaços

$$\text{kernel}(kI - T) \ \text{ e } \ \text{kernel}(kI - T^*)$$

  tem dimensão finita . Logo, o espaço solução para as equações correspondentes aos operadores L_γ e L_γ^* tem dimensão finita.

- Complete a prova ♣

O operador
$$G_\gamma = (L_\gamma)^{-1} : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}, \text{ onde } \gamma \notin \Gamma,$$
é o **Operador de Green** para o problema de Dirichlet correspondente ao operador L_γ. Pela *Alternativa de Fredholm* (basta a enunciada para espaços reais e normados, vide capítulo 1 - seção 1.8) segue que o operador G_γ é contínuo. Consequentemente temos as estimativas abaixo.

Corolário. *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo*
$$\begin{cases} L_\gamma u = g + \sum \partial_i f_i \\ \\ u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{com } \gamma \notin \Gamma.$$
Então, existe uma constante C dependendo apenas de L, γ e Ω tal que
$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\Big(\|g\|_2 + \sum \|f_i\|_2 + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}\Big).$$

Prova. Exercício ♣

Segue do teorema *Descrição espectral de L* que o teorema *Existência e unicidade para o problema de Dirichlet generalizado* continua válido (cheque) se trocarmos b_i por $-c_i$ na "condição de negatividade"
$$\int_\Omega \left(dw - \sum_i b_i \partial_i w\right) dx \leq 0 \text{ se } 0 \leq w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

4.5 Diferenciabilidade das Soluções Fracas

Analogamente às seções anteriores, consideremos o operador L dado por

$$Lu = \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum \partial_i(b_i u) + \sum c_i \partial_i u + du, \text{ com } u \in W^{1,2}(\Omega),$$

e suponhamos L estritamente elíptico. Isto é, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notações. Denotamos $C^{0,1}(\Omega)$, o espaço das funções lipschtzianas em Ω. Analogamente, denotamos $C^{0,1}(\overline{\Omega})$, o espaço das funções lipschtzianas em $\overline{\Omega}$.

Exercícios. Seja $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ de Lipschitz.

(1) **(A condição de Lipschitz implica diferenciabilidade fraca.)** A função ψ é absolutamente contínua nos segmentos contidos em Ω e paralelos aos eixos coordenados e, pelo *teorema fundamental do cálculo para a integral de Lebesgue*, existem as derivadas parciais [i.e., existem q.t.p. em Ω] e estas são limitadas [i.e., pertencem a $L^\infty(\Omega)$]. Então, ψ é fracamente derivável. Assim, ψ é contínua e $\psi \in W^1(\Omega)$.

(2) **(Quociente de diferenças.)** Sejam $h \in \mathbb{R}^*$ e fixemos e_k o k-ésimo vetor canônico. Dada $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, seja

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}.$$

Consideremos $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\varphi \in C^1_c(\Omega)$. Verifique

$$(a) \qquad \int_\Omega u\Delta^{-h}\varphi\, dx = -\int_\Omega (\Delta^h u)\varphi\, dx.$$

Consideremos duas funções reais, u e v. Verifique

$$(b) \qquad \Delta^h(uv)(x) \; = \; u(x + he_k)\Delta^h v(x) + v(x)\Delta^h u(x).$$

(3) **(A regra do produto com uma função de Lipschitz.)** Consideremos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e uma função de Lipschitz $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$. Então,

$$\begin{cases} \psi u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e} \\ \nabla(\psi u) = \psi\nabla u + u\nabla\psi. \end{cases}$$

Dica. Vide dicas aos três exercícios na Lista 6 de Exercícios.

Teorema (Regularidade). *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca da equação*

$$Lu = f \text{ em } \Omega,$$

onde L é estritamente elíptico, os coeficientes a_{ij}, b_i, onde $1 \le i,j \le n$, são de Lipschitz (uniformemente) em Ω, os coeficientes $c_1,\ldots,c_n$ e d pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e a função f está em $L^2(\Omega)$. Então, para todo $O \subset\subset \Omega$ temos que $u \in W^{2,2,}(O)$ e

$$\|u\|_{W^{2,2}(O)} \le C\big(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

onde

$$C = C(n,\lambda,K,d'),\ \ K = \max\left\{\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|b_i\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i\|_\infty, \|d\|_\infty\right\} \text{ e } d' = d(O,\partial\Omega).$$

Ainda mais, u satisfaz a equação

$$Lu = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j u + \left(\sum \partial_j a_{ij} + b_i + c_i\right)\partial_i u + \left(\sum \partial_i b_i + d\right)u = f$$

q.t.p. em Ω.

Prova.

- Funções de Lipschitz se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$ e suas derivadas fracas existem em Ω e são limitadas (vide exercícios acima e Lista 6 de Exercícios).

- Como as funções a_{ij} e b_i são todas de Lipschitz, pela *regra do produto com uma função de Lipschitz* (vide exercício prévio a esta prova) é claro que

$$Lu = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum(\partial_j a_{ij} + b_i + c_i)\partial_i u + \sum(\partial_i b_i + d)u = f.$$

- Seja $\varphi \in C^1_c(\Omega)$. Pela definição de solução fraca temos (omitindo Σ)

$$Lu = f \Leftrightarrow \int_\Omega [-a_{ij}\partial_j u\partial_i\varphi + (\partial_i b_i)u\varphi + b_i(\partial_i u)\varphi + c_i\partial_i u\varphi + du\varphi]\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega a_{ij}\partial_j u\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega [(b_i + c_i)\partial_i u + (\partial_i b_i)u + du - f]\,\varphi\,dx.$$

Por hipótese, temos $Lu = f$. Segue então

$$\int_\Omega \sum a_{ij}\partial_j u\partial_i\varphi = \int_\Omega g\varphi\,dx, \text{ para toda } \varphi \in C^1_c(\Omega), \tag{4.5.1}$$

com

$$\begin{cases} g = \sum(b_i + c_i)\partial_i u + \sum(\partial_i b_i)u + du - f \text{ em } L^2(\Omega) \\ \\ \|g\|_2 \le (3n+1)K\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2. \end{cases}$$

- ⋄ Suponhamos $2|h| < d\big(\mathrm{supp}(\varphi), \partial\Omega\big)$. Fixemos e_k, o k-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$, onde $1 \leq k \leq n$. Seguindo a notação apresentada no Exercício 2 acima, troquemos na fórmula (4.5.1) a função φ pelo quociente de diferenças

$$\Delta^{-h}\varphi.$$

Obtemos então [por (4.5.1) e por tal exercício]

$$\begin{aligned}\sum \int_\Omega \Delta^h(a_{ij}\partial_j u)\partial_i \varphi \, dx &= -\sum \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \Delta^{-h}\partial_i\varphi \, dx \\ &= -\sum \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i \Delta^{-h}\varphi \, dx \\ &= -\int_\Omega g\Delta^{-h}\varphi \, dx.\end{aligned}$$

Obtemos também (pelo mesmo exercício)

$$\Delta^h(a_{ij}\partial_j u)(x) = a_{ij}(x+he_k)\Delta^h\partial_j u(x) + \Delta^h a_{ij}(x)\partial_j u(x).$$

Segue então

$$\begin{aligned}\sum \int_\Omega a_{ij}(x+he_k)\partial_j\Delta^h u(x)\partial_i\varphi(x)\, dx &= \sum \int_\Omega a_{ij}(x+he_k)\Delta^h\partial_j u(x)\partial_i\varphi(x)\, dx \\ &= \sum \int_\Omega \big[\Delta^h(a_{ij}\partial_j u) - \Delta^h a_{ij}\partial_j u\big]\partial_i\varphi \, dx \\ &= -\int_\Omega g\Delta^{-h}\varphi\, dx - \sum\int_\Omega \Delta^h a_{ij}\partial_j u \partial_i\varphi\, dx \\ &= -\int_\Omega g\Delta^{-h}\varphi\, dx - \int_\Omega \langle \widetilde{g}, \nabla\varphi\rangle \, dx,\end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{g} = (\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_n) \quad \text{com } \widetilde{g}_i = \sum_j \Delta^h a_{ij}\partial_j u.$$

Pelo lema *estimativa para o quociente de Newton* [vide seção 3.10 - diferenças de quociente] para $|h|$ pequeno o suficiente temos $\|\Delta^{-h}\varphi\|_2 \leq \|\nabla\varphi\|_2$ (cheque). Temos também $|\Delta^h a_{ij}| \leq K$ cheque). $\|\widetilde{g}\|_2 \leq$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum \int_\Omega a_{ij}(x+he_k)\partial_j\Delta^h u(x)\partial_i\varphi(x)\, dx &\leq \int_\Omega \left|g\Delta^{-h}\varphi + \langle\widetilde{g}, \nabla\varphi\rangle\right| dx \\ &(\|g\|_2 + \|\widetilde{g}\|_2)\, \|\nabla\varphi\|_2 \\ &\leq C(n)K\|\nabla\varphi\|_2.\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1.] R. A. Adams and Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003.

[2.] A. Bressan, *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, 2012, Univ. of Pennsylvania. `https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/sobolev-notes.pdf`

[3.] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2011, Springer.

[4.] M. M. Cavalcanti e V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Ed. Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[5.] Driver, B. K., *Lecture Notes on PDE*, University of California (San Diego).

[6.] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010. `http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/lecture_notes.htm`

[7.] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, second edition, Princeton University Press, 1995.

[8.] —-, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[9.] Gilioli, A., *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, 10 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975, IMPA.

[10.] Gilbard D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, reprint of the 1998 edition, 2001.

[11.] Hunter, J. *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, Univ. of California (Davis). See `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/ch3.pdf`
On PDE, see `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/pdes.html`

[12.] Royden, H. L. - Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, 4th ed, Prent. Hall, 2010.

[13.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[14.] —, *Functional Analysis*, 2nd ed., Int. Ser. Pure and Appl. Math., 1991.

[15.] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1980.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, M. Deker, 1977.