EDP's ELÍPTICAS - MAT5812 - IMEUSP - 2017

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas baseiam-se em Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (2001) e, como material de apoio, em G. B. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed, John Wiley & Sons. Agradeço particularmente às notas de aula do curso sobre os mesmos tópicos e ministrado por J. C. D. Fernandes.

Capítulo 1

ESPAÇOS L^p e de HILBERT

Capítulo 2

PRODUTO DE CONVOLUÇÃO, APROXIMAÇÃO E REGULARIZAÇÃO

Capítulo 3

ESPAÇOS DE SOBOLEV

3.1 Introdução

Doravante todas as funções são reais e

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_p < \infty\}.$$

Lema (Localização). *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int f(x)\varphi(x)dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então, $f = 0$ *(isto é, nula em quase todo ponto ou, abreviadamente, q.t.p.).*

Provas. Seja ρ a função *curva do sino.*

(1) Dado K compacto em Ω, as hipóteses mostram

$$(f * \rho_\epsilon)(z) = \int f(x)\rho_\epsilon(z - x)dx = 0 \text{ para quaisquer } z \in K \text{ e } \epsilon < d(K, \partial\Omega).$$

No capítulo 2 provamos $f * \rho_\epsilon \xrightarrow{L^1(K)} f$. Logo, $f = 0$ em K e então $f = 0$.

(2) (Instrutiva e evitando convolução). Vide Lista de Exercícios 2 - Extra ♣

A cada função $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ associamos um funcional linear

$$T_f : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dado por } T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

O lema acima mostra que a aplicação $f \mapsto T_f$ é injetora (cheque). Tal associação permite generalizar o conceito de função.

O espaço dos funcionais lineares contínuos (com uma topologia adequada sobre $C_c^\infty(\Omega)$, definida logo mais nesta seção) é dito **Espaço das Distribuições** $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou **Espaço das Funções Generalizadas** $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Uma entre várias vantagens das distribuições é que toda distribuição é infinitamente derivável. Em particular, toda função localmente integrável é infinitamente derivável no sentido de distribuições.

Vejamos. Consideremos uma função $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ infinitamente derivável em $\mathbb{R}^n$ e a distribuição

$$T_{\partial_1 f} \text{ associada à derivada parcial } \partial_1 f = \partial_{x_1} f.$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (digamos que suportada no "cubo" $[-r,r]\times\cdots\times[-r,r] = [-r,r]^n$). Temos $\varphi \equiv 0$ na fronteira de $[-r,r]^n$. Pela fórmula de integração por partes segue

$$\int f(x)\partial_1\varphi(x)dx = -\int \partial_1 f(x)\varphi(x)dx = -T_{\partial_1 f}[\varphi].$$

Esta fórmula mostra como definirmos a derivada de uma distribuição. Definimos

$$(\partial_j u)[\varphi] = -u(\partial_j\varphi).$$

Agora, apresentemos a notação frequente. Sejam uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e uma função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Indicamos o valor da distribuição u na função φ por

$$\langle u, \varphi \rangle .$$

Segue então,

$$\langle \partial_j u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_j\varphi \rangle .$$

Assim, dado um multí-índice α encontramos

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha\varphi \rangle .$$

A seguir, descrevamos a convergência (topologia) em $C_c^\infty(\Omega)$.

Convergência no Espaço das Funções Testes $C_c^\infty(\Omega)$. Uma sequência de funções $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições valem.

- Existe K compacto em Ω tal que temos $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ para todo n.
- $\partial^\alpha\varphi_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} \partial^\alpha\varphi$, para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo. Seja f uma função em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Prova.

Como o funcional T_f é linear, basta provar a continuidade na origem. Seja $\varphi_n \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} 0$ e K compacto em Ω com $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ para todo n. Então,

$$|\langle Tf, \varphi_n \rangle| = \left| \int_\Omega f\varphi_n \, dx \right| \leq \|\varphi_n\|_u \int_K |f| \, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0 \clubsuit$$

Exemplo (A distribuição delta de Dirac). Seja $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

É trivial ver que δ é uma distribuição (um funcional linear contínuo). Cheque$\clubsuit$

Definição. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que u é uma* **distribuição regular** *se existe uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo $u = T_f$. É usual a identificação* $\boxed{f \equiv T_f.}$

Exemplo (A distribuição δ não é regular). [A distribuição δ é também dita uma medida de Dirac (com uma unidade de massa concentrada na origem).]

Prova.

Suponhamos que exista f locamente integrável satisfazendo

$$\int f\varphi \, dx = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Consideremos o aberto $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então, temos

$$\int f\varphi \, dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pelo *lema de localização* abrindo esta seção temos $f = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Donde segue $f = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ e $T_f = 0$. Logo, $\delta = T_f = 0$↯

Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, a distribuição delta no ponto a é definida por

$$\boxed{\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).}$$

Operações com distribuições estendem as operações usuais com funções.

Exemplo (Translações e distribuições). Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e o operador translação τ_{-a}. Sejam f e φ funções tais que as integrais abaixo existam. Temos

$$\int \tau_a f(x)\varphi(x)dx = \int f(x-a)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi(y+a)dy = \int f(y)\tau_{-a}\varphi(y)dy.$$

Então, dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\langle \tau_a u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

Muitos textos apresentam algumas das operações com distribuições como se estas fossem funções (útil às vezes, esta prática requer atenção). Por exemplo, quanto à operação translação para uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alguns escrevem

$$\tau_a u = u(x-a) \quad \text{e} \quad \int u(x-a)\varphi(x)dx = \int u(y)\varphi(y+a)dy,$$

ao invés de

$$\langle \tau_a u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-a}\varphi \rangle .$$

Comentário extra (adequado a quem está familiarizado com medida abstrata).

- **Definições.** Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e

  $$\mathcal{B}(\Omega) \text{ a coleção dos borelianos em } \Omega,$$

  esta é a σ-álgebra gerada pelos abertos de Ω (isto é, a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de Ω).

  Uma medida

  $$\mu : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty]$$

  é dita uma **medida de Radon** sobre Ω se satisfaz as três condições abaixo.

  (1) Finitude sobre compactos:

  $$\mu(K) < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto (contido em } \Omega).$$

  (2) Regularidade interior:

  $$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ com } K \text{ compacto}\}.$$

  (3) Regularidade exterior:

  $$\mu(E) = \inf\{\mu(O) : E \subset O \text{ com } O \text{ aberto (contido em } \Omega)\}.$$

- Seja μ uma medida de Radon no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A expressão

  $$\langle I_\mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

  define uma distribuição $I_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

A distribuição I_μ é regular $\big[$isto é, existe uma função $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfazendo a identidade

$$\langle I_\mu, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega g\,\varphi\,dx, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\big]$$

se e somente se a medida μ é localmente absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue m (segue do *Teorema de Radon-Nikodym* - vide Folland [8, p. 90] ou

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`, p. 19).

Nestas condições (isto é, se a distribuição I_μ é regular ou se a medida μ é localmente absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue m), a derivada de Radon-Nikodym de μ em relação a m é dada por uma função Lebesgue mensurável f tal que

$$f = \frac{d\mu}{dm} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Tal função localmente Lebesgue-integrável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (utilizemos a regra da cadeia para medidas, vide Folland [8, p. 93] ou

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`, p. 24)

satisfaz

$$\begin{aligned}\langle I_\mu, \varphi \rangle &= \int\limits_\Omega \varphi\,d\mu \\ &= \int\limits_\Omega \varphi \frac{d\mu}{dm} dm \\ &= \int\limits_\Omega f\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{I_\mu = T_f.}$$

- $\circ$ Dizemos que $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,\infty]$ é singular com respeito à medida de Lebesgue m (ou que μ e m são mutuamente singulares) se existem dois borelianos E e F tais que $E \cap F = \varnothing$ e $E \cup F = \Omega$, com $\mu(E) = 0$ e $m(F) = 0$ (isto significa que μ "está concentrada em F" e que m "está concentrada em E").

- $\diamond$ Se $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,\infty]$ é singular com respeito a m (por exemplo, $\mu = \delta$) então o funcional I_μ não é uma distribuição regular.

Exemplo (A derivada da função de Heaviside: $H' = \delta$). A função

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é chamada função de Heaviside ou **função degrau unitário**. A função de Heaviside representa um sinal acionado em um certo instante e que então permanece ligado indefinidamente. Oliver Heaviside, desenvolveu o cálculo operacional (teoria das distribuições) estudando comunicações telegráficas.

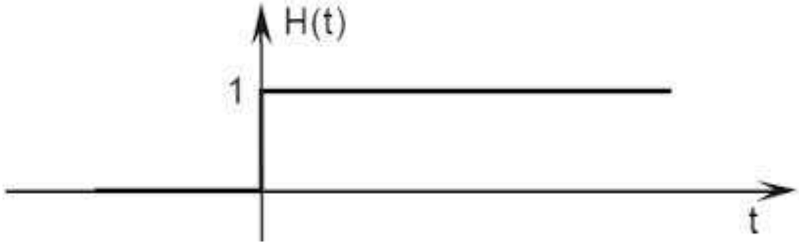

Figura 3.1: A função de Heaviside.

Prova.

Notemos que $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Por definição para derivadas de distribuições temos

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int H(t)\varphi'(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = -\varphi'\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \clubsuit \end{aligned}$$

O conceito *derivada no sentido de distribuições* é mais adequado que *derivada clássica* se empregamos a teoria da integral de Lebesgue (que abarca funções que assumem valores $\pm\infty$ e mesmo não definidas em um conjunto de medida nula).

A característica que torna o estudo das distribuições muito importante é que muitas equações clássicas não tem solução clássica (isto é, não tem uma função clássica como solução) porém tem solução no sentido de distribuições.

Não aprofundamos aqui um estudo da teoria das distribuições pois neste texto nos apoiaremos no conceito **Derivadas Fracas**, que nos será suficiente. Para a teoria das distribuições, vide a referência Cavalcanti & Cavalcanti [4]. Para uma bem leve introdução à teoria das distribuições via Cálculo I, vide

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Fourier6.pdf`.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Apêndice: Caracterização da Continuidade das Distribuições.

No espaço das funções testes $C_c^\infty(\Omega)$, definimos a família de **normas**

$$p_j(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \text{ para } j = 1, 2, \ldots .$$

Teorema (Caracterização da continuidade de uma distribuição). *Consideremos $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Então, T é contínuo (no sentido de distribuições) se e somente para todo compacto $K \subset \Omega$ existem uma constante $C > 0$ e uma norma p_N tais que temos*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C p_N(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ com supp}(\varphi) \subset K.$$

[Isto é, T é contínuo em relação à norma p_N (respeitada a condição sobre K).]

Prova.

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a implicação é falsa. Então, existe um compacto K satisfazendo a seguinte condição: para todo natural j, existe uma função teste φ_j (suportada em K) tal que

$$|\langle T, \varphi_j\rangle| > j p_j(\varphi_j).$$

Então, cada função teste

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{|\langle T, \varphi_j\rangle|}$$

tem suporte em K. Dividindo a última desigualdade por $|\langle T, \varphi_j\rangle|$ segue

$$1 > j p_j(\psi_j).$$

Fixemos um arbitrário multi-índice α. Para todo $j \geq |\alpha|$ temos

$$\|\partial^\alpha \psi_j\|_\infty \leq p_j(\psi_j) < \frac{1}{j}.$$

Logo, cada ψ_j está suportada em K e $\partial^\alpha \psi_j \to 0$ uniformemente se $j \to \infty$.

A continuidade de T garante

$$\langle T, \psi_j\rangle \to 0, \quad \text{porém} \quad |\langle T, \psi_j\rangle| = 1 \ \lightning$$

3.2 Derivadas Fracas

Já vimos que toda distribuição é infinitamente derivável. Assim, dada uma função f localmente integrável, a distribuição regular T_f é infinitamente derivável. Cabe então questionarmos se as derivadas (parciais) de T_f são distribuições regulares. Isto é, fixado ∂_j, existe uma função $g_j \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\partial_j(T_f) = Tg_j$?

Então, um tanto imprecisamente, começamos a introduzir o conceito *derivada fraca*. Uma função f é dita *fracamente diferenciável* se a sua derivada - no sentido de distribuições - é uma distribuição regular. Ainda, sua *derivada fraca* é a função localmente integrável correspondente à sua derivada no sentido de distribuições.

Exemplo. Seja a função $f(t) = 0$, se $t \leq 0$, e $f(t) = t$ se $t \geq 0$. Seja $u = T_f$. Então

f não é derivável mas tem derivada fraca, a qual é a função de Heaviside H.

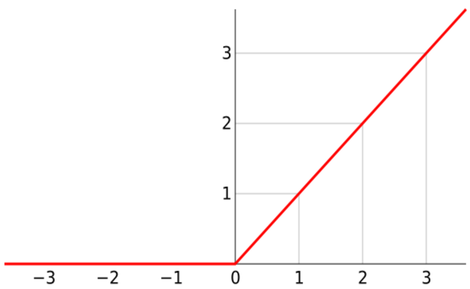

Figura 3.2: O gráfico da função "rampa" $t \mapsto f(t) = t^+ = \max(t, 0)$.

Prova.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função teste. Então,

$$\begin{aligned}\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} t\varphi'(t)dt &= -t\varphi(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\varphi(t)dt \\ &= \langle T_H, \varphi\rangle \clubsuit\end{aligned}$$

Já vimos que δ não é localmente integrável e também que

$$(t^+)' = H, \quad H' = \delta \quad \text{e} \quad (t^+)'' = \delta.$$

Pode ser provado (vide Rudin [14], p. 167) que, localmente, toda distribuição é a derivada de uma função contínua [em particular, já mostramos que $\delta = (t^+)''$]. Isto é, dada uma distribuição u em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e um compacto K contido em Ω, então existe uma função f contínua em Ω e um multi-índice α tal que temos

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx, \text{ se } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \mathrm{supp}(\varphi) \subset K.$$

Justificados por tais observações, formalizemos o conceito **derivada fraca**.

Definição. *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, uma função $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então, uma função $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-**ésima derivada fraca** de g se*

$$\boxed{\int_\Omega h\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g\partial^\alpha\varphi\, dx, \ \text{para toda } \varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega).}$$

Neste caso, escrevemos (logo mais veremos a unicidade da derivada fraca)

$$\boxed{h = \partial^\alpha g}$$

e dizemos que a α-ésima derivada de g existe, como uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$. [Com a notação acima, destaquemos que no sentido de distribuições temos

$$\langle h, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).]$$

Linearidade para derivadas fracas. Suponhamos que $\partial^\alpha h_1 = g_1$ e $\partial^\alpha h_2 = g_2$. Vale a identidade $\partial^\alpha(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, para quaisquer escalares λ_1 e λ_2

Exemplo. Seja $t \mapsto |t|$ a função módulo na reta. A derivada fraca de $t \mapsto |t|$ é

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0,\\ 0, & \text{se } t = 0,\\ -1, & \text{se } t < 0.\end{cases}$$

Prova. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sgn}(t)\varphi(t)dt &= -\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty}\varphi(t)dt\\ &= -\left(t\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} t\varphi'(t)dt\right) + t\varphi(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\varphi'(t)dt\\ &= -\int |t|\varphi'(t)dt \clubsuit\end{aligned}$$

Definições e Notações. *Seja u uma função [assumidamente em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$].*

- *u é* **fracamente diferenciável** *se suas derivadas fracas de ordem 1 existem.*

- *u é k-***vezes fracamente diferenciável** *se suas derivadas fracas de ordem $1, \dots, k$ existem.*

- *O espaço (linear) das funções k-vezes fracamente diferenciáveis é $W^k(\Omega)$. Isto é,*

$$\boxed{W^k(\Omega) = \left\{u \in L^1_{loc}(\Omega) :\ \partial^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \le k\right\}.}$$

Brevemente, $\boxed{W^1(\Omega) \text{ é o conjunto das funções fracamente diferenciáveis}}$.

Notemos que $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. O conceito *derivada fraca* então estende o conceito clássico de derivada, com a importante particularidade de preservar a fórmula de integração por partes. Ainda, $W^k(\Omega)$ é definido via integração local.

Em geral, uma derivada fraca pode não existir. De fato, mostramos $H' = \delta$ no sentido de distribuições e que δ não é uma função em L^1_{loc}. Por outro lado, se a derivada fraca existe então ela é única (a menos de um conjunto de medida zero).

Propriedade (Unicidade da derivada fraca). *Sejam $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sejam g e h, ambas em $L^1_{loc}(\Omega)$ e ambas α-ésimas derivadas fracas de f. Então,*

$$g = h.$$

Prova. Seja $\varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega)$. Por hipótese temos

$$\int_\Omega g\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi\, dx = \int_\Omega h\varphi\, dx.$$

Pelo *lema de localização* abrindo a seção anterior (3.1) segue $g = h$♣

Propriedade (Comutatividade da derivação fraca). *Sejam $f \in W^k(\Omega)$ e dois multi-índices α e β, ambos em $\mathbb{N}^n$, tais que $|\alpha| + |\beta| \le k$. Então,*

$$\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^\beta \partial^\alpha f = \partial^{\alpha+\beta} f.$$

Prova. Seja $\varphi \in C_c^{|\alpha+\beta|}(\Omega)$. Logo, $\partial^\beta \varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega)$. Por hipótese temos

$$\begin{aligned}\int (\partial^\alpha f)(\partial^\beta \varphi)\, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial^{\alpha+\beta}\varphi)\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int (\partial^{\alpha+\beta} f)\, \varphi\, dx = (-1)^{|\beta|} \int (\partial^{\alpha+\beta} f)\, \varphi\, dx.\end{aligned}$$

Portanto $\partial^\beta(\partial^\alpha f) = \partial^{\alpha+\beta} f$ e, trocando $\alpha \rightleftharpoons \beta$, então $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f$♣

Dado um aberto Ω (não necessariamente limitado), consideremos o aberto

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : D(x,\epsilon) \subset \Omega\}.$$

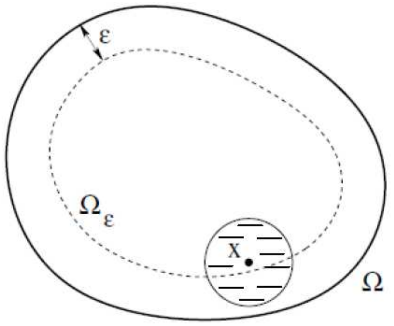

Figura 3.3: Os abertos Ω e Ω_ϵ (com Ω limitado) e o disco $D(x,\epsilon)$.

Lema (Derivada fraca, regularização e aproximação). *Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* α *tais que a derivada fraca* $\partial^\alpha u$ *existe. Valem a identidade "a derivada fraca da regularização é a regularização da derivada fraca" e a convergência abaixo.*

$$(a)\ \ \partial^\alpha(u_\epsilon) = (\partial^\alpha u)_\epsilon \ \text{em}\ \Omega_\epsilon. \qquad\qquad (b)\ \ \partial^\alpha(u_\epsilon) \xrightarrow{L^1_{loc}(\Omega)} \partial^\alpha u.$$

Prova.

(a) Sejam $O \subset\subset \Omega_\epsilon$ e $x \in O$. Então, $D(x,\epsilon) \subset \overline{O} + D(0,\epsilon)$ [um compacto em Ω]. Pela definição de regularização (capítulo 2, seção 2.5) segue

$$u_\epsilon(x) = \int\limits_{D(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_{\overline{O}+D(0,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy, \ \text{para todo } x \in O.$$

O *teorema da derivação sob o sinal de integral* (x a variável em O) garante

$$\partial^\alpha(u_\epsilon)(x) = \int_{\overline{O}+D(0,\epsilon)} (\partial^\alpha \rho_\epsilon)(x-y)u(y)dy = \int (\partial^\alpha\rho_\epsilon)(x-y)u(y)dy.$$

Para x em O e fixo, $y \mapsto \rho_\epsilon(x-y) \in C^\infty_c(\Omega)$ [atenção para este argumento]. Introduzindo a derivada fraca obtemos

$$\begin{aligned}\int (\partial^\alpha\rho_\epsilon)(x-y)u(y)dy &= (-1)^{|\alpha|}\int \partial^\alpha_y[\rho_\epsilon(x-y)](y)u(y)dy\\ &= \int \rho_\epsilon(x-y)\partial^\alpha u(y)dy\\ &= (\partial^\alpha u)_\epsilon(x).\end{aligned}$$

(b) Segue de (a), pois [vide lema *regularização e aproximação em* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *e em* $L^p(\Omega)$, capítulo 2 - seção 2.5] sabemos que $\rho_\epsilon * \partial^\alpha u \to \partial^\alpha u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$♣

Teorema (Caracterização das Derivadas Fracas). *Sejam u e v, em $L^1_{loc}(\Omega)$. Temos $v = \partial^\alpha u$ se e somente se existe uma sequência $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$u_m \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u \quad \text{e} \quad \partial^\alpha u_m \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} v.$$

Para a implicação não direta podemos supor $(u_m) \subset C^{|\alpha|}(\Omega)$.
Para a implicação direta podemos escolher $(u_m) \subset C^\infty_c(\Omega)$.
A sequência (u_m) independe de α.

Prova.

($\Leftarrow$) Seja $\varphi \in C^{|\alpha|}_c(\Omega)$. Supondo $(u_m) \subset C^{|\alpha|}(\Omega)$, integração por partes acarreta

$$\int (\partial^\alpha u_m)\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int u_m(\partial^\alpha \varphi)\, dx.$$

Pela *desigualdade de Hölder* e as hipóteses de convergência segue (cheque)

$$\int v\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int u(\partial^\alpha \varphi)\, dx \quad \text{e} \quad v = \partial^\alpha u.$$

($\Rightarrow$) Seja $O_m = \Omega_{\frac{1}{m}} \cap B(0,m)$ a exaustão usual para Ω. O lema *regularização e aproximação em $L^p_{loc}(\Omega)$* [capítulo 2 - seção 2.5] garante

$$u_{\frac{1}{m}} = u * \rho_{\frac{1}{m}} \in C^\infty\left(\Omega_{\frac{1}{m}}\right) \subset C^\infty(O_m).$$

Seja $\chi_m \in C^\infty_c(\Omega, [0,1])$ com $\chi_m \equiv 1$ em $\overline{O_{m-1}}$ e $\text{supp}(\chi_m) \subset O_m$. Portanto

$$\chi_m u_{\frac{1}{m}} \in C^\infty_c(\Omega).$$

Pelo lema *regularização e aproximação em $L^p_{loc}(\Omega)$* segue (cheque)

$$\chi_m u_{\frac{1}{m}} \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u \quad \text{e} \quad v_{\frac{1}{m}} \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} v.$$

Sejam $O \subset\subset \Omega$ e m grande, com $O \subset \overline{O_{m-1}} \subset O_m \subset \Omega_{\frac{1}{m}}$. O lema acima revela

$$\partial^\alpha\left(\chi_m u_{\frac{1}{m}}\right) = \partial^\alpha\left(u_{\frac{1}{m}}\right) = v_{\frac{1}{m}} \text{ em } O \ \text{ e então } \ \partial^\alpha\left(\chi_m u_{\frac{1}{m}}\right) \xrightarrow{L^1(O)} v.$$

A arbitrariedade de O garante

$$\partial^\alpha\left(\chi_m u_{\frac{1}{m}}\right) \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} v \clubsuit$$

Mostramos que a derivada fraca de um limite é o limite das derivadas fracas.

A caracterização acima de derivadas fracas é frequentemente dada como definição. As derivadas resultantes são então ditas **Derivadas Fortes**. Com o teorema acima muitos resultados do Cálculo Diferencial Clássico podem ser estendidos a derivadas fracas trivialmente, por aproximação.

Sejam N sequências $(v_n^1), \ldots, (v_n^N)$ em um espaço V. Abusando da notação, escrevemos $(v_n^1, \ldots, v_n^N) \xrightarrow{V} (v^1, \ldots, v^N)$ se $v_n^j \xrightarrow{n\to\infty} v^j$ em V e para $j = 1, \ldots, N$.

Propriedade (Regra do Produto, restrita). *Suponhamos que valha uma das duas alternativas abaixo.*

(a) $u \in W^1(\Omega)$ *e* $v \in C^1(\Omega)$. *(b)* u *e* v *pertencem a* $W^1(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Então, $uv \in W^1(\Omega)$ *e vale a fórmula*

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u,$$

com $u\partial_j v$ *e também* $v\partial_j u$ *em* $L^1_{loc}(\Omega)$ *[escrevemos* $u\nabla v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* $v\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$*].*

Prova.

(a) O teorema de caracterização exibe $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_m \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u \quad \text{e} \quad \nabla u_m \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} \nabla u.$$

Donde seguem (cheque)

$$u_m v \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} uv \quad \text{e} \quad \nabla(u_m v) = u_m \nabla v + v\nabla u_m \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u\nabla v + v\nabla u.$$

Como $u_m v \in C^1(\Omega)$, o teorema de caracterização (implicação "$\Leftarrow$") garante

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

(b) É trivial ver que uv, $u\nabla v$ e $v\nabla u$ são localmente integráveis (cheque).

Dado K compacto em Ω, existe $r > 0$ tal que $\widehat{K} = K + D(0,r) \subset \Omega_r \subset \Omega$.

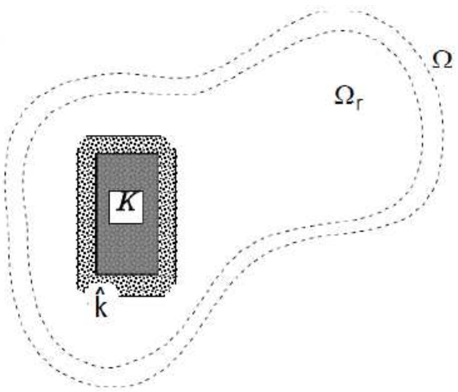

Figura 3.4: Os abertos Ω e Ω_r e os compactos K e $\widehat{K}$.

O teorema de caracterização exibe $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ e $(v_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_m \xrightarrow{L^1(K)} u \ \text{ e } \ \nabla u_m \xrightarrow{L^1(K)} \nabla u, \\ \\ v_m \xrightarrow{L^1(K)} v \ \text{ e } \ \nabla v_m \xrightarrow{L^1(K)} \nabla v. \end{cases}$$

Para todo $m > (1/r)$ e todo $x \in K$ encontramos

$$|u_m(x)| \leq \text{ess sup}\left\{|u(y)| : y \in \widehat{K}\right\},$$

donde segue

$$\|u_m\|_{L^\infty(K)} \leq M = \|u\|_{L^\infty(\widehat{K})} < \infty.$$

Analogamente, a sequência

$$(v_m)_{m > \frac{1}{r}}$$

é uniformemente essencialmente limitada em K.

A seguir, argumentemos no compacto K. Pelo *teorema convergência em L^p e convergência pontual* (seção 1.2 - fatos básicos de L^p) podemos supor que

$$(u_m),\ (\nabla u_m),\ (v_m) \text{ e } (\nabla v_m),$$

convergem pontualmente q.t.p. para respectivas $u, \nabla u, v$ e ∇v.

Mostremos que pelo TCD (*teorema da convergência dominada*) e que argumentando como na prova do TCDG (*teorema da convergência dominada generalizado*) - se preferir, aplique o TCDG (vide seção 1.2) - obtemos

$$\begin{cases} u_m v_m \xrightarrow{L^1(K)} uv \\ \text{e} \\ \nabla(u_m v_m) = u_m \nabla v_m + v_m \nabla u_m \xrightarrow{L^1(K)} u\nabla v + v \nabla u. \end{cases}$$

É trivial ver que a primeira convergência segue diretamente do TCD.

Quanto à segunda convergência, é claro que basta mostrarmos

$$u_m \nabla v_m \xrightarrow{L^1(K)} u \nabla v.$$

Pela definição da constante M encontramos

$$|u_m \nabla v_m - u \nabla v| \leq M|\nabla v_m| + M|\nabla v|.$$

Logo,

$$M|\nabla v_m| + M|\nabla v| - |u_m \nabla v_m - u\nabla v| \geq 0.$$

Pelo *lema de Fatou* segue

$$\int_K \liminf \big(M|\nabla v_m| + M|\nabla v| - |u_m \nabla v_m - u\nabla v| \big)\, dx \ \leq$$

$$\leq \ \liminf \int_K \big(M|\nabla v_m| + M|\nabla v| - |u_m \nabla v_m - u\nabla v| \big)\, dx.$$

No lado esquerdo desta desigualdade utilizemos convergência q.t.p. para o integrando. No direito, convergência em $L^1(K)$ e regras do $\liminf$. Segue

$$2M \int_K |\nabla v|\, dx \leq 2M \int_K |\nabla v|\, dx + \liminf \int_K -|u_m \nabla v_m - u\nabla v|\, dx.$$

Isto é,

$$\limsup \int_K |u_m \nabla v_m - u\nabla v|\, dx \leq 0.$$

Portanto

$$\int_K |u_m \nabla v_m - u\nabla v|\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Isto encerra a prova de

$$\begin{cases} u_m v_m \xrightarrow{L^1(K)} uv \\ \text{e} \\ \nabla(u_m v_m) = u_m \nabla v_m + v_m \nabla u_m \xrightarrow{L^1(K)} u\nabla v + v\nabla u. \end{cases}$$

Pelo *teorema de caracterização para derivadas fracas* segue $uv \in W^1(\Omega)$ e

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \clubsuit$$

Para uma outra prova da regra do produto (b), evitando o *teorema da convergência dominada gneralizado* vide Cavalcanti & Cavalcanti [4, pp. 112–115].

Classicamente, uma função diferenciável definida em um aberto conexo é constante se e somente se o seu gradiente é nulo em todo ponto. Vejamos que no contexto derivada fraca vale uma propriedade análoga.

Propriedade (Funções Constantes e Gradiente Fraco, em domínios). *Seja u em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, com Ω aberto e conexo. No contexto derivadas fracas temos*

$$\nabla u = 0 \text{ (q.t.p.)} \iff u \text{ é constante (q.t.p.).}$$

Prova.

◇ Se u é localmente constante (q.t.p), então u é constante (q.t.p). De fato, se c é uma constante e temos $u = c$ (q.t.p) em alguma bola, então o conjunto $X = \{x \in \Omega : u = c \text{ (q.t.p.) numa vizinhança de } x\}$ é não vazio, aberto e seu complementar $\Omega \setminus X$ é aberto (cheque). Logo, $X = \Omega$ e $u = c$ (q.t.p.) em Ω.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, seja a regularização $u_\epsilon = u * \rho_\epsilon$. Já vimos que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ e que $\partial_j(u_\epsilon) = (\partial_j u)_\epsilon = 0$, em Ω_ϵ e para cada j. Donde segue que u_ϵ é localmente constante no aberto, não necessariamente conexo, Ω_ϵ (vide figura). Assim, u_ϵ é constante em cada bola contida em Ω_ϵ.

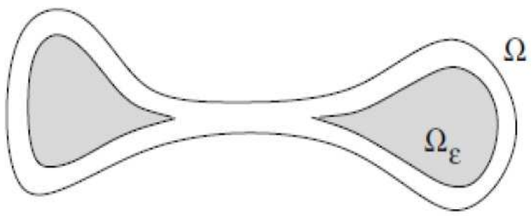

Figura 3.5: O aberto Ω é conexo mas Ω_ϵ não é conexo.

Já vimos que $u_\epsilon \to u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega_\epsilon)$ [vide seção 2.5 - *L^p_{loc} e regularização*] e que convergência em L^p (onde $1 \le p \le \infty$) implica convergência pontual q.t.p. para alguma subsequência [vide seção 1.5 - *teorema "convergência em L^p e convergência pontual"*].

Portanto, u é localmente constante (no sentido q.t.p.) no aberto Ω_ϵ (cheque). Logo, u é localmente constante (no sentido q.t.p.) no conexo Ω. Pelo comentário abrindo esta prova segue que u é constante em Ω.

($\Leftarrow$) O caso $u = 0$ é trivial (cheque). Podemos então supor $u = 1$.

Consideremos uma bola $B \subset\subset \Omega$ e $\varphi \in C^1_c(B)$. Então,

$$\int 1.\partial_1\varphi\, dx = \int \cdots \int \left(\varphi(t, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{t=\cdots}^{t=\cdots} \right) dx_2 \ldots dx_n = 0 = \int 0.\varphi\, dx.$$

Donde segue $\partial_1(1) = 0$ em B. É então trivial ver que temos $\nabla(1) = 0$ em toda bola $B \subset\subset \Omega$. Donde segue $\nabla(1) = 0$ q.t.p. no conexo Ω♣

Exemplo (A função de Cantor é contínua e admite derivada clássica definida em quase todo ponto, entretanto não tem derivada fraca).

Construamos por etapas o conjunto (triádico) de Cantor $C \subset [0,1]$. Mostremos que (entre várias de suas propriedades) C é compacto e de medida nula.

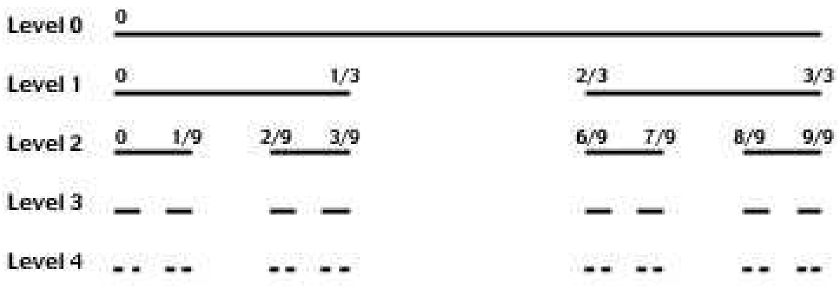

Figura 3.6: O conjunto triádico de Cantor.

Na etapa (level) 1 dividimos $[0,1]$ nos intervalos $I_1 = [0,1/3]$, $I_2 = (1/3,2/3)$ e $I_3 = [2/3,1]$ e removemos o intervalo (aberto) do meio. Na etapa 2, subdividimos I_1, e I_3, em três sub-intervalos e novamente removemos o intervalo (aberto) do meio. Assim procedendo, após infinitas etapas o que restar de $[0,1]$ é o conjunto de Cantor C. O conjunto removido é aberto e tem medida

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

Logo, C é compacto e $\mathsf{m(C) = 0}$.

Para mais propriedades do conjunto de Cantor, vide

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP1-2016.pdf`

Construamos a função de Cantor (cujo gráfico é a *Devil's staircase*, ou *Escada do Coisa Ruim*). Até a etapa n (incluindo-a), o conjunto removido é união disjunta de $2^n - 1$ intervalos abertos I_j^n, apresentados ordenados da esquerda para a direita, para $j = 1, \ldots, 2^n - 1$. Definamos funções $f_n : [0,1] \to [0,1]$ contínuas, por

$$\begin{cases} f_n = \frac{j}{2^n} \text{ em } I_j^n, \text{ para cada } 1 \leq j \leq 2^n - 1, f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ e} \\ f_n \text{ é linear no complementar.} \end{cases}$$

Cada função f_n é então monótona crescente e satisfaz as condições

$$f_{n+1} = f_n \text{ em } I_j^n, \text{ para cada } 1 \leq j \leq 2^n - 1, \text{ e } |f_n - f_{n+1}| < \frac{1}{2^n}.$$

Pelo Teste-M de Weierstrass, a sequência (f_n) converge uniformemente sobre $[0,1]$ a uma função $f:[0,1]\to[0,1]$. Tal f é monótona crescente, contínua e constante em cada intervalo removido na construção do conjunto de Cantor C.

Em cada intervalo removido, f é constante e sua derivada clássica é nula. O complementar da união dos intervalos removidos é o conjunto de Cantor e este tem medida nula. Donde segue

$$\boxed{\text{Derivada clássica } f' = 0 \text{ q.t.p. em } [0,1].}$$

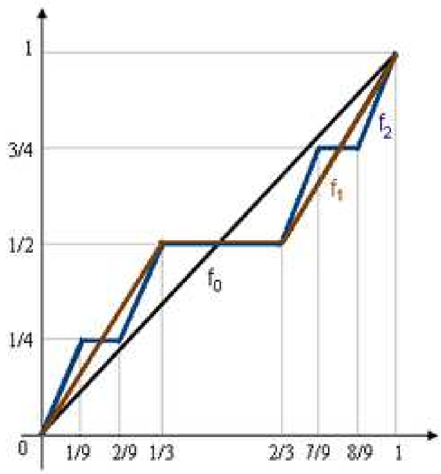

Figura 3.7: Função de Cantor / Devil's staircase.

Primeira prova de que f não tem derivada fraca. Suponhamos que exista $f' = g$ no sentido fraco. Temos

$$\int g\varphi\,dt = -\int f\varphi'\,dt, \text{ se } \varphi \in C_c^1\big((0,1)\big).$$

Escolhamos funções testes com suporte em um intervalo removido I. Em I, a função f é uma constante c_I. Logo,

$$\int g\varphi\,dt = -\int f\varphi'\,dt = -c_I\int \varphi'(t)\,dt = 0 = \int 0.\varphi\,dt.$$

Donde segue $g = 0$ q.t.p. em I. Portanto, $g = 0$ no complementar de C. Temos então $g = 0$ q.t.p. em $[0,1]$.

Pela propriedade "funções constantes e gradiente fraco", f é uma constante$\lightning$

Segunda (e elementar) prova de que f não tem derivada fraca.

Estendamos a função de Cantor $f : [0,1] \to [0,1]$ definindo $f(x) = 0$, se $x \leq 0$, e $f(x) = 1$ se $x \geq 1$ (vide figura abaixo). Indiquemos a extensão por f.

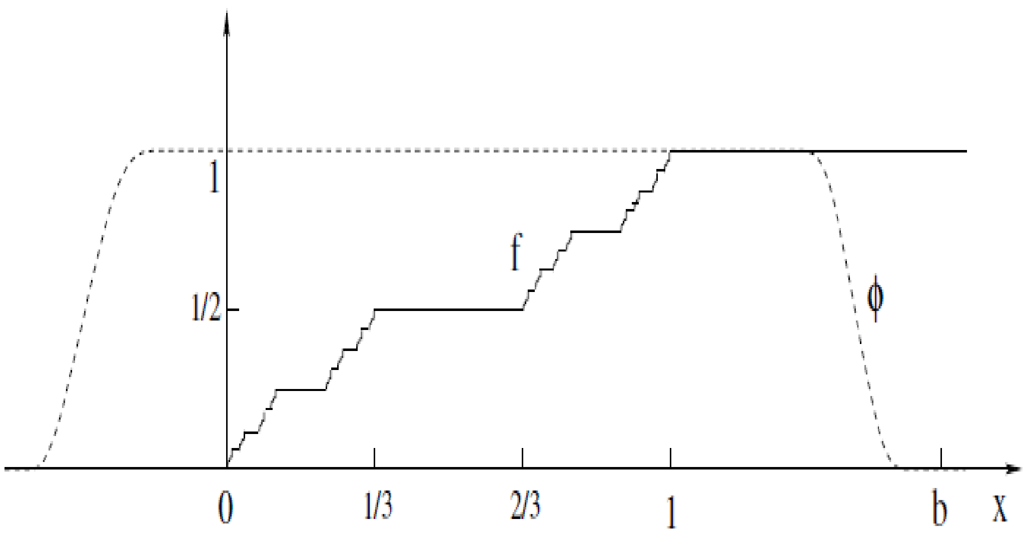

Figura 3.8: Uma variação da função de Cantor.

Suponhamos que f tem derivada fraca g.

Já vimos que g é nula nos intervalos em que f é constante. Segue

$$g(t) = 0 \text{ para quase todo ponto } t \in \mathbb{R}.$$

Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ satisfazendo as condições (vide figura acima)

$$\phi \equiv 1 \text{ em } [0,1] \ \text{ e } \ \phi(x) = 0 \text{ se } x \geq b.$$

Segue (cheque, acompanhe com a figura)

$$\begin{aligned} 0 &= \int g(t)\phi(t)dt \\ &= -\int f(t)\phi'(t)dt = -\int_1^b \phi'(t)dt = \phi(1) \\ &= 1 \ \lightning \end{aligned}$$

Extra *(para familiarizados com a teoria da diferenciação de Lebesgue). Caracterizemos as funções em uma variável real e localmente integráveis que tem derivada fraca em* L^1. *Antes, façamos algumas observações.*

Seja $I = [c,d] \subset \mathbb{R}$, *um intervalo compacto, ou* $I = (c,d)$ *um intervalo aberto (limitado ou não). Uma função* $F : I \to \mathbb{R}$ *é dita* **absolutamente contínua** *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que para toda coleção finita de sub-intervalos abertos e dois a dois disjuntos,* $(c_1, d_1) \ldots, (c_N, d_N)$, *todos contidos em* I, *vale a condição:*

$$\sum_{j=1}^{N} (d_j - c_j) < \delta \quad \Longrightarrow \sum_{j=1}^{N} |F(d_j) - F(c_j)| < \epsilon.$$

Para tal caracterização, utilizaremos o resultado abaixo.

Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue. *Uma função* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ *é absolutamente contínua se e somente se* F *é derivável q.t.p. (em quase todo ponto),* $F' \in L^1\big([c,d]\big)$ *e*

$$F(x) - F(c) = \int_c^x F'(t)dt.$$

Seja $U : (a,b) \to \mathbb{R}$ *absolutamente contínua. Então* U *é contínua, localmente integrável e absolutamente contínua em todo sub-intervalo compacto de* (a,b). *Pelo teorema fundamental do cálculo (Lebesgue), existe* U' *em quase todo ponto e* $U' \in L^1\big([c,d]\big)$ *para todo* $[c,d] \subset (a,b)$.

Lema. *A função derivada* U', *definida q.t.p., é a derivada fraca de* U.

Prova. *Seja* $\varphi \in C_c^1\big((a,b)\big)$. *Podemos escrever*

$$supp(\varphi) \subset [c,d] \subset (a,b).$$

Então, φ *e* U *são absolutamente contínuas em* $[c,d]$. *Logo,* φU *também* (cheque, *é trivial). Pelo teorema fundamental do cálculo,* φ, U *e* φU *são deriváveis q.t.p. Tem-se* $(\varphi U)' = \varphi' U + \varphi U'$ *q.t.p. Seguem então (em particular, estamos provando uma* **fórmula de integração por partes para a integral de Lebesgue**, *vide Wheeden & Zygmund [16, p. 108] ou Folland [8, p. 108, exercício 35]) as identidades*

$$\int (U\varphi' + U'\varphi)(t)dt = \int_c^d (U\varphi)'(t)(t)dt = U(d)\varphi(d) - U(c)\varphi(c) = 0.$$

O lema está provado♣

Resumindo, provamos acima que

$$U \text{ absolutamente contínua em } (a,b) \Longrightarrow \begin{cases} U \in L^1_{\text{loc}}\big((a,b)\big), \\ U \text{ tem derivada fraca em } (a,b). \end{cases}$$

Assim, para o teorema de caracterização, basta provarmos o reverso.

Recordemos que um ponto x pertence ao **Conjunto de Lebesgue** *de uma função localmente integrável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se*

$$\frac{1}{m\,(D(0,r))} \int_{D(0,r)} |f(x-y) - f(x)|dy \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

É trivial ver que para todo x em L_f, o conjunto de Lebesgue de f, temos

$$\frac{1}{m\,(D(0,r))} \int_{D(0,r)} f(x+y)dy \xrightarrow{r\to 0} f(x).$$

O conjunto de Lebesgue é "'grande" no sentido da teoria da medida. De fato, o complementar $\Omega \setminus L_f$ tem medida nula (vide Folland [8, p. 98] ou `https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`*).*

Vejamos o que ocorre em dimensão 1, com uma função localmente integrável

$$v : (a,b) \to \mathbb{R}.$$

Dado x no conjunto de Lebesgue de v, temos

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |v(t) - v(x)|dt \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Claramente segue

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |v(t) - v(x)|dt \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Encontramos então

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} v(t)dt \xrightarrow{h\to 0} v(x).$$

Finalmente, mostremos o teorema de caracterização procurado.

Teorema (Caracterização das funções com derivada fraca em L^1). *Temos u localmente integrável em (a,b) e com derivada fraca v em $L^1\big((a,b)\big)$, se e somente se existe U absolutamente contínua em (a,b) tal que*

$$U = u \text{ q.t.p.} \quad \text{e} \quad U' = v \text{ q.t.p.}.$$

Prova.

($\Leftarrow$) *Segue do lema imediatamente anterior.*

($\Rightarrow$) *Seja x_0 no* **conjunto de Lebesgue de** *u. Então, $u(x_0)$ está bem definido. A seguir, definimos*

$$\boxed{U(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(t)dt.}$$

Pelo teorema fundamental do cálculo (Lebesgue), U é absolutamente contínua.

Comentamos acima que para todo x no conjunto de Lebesgue de v temos

$$\frac{U(x+h)-U(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v(t)dt \xrightarrow{h\to 0} v(x).$$

Donde segue a identidade $U' = v$ q.t.p.

Resta mostrarmos a identidade $U = u$ q.t.p. Consideremos as regularizações

$$u_\epsilon \in C^\infty\big((a+\epsilon, b-\epsilon)\big) \quad \text{e} \quad v_\epsilon \in C^\infty\big((a+\epsilon, b-\epsilon)\big).$$

Pelo lema "derivada fraca e regularização" segue $(u_\epsilon)' = v_\epsilon$. Pelo teorema fundamental do cálculo (Riemann) segue

$$u_\epsilon(x) = u_\epsilon(x_0) + \int_{x_0}^{x} v_\epsilon(t)dt \ \text{ para todo } x \in (a+\epsilon, b-\epsilon).$$

Fixemos $x \in (a+\epsilon, b-\epsilon)$ e determinemos o limite de tal identidade se $\epsilon \to 0$.

Como x_0 é um ponto de Lebesgue de u, obtemos $u_\epsilon(x_0) \to u(x_0)$.

Como $v_\epsilon \xrightarrow{L^1([x_0,x])} v$, pela definição de U vê-se que o lado direito vai a $U(x)$.

Com o teorema aproximação da identidade e convergência pontual em L^p (vide "extra" em capítulo 2, seção 2.3) vimos que $u_\epsilon(x) \to u(x)$ em todo ponto do conjunto de Lebesgue de u. Donde segue $u_\epsilon \to u$ q.t.p.

Concluímos então que

$$u = U \text{ q.t.p.} \clubsuit$$

Propriedade (Mudança de Variável para Derivadas Fracas). *Suponhamos que O e Ω são domínios e que $\Psi : O \to \Omega$ é um difeomorfismo de classe C^1. Se u é fracamente diferenciável em Ω, então $v = u \circ \psi$ é fracamente diferenciável em O e*

$$\partial_j v = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \partial_i u \quad \textit{onde} \quad x = \psi(y).$$

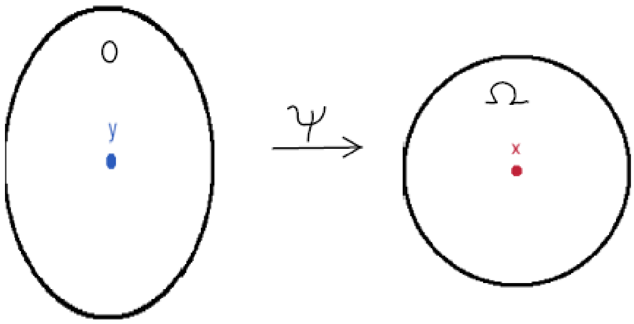

Figura 3.9: A troca de variável $\Psi : O \to \Omega$.

Prova.

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $X \subset \Omega$. O teorema da mudança de variável para integrais mostra $\|f\|_1 = \|f \circ \psi|\det J\psi|\|_1$, avaliadas em X e $\psi^{-1}(X)$ respectivamente.

O jacobiano de ψ não se anula. As derivadas parciais e o jacobiano de ψ são contínuos. Localmente, existem $c > 0$ e $C > 0$ tais que

$$c|f \circ \psi| \leq |f \circ \psi||\det J\psi| \leq C|f \circ \psi|.$$

São então equivalentes: $f \in L^1_{\text{loc}}$, $(f \circ \psi)|\det J\psi| \in L^1_{\text{loc}}$ e $f \circ \psi \in L^1_{\text{loc}}$.

Ainda, $f_n \to f$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se e somente se $f_n \circ \psi \to f \circ \psi$ em $L^1_{\text{loc}}(O)$. Cheque.

Devido às hipóteses, u, $v = u \circ \psi$ e $(\partial_j u) \circ \psi$ são localmente integráveis.

Seja $\varphi \in C^1_c(O)$. Então, $\psi\big(\text{supp}(\varphi)\big)$ é compacto em Ω. Consideremos uma regularização u_ϵ de u, com ϵ pequeno tal que Ω_ϵ contém $\psi\big(\text{supp}(\varphi)\big)$.

A seguir, graças à identidade $\partial_i(u_\epsilon) = (\partial_i u)_\epsilon$ obtemos

$$-\int (u_\epsilon \circ \psi)\partial_j \varphi \, dy = \int \partial_j(u_\epsilon \circ \psi)\varphi \, dy = \int \sum_i (\partial_i u)_\epsilon \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \varphi \, dy.$$

Impondo $\epsilon \to 0$ [em L^1_{loc}, sabemos que $u_\epsilon \to u$ e $(\partial_i u)_\epsilon \to \partial_i u$] encontramos

$$-\int v \partial_j \varphi \, dy = \int \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \partial_i u \right) \varphi \, dy \, \clubsuit$$

3.3 Regra da Cadeia e Regra do Produto

Lema (Regra da Cadeia, restrita). *Sejam* $f \in C^1(\mathbb{R})$*, com* $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$*, e* $u \in W^1(\Omega)$*. Então,*

$$f \circ u \in W^1(\Omega) \quad e \quad \nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \qquad [com\ f'(u) = f' \circ u].$$

Prova.

Por aproximação. Pela "caracterização das derivadas fracas" existe (u_m) em $C^\infty(\Omega)$ tal que a sequência $(u_m, \nabla u_m) = (u_m, \partial_1 u_m, \dots, \partial_n u_m)$ converge a $(u, \nabla u) = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ coordenada a coordenada.

Dado K compacto em Ω, pelo TVM temos

$$\int_K |f \circ u_m - f \circ u|\, dx \le \|f'\|_\infty \int_K |u_m - u|\, dx \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Em particular, $f \circ u$ é localmente integrável em Ω.

Notemos que $\nabla(f \circ u_m) = (f' \circ u_m)\nabla u_m$. A desigualdade triangular garante

$$\begin{aligned}\int_K |\nabla(f \circ u_m) - (f' \circ u)\nabla u|\, dx &= \int_K |(f' \circ u_m)\nabla u_m - (f' \circ u)\nabla u|\, dx \\ &\le \int_K |(f' \circ u_m)(\nabla u_m - \nabla u)|\, dx + \int_K |(f' \circ u_m) - (f' \circ u)|\, |\nabla u|\, dx \\ &\le \|f'\|_\infty \int_K |\nabla u_m - \nabla u|\, dx + \int_K |(f' \circ u_m) - (f' \circ u)|\, |\nabla u|\, dx.\end{aligned}$$

Analisemos o limite da última e da penúltima parcelas. Temos que $u_m \to u$ em $L^1(K)$ e então alguma subsequência de (u_m), a qual reenumeramos (u_m), converge q.t.p. para u (vide capítulo 1). Ainda mais,

$$|(f' \circ u_m) - (f' \circ u)| \le 2\|f'\|_\infty.$$

Pelo teorema da convergência dominada, tal última parcela converge a 0.

É trivial ver que a citada penúltima parcela tende a 0.

Então, pela "caracterização das derivadas fracas" encontramos

$$\nabla(f \circ u) = (f' \circ u)\nabla u \clubsuit$$

Na regra da cadeia acima, fixada u, o espaço das $f's$ em que vale a regra é linear e contém as constantes e a identidade, e vale a linearidade na fórmula.

A regra da cadeia é ainda válida se f é de Lipschitz (não necessariamente C^1).

Provemos três importantes casos com as funções parte positiva $x^+ = \max(x, 0)$, parte negativa $x^- = \max(-x, 0)$ e módulo $|x| = \max(x, -x)$, com x um número real.

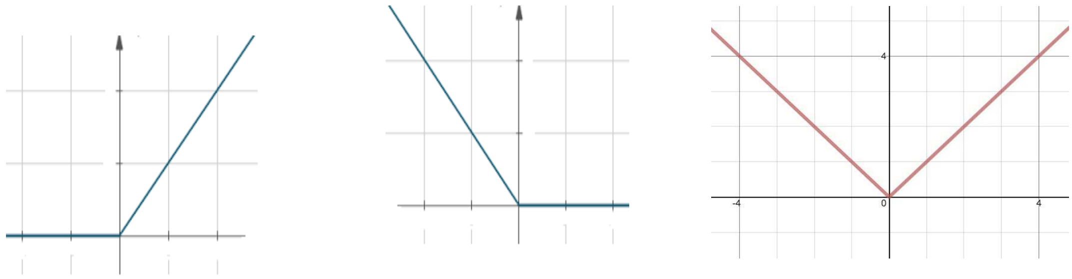

Figura 3.10: Os gráficos de x^+, x^- e $|x|$.

São triviais as relações

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad \begin{cases} x^+ = \frac{|x|+x}{2} \\ x^- = \frac{|x|-x}{2}, \end{cases} \qquad \text{e} \quad x^- = (-x)^+.$$

Estas três funções não são deriváveis mas são de Lipschitz e com constante de Lipschitz $L = 1$. De fato, dados reais x e y, pela segunda desigualdade triangular a função módulo (de um número real) satisfaz $\big||x| - |y|\big| \leq 1.|x - y|$. A função parte positiva (de um número real) satisfaz

$$|x^+ - y^+| = \left|\frac{|x| + x}{2} - \frac{|y| + y}{2}\right| \leq \frac{\big||x| - |y|\big|}{2} + \frac{|x - y|}{2} \leq |x - y|.$$

Analogamente, temos $|x^- - y^-| = |(-x)^+ - (-y)^+| \leq |-x - (-y)| = |x - y|$.

As **partes positiva e negativa de uma função** u são definidas por

$$u^+ = \max(u, 0) \quad \text{e} \quad u^- = \max(-u, 0).$$

[**Atenção.** Esta definição difere da dada por Gilbard & Trudinger, mas concorda com a de Adams, Folland, Royden & Fitzpatrick, Rudin e Wheeden & Zygmund.]

Seguem as relações

$$u = u^+ - u^-, \qquad |u| = u^+ + u^-, \qquad \begin{cases} u^+ = \frac{|u|+u}{2} \\ u^- = \frac{|u|-u}{2}, \end{cases} \qquad \text{e} \quad u^- = (-u)^+.$$

Evidentemente, $u^+ = x^+ \circ u$ e $u^- = x^- \circ u$.

Corolário (As partes positiva e negativa e o módulo, e seus gradientes). *Seja u fracamente diferenciável [isto é, $u \in W^1(\Omega)$]. Então,*

$$u^+,\ u^- \text{ e } |u| \text{ pertencem a } W^1(\Omega).$$

Ainda,

$$\nabla|u| = \begin{cases} \nabla u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -\nabla u & \text{se } u < 0, \end{cases} \qquad \nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \le 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{se } u \ge 0 \\ -\nabla u & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Ainda mais,

$$|u^\pm| \le |u| = u^+ + u^-, \quad \nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^- \quad \text{e} \quad |\nabla u^\pm| \le |\nabla u| = |\nabla u^+| + |\nabla u^-|.$$

Prova.

- Fixemos $\epsilon > 0$. A função $f(t) = \sqrt{t^2 + \epsilon^2}$ pertence a $C^1(\mathbb{R})$ e $|f'| \le 1$. Seja $f(u) = f \circ u = \sqrt{u^2 + \epsilon^2}$ definida em Ω. Pelo *Lema regra da cadeia* segue

$$f(u) \in W^1(\Omega) \text{ e } \nabla[f(u)] = f'(u)\nabla u, \text{ onde } f'(u) = f' \circ u.$$

Para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ segue

$$\int f(u)\nabla\varphi\, dx = -\int \varphi f'(u)\nabla u\, dx.$$

Isto é,

$$\int \sqrt{u^2 + \epsilon^2}\, \nabla\varphi\, dx = -\int \varphi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \epsilon^2}} \nabla u\, dx.$$

Impondo $\epsilon \to 0$ obtemos (pelo teorema da convergência dominada, cheque)

$$\int |u|\nabla\varphi\, dx = -\int \varphi\, \nabla|u|\, dx,$$

onde $\nabla|u|$ é dado pela fórmula anunciada e $|u|$ é fracamente diferenciável.

As partes u^+ e u^- são fracamente diferenciáveis, graças às decomposições

$$u^\pm = \frac{|u| \pm u}{2}.$$

Para $u > 0$ e $u < 0$ seguem, respectivamente,

$$\nabla u^+ = \frac{\nabla u + \nabla u}{2} = \nabla u \quad \text{e} \quad \nabla u^- = -\nabla u.$$

Como $u^+ \in W^1$, segue $\nabla u^+ = \nabla|u^+| = 0$ se $u^+ = 0$. Isto é, $\nabla u^+ = 0$ se $u \le 0$.

Analogamente, $\nabla u^- = \nabla|u^-| = 0$ se $u^- = 0$. Isto é, $\nabla u^- = 0$ se $u \ge 0$.

- Cheque as afirmações finais (é trivial)♣

Podemos agora generalizar consideravelmente a propriedade para *funções constantes e gradiente fraco, em domínios (i.e, abertos conexos)* provada na seção anterior (3.2 - derivadas fracas).

Comentário prévio. Como bem sabemos, uma função localmente integrável é de fato uma classe de equivalência e duas funções são identificadas se diferem no máximo em um conjunto de medida nula. Em consequência, dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ localmente integrável (de certa forma este é o maior espaço de funções nestas notas) só faz sentido dizer que um número real r pertence à imagem de f (i.e., ao conjunto $f(X)$), se o conjunto pré-imagem $f^{-1}(r)$, o qual é obviamente mensurável, tem medida estritamente positiva. Isto é,

$$|f^{-1}(r)| = |\{x : f(x) = r\}| > 0.$$

Com base em tal comentário, a propriedade a seguir é uma consequência trivial do corolário *as partes positiva e negativa e o módulo, e seus gradientes* que acabamos de provar.

Teorema (O Gradiente na pré-imagem de um ponto). *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então, temos*

$$\nabla u = 0 \text{ q.t.p. em todo conjunto em que } u \text{ é constante.}$$

Prova.

Sem perda de generalidade podemos supor que a constante é 0. No conjunto pré-imagem $u^{-1}(0)$ temos

$$\nabla u = \nabla(u^+ - u^-) = \nabla u^+ - \nabla u^- = 0 - 0 = 0 \text{ q.t.p.} \clubsuit$$

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **de classe C^1 por partes** se é de classe C^0 (i.e., contínua) e tem derivada contínua por partes. O conjunto de descontinuidades de f' é finito e as derivadas laterais existem nos pontos de descontinuidade (dizemos que as descontinuidades de f' são do tipo salto ou de primeira espécie.

O teorema a seguir generaliza a *regra da cadeia restrita* já provada . Notemos que as três funções definidas na reta e a valores reais

$$x^+ = \max(x, 0), \qquad x^- = \max(-x, 0) \qquad \text{e} \qquad |x|$$

são de classe C^1 por partes e com derivadas de primeira ordem em $L^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema (Regra da Cadeia). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 por partes, com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dada u fracamente diferenciável em Ω, então $f \circ u$ é fracamente diferenciável em Ω. Ainda mais, se L é o conjunto dos pontos em que f não é diferenciável, temos*

$$\nabla(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)\nabla u & \text{se } u \notin L \\ 0 & \text{se } u \in L. \end{cases}$$

Prova.

- O caso $L = \{t_0\}$. Por meio de $g(t) = f(t+t_0)$ podemos supor $t_0 = 0$ (cheque).

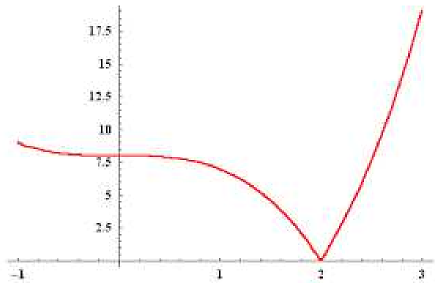

Figura 3.11: Uma ilustração para f, com f' descontínua só em $t_0 = 2$.

O teorema vale para toda f constante e podemos assumir $f(0) = 0$ (cheque).

Existe $f_1 \in C^1(\mathbb{R})$ com f_1' limitada e, ainda, $f_1 = f$ em $[0, +\infty)$ (cheque).

Existe $f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ com f_2' limitada e, ainda, $f_2 = f$ em $(-\infty, 0]$ (cheque).

Segue $f(u) = f_1(u^+) + f_2(-u^-)$. Cheque.

O corolário *gradiente das partes positiva e negativa e o módulo* e o lema *regra da cadeia (restrita)* mostram u^+ e u^- fracamente diferenciáveis e

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \nabla f_1(u^+) + \nabla f_2(-u^-) \\ &= f_1'(u^+)\nabla u^+ - f_2'(-u^-)\nabla u^-. \end{aligned}$$

Seja x um ponto em Ω.

Se $u(x) > 0$, então $f_1'(u^+) = f'(u)$, $\nabla u^+ = \nabla u$, $\nabla u^- = 0$ e $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

Se $u(x) < 0$, então $f_2'(-u^-) = f'(u)$, $\nabla u^- = -\nabla u$, $\nabla u^+ = 0$ e $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

Se $u(x) = 0$, então $\nabla u^+ = \nabla u^- = 0$ e $\nabla f(u) = 0$.

◇ O caso geral. Por indução, supomos o teorema válido se L tem N pontos.

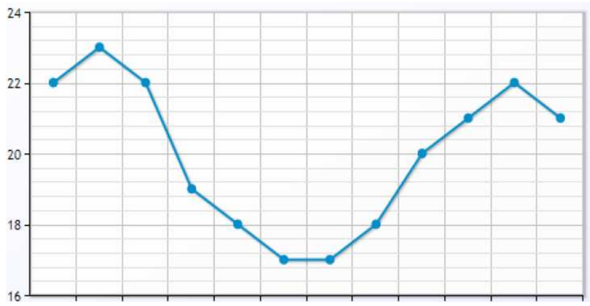

Figura 3.12: Uma f de classe C^1 por partes, com f' descontínua em vários pontos.

Seja então f como enunciada e com f' descontínua somente em $N+1$ pontos $t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1}$. Podemos supor (já vimos) $t_{N+1} = 0$ e $f(0) = 0$.

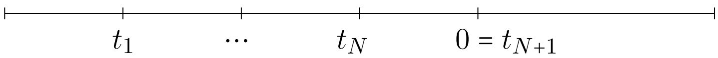

Figura 3.13: Os pontos de descontinuidade $t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = 0$.

Seja $f_1 = f$ em $[t_N, +\infty)$, com f_1 de classe C^1 por partes e derivada f_1' limitada e descontínua apenas em $t_{N+1} = 0$.

Seja $f_2 = f$ em $(-\infty, 0]$, com f_2 de classe C^1 por partes e f_2' limitada e descontínua só em $\{t_1 < \cdots < t_N\}$. Segue (com a hipótese indutiva, cheque)

$$f(u) = f_1(u^+) + f_2(-u^-) \quad \text{e} \quad \nabla f(u) = \nabla f_1(u^+) + \nabla f_2(-u^-).$$

O caso L unitário garante

$$\nabla f_1(u^+) = \begin{cases} f_1'(u^+)\nabla u^+ & \text{se } u^+ \neq 0 \\ 0 & \text{se } u^+ = 0 \end{cases} = \begin{cases} f'(u)\nabla u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

Por hipótese de indução temos

$$\nabla f_2(-u^-) = \begin{cases} -f_2'(-u^-)\nabla u^- & \text{se } -u^- \notin \{t_1, \ldots, t_N\} \\ 0 & \text{se } -u^- \in \{t_1, \ldots, t_N\} \end{cases}$$

Segue

$$\nabla f_1(u^+) + \nabla f_2(-u^-) = \begin{cases} f_1'(u)\nabla u - 0 & \text{se } u > 0 \\ 0 - 0 & \text{se } u = 0 \\ 0 + f'(u)\nabla u & \text{se } u \in (-\infty, 0) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\} \\ 0 - 0 & \text{se } u \in \{t_1, \ldots, t_N\} \clubsuit \end{cases}$$

A prova está completa (cheque)♣

Teorema (Regra do Produto). *Sejam* $u \in W^1(\Omega)$ *e* $v \in W^1(\Omega)$ *tais que*

$$uv,\ u\nabla v \text{ e } v\nabla u \text{ pertencem a } L^1_{loc}(\Omega).$$

Então, $uv \in W^1(\Omega)$ *e vale a fórmula*

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

Prova.

- Seja f_n de classe C^1 por partes na reta, com $f_n' \in L^\infty(\mathbb{R})$, dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & \text{se } t > n \\ t & \text{se } |t| \le n \\ -n & \text{se } t < -n. \end{cases}$$

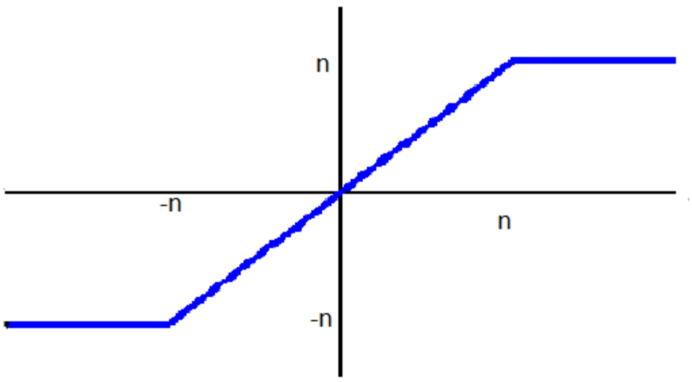

Figura 3.14: O gráfico da função f_n.

Pelo *teorema regra da cadeia* segue

$$u_n = f_n(u) \in W^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad \nabla(f_n \circ u) = \begin{cases} \nabla u & \text{se } |u| < n \\ \\ 0 & \text{se } |u| \ge n. \end{cases}$$

Analogamente para $v_n = f_n(v)$.

Pela *regra do produto restrita* (seção prévia 3.2) segue a identidade integral

$$\int_\Omega u_n v_n \nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega (u_n \nabla v_n + v_n \nabla u_n)\varphi\, dx, \text{ para toda } \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

- Por construção temos (cheque, é trivial)

$$\begin{cases} |u_n| \leq |u| \ \text{ e } \ u_n \xrightarrow{\text{q.t.p.}} u, \\ \\ |\nabla u_n| \leq |\nabla u| \ \text{ e } \ \nabla u_n \xrightarrow{\text{q.t.p.}} \nabla u \end{cases}$$

Analogamente para v_n.

Devido às hipótese temos

$$\begin{cases} |u_n v_n| \leq |uv| \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \\ \\ |u_n \nabla v_n + v_n \nabla u_n| \leq |u \nabla v| + |v \nabla u| \in L^1_{\text{loc}}(\Omega). \end{cases}$$

Seja φ arbitrária em $C^1_c(\Omega)$. Pela identidade integral já obtida e o *teorema da convergência dominada* encontramos

$$\int_\Omega uv \nabla\varphi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \nabla \varphi \, dx$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n \nabla v_n + v_n \nabla u_n)\varphi \, dx$$

$$- \int_\Omega (u \nabla v + v \nabla u) \varphi \, dx.$$

Então, pela definição de $W^1(\Omega)$ concluímos que

$$uv \in W^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \nabla(uv) = u\nabla v + v \nabla u \clubsuit$$

A regra do produto para funções em $W^1(\Omega)$ é importante para ao analisarmos o problema de Dirichlet, no próximo capítulo, provarmos um princípio do máximo fraco (estendido) para funções em $W^{1,2}(\Omega)$, espaço definido na próxima seção. É possível evitarmos tal regra do produto no próximo capítulo, se ao invés de estudarmos funções em $W^{1,2}(\Omega)$ [em se tratando do problema de Dirichlet, próximo capítulo] estudassemos funções em $W^{1,2}_0(\Omega)$, espaço definido na próxima seção. No momento adequado voltamos a esta discussão.

3.4 Espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e Regra da Cadeia

Definição. *Dados* $p \in [1,\infty]$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *indicamos o espaço de derivadas fracas*

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^k(\Omega) :\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \le |\alpha| \le k\Big\}.}$$

Claramente o **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ é linear (i.e., um espaço vetorial).

Ainda mais, $W^{k,p}(\Omega)$ admite a norma (cheque, é trivial)

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \left(\sum |\partial^\alpha u|^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Observemos que o espaço vetorial e normado $L^1(\Omega)$ é subconjunto próprio (e subespaço vetorial próprio) do espaço vetorial e não normado $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Diferentemente dos espaços $W^k(\Omega)$, cuja definição usa integração local em Ω, os de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são definidos com o conceito integração em todo o Ω.

Observemos que se $u \in W^1(\Omega)$, então suas derivadas de primeira ordem estão em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e que $W^1(\Omega)$ não é normado [pois $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ não é normado]. Entretanto, $W^{1,1}(\Omega)$ é um espaço vetorial e normado e é um subconjunto próprio (e um subespaço vetorial próprio) de $W^1(\Omega)$. Resumindo, temos

$$W^{1,1}(\Omega) \subsetneq W^1(\Omega) \text{ linearmente, mas } W^{1,1}(\Omega) \text{ é normado e } W^1(\Omega) \text{ não o é.}$$

Analogamente,

$$W^{k,1}(\Omega) \subsetneq W^k(\Omega) \text{ linearmente, mas } W^{k,1}(\Omega) \text{ é normado e } W^k(\Omega) \text{ não o é.}$$

Notemos ainda que

$$\boxed{W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).}$$

Destaquemos que todo Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é subconjunto de $W^1(\Omega)$. Isto é,

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) \subset W^1(\Omega), \text{ para todos } k \text{ e } p.}$$

Seja p em $[1,\infty]$. É trivial a equivalência de normas (cheque)

$$\|u\|_{k,p} \sim \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_p.$$

Proposição. *O espaço linear $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*
Prova.

Seja (u_j) uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Então,

$(\partial^\alpha u_j)$ é de Cauchy no espaço de Banach $L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \le k$.

Logo, existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ com

$$\partial^\alpha u_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} u_\alpha \text{ para cada } |\alpha| \le k.$$

Seja $u = \lim u_j$, computado em $L^p(\Omega)$. Sejam α com $|\alpha| \le k$ e $\varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder segue (cheque)

$$\begin{aligned}\int u\,\partial^\alpha\varphi\,dx &= \lim \int u_j\,\partial^\alpha\varphi\,dx\\ &= \lim(-1)^{|\alpha|}\int(\partial^\alpha u_j)\varphi\,dx\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int u_\alpha\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Logo, para cada $|\alpha| \le k$ existe a derivada fraca $\partial^\alpha u$ e $\partial^\alpha u = u_\alpha$ (cheque). Evidentemente $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

É trivial mostrar que

$$u_j \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u.$$

Cheque♣

Atenção. Várias vezes estendemos uma função dada em Ω. Este argumento requer atenção se queremos manter alguma regularidade da função ao "cruzar a fronteira $\partial\Omega$". Ao utilizar integração, pode-se inadvertidamente supor que cruzar a fronteira não gera problemas por esta "ter medida nula". **Isto é falso**. Por exemplo, a união dos intervalos abertos

$$\left(r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}\right), \text{ onde } \mathbb{Q} = \cup\{r_n\},$$

é um aberto Ω com $m(\Omega) \le 1$. Porém, $\partial\Omega = \mathbb{R} \setminus \Omega$ tem medida infinita. Cheque.

Definição. *Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$\boxed{W_0^{k,p}(\Omega) \text{ é o fecho de } C_c^k(\Omega) \text{ em } W^{k,p}(\Omega).}$$

É claro que também $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são distintos se Ω é limitado (cheque).

Notação. Suponhamos $p = 2$. Então, também escrevemos

$$\boxed{W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega) \quad \text{e} \quad W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega).}$$

O espaço de Banach $H^k(\Omega)$ e seu subespaço de Banach $H_0^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert com produto interno (real) para duas funções u e v, ambas em $H^k(\Omega)$ ou ambas em $H_0^k(\Omega)$, definido por

$$\langle u, v\rangle_k = \sum_{|\alpha|\le k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v)\, dx.$$

Comentário. Seja N_k o número de multi-índices α tais que $|\alpha| \le k$. Então, temos as imersões naturais

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \prod_{j=1}^{N_k} L^p(\Omega) = \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{N_k \text{ vezes}}.$$

O espaço de Banach $L^p(\Omega)$ é separável se $p \in [1, \infty)$, vide capítulo 1.

O espaço de Banach $L^p(\Omega)$ é reflexivo se $p \in (1, \infty)$, vide capítulo 1.

O produto cartesiano finito de espaços separáveis é um espaço separável.

O produto cartesiano finito de espaços reflexivos é um espaço reflexivo.

Todo subespaço linear e fechado de um espaço reflexivo é também reflexivo.

Todo subespaço de Banach é fechado no espaço vetorial que o contém.

Concluímos então que os espaços de Banach $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são

$$\begin{cases} \text{separáveis se } p \in [1, \infty), \\ \text{reflexivos se } p \in (1, \infty). \end{cases}$$

Analogamente aos espaços $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ definimos os espaços abaixo.

Definições e notações. *Consideremos Ω um aberto (limitado ou não) em $\mathbb{R}^n$, um inteiro $k \geq 0$ e um valor $p \in [1, \infty]$. Então,*

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } u\big|_O \in W^{k,p}(O) \text{ para todo } O \subset\subset \Omega \Big\}.$$

Os espaços vetoriais $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ não são normados porém admitem uma topologia. Uma sequência (u_j) de funções mensuráveis converge a u no sentido *$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ se*

$$u_j \xrightarrow{W^{k,p}(O)} u \text{ para todo } O \subset\subset \Omega.$$

Escrevemos então

$$u_j \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u.$$

Alerta. *Não é necessário $u_j \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$.*

Uma sequência $(v_j) \subset W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ converge a $v \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, na topologia de $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, se a sequência v_j converge a v no sentido $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$. Escrevemos então

$$v_j \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} v.$$

Proposição (Uma regra da Cadeia em $W^{1,p}(\Omega)$). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 por partes, com $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, e consideremos uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então,*

$$f \circ u \in W^1(\Omega) \quad e \quad \nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \in L^p(\Omega).$$

Prova.

Segue diretamente do *lema regra da cadeia* já provado na seção 3.3 - regra da cadeia (cheque)♣

3.5 Teoremas de Densidade

Lema [Regularização e aproximação em $W^{k,p}(\Omega)$ - Friedrichs]. *Consideremos $p \in [1, \infty)$. Dada uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e um arbitrário multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, vale o que segue.*

$$(a) \qquad \begin{cases} u_\epsilon & \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \partial^\alpha(u_\epsilon) & \in L^p(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad e \quad u_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{loc}(\Omega)} u.$$

Se supp(u) é compacto, para ϵ pequeno o suficiente temos

$$(b) \qquad u_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega) \quad e \quad u_\epsilon \xrightarrow{W_0^{k,p}(\Omega)} u.$$

Prova.

(a) Devido às hipóteses, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e existe a derivada fraca $\partial^\alpha u$ para cada $|\alpha| \leq k$ [isto é, $\partial^\alpha u$ é localmente integrável em Ω]. Pelo *lema derivada fraca, regularização e aproximação* (seção 3.2 - derivadas fracas) segue

$$\boxed{\partial^\alpha(u_\epsilon) = (\partial^\alpha u)_\epsilon \text{ no aberto } \Omega_\epsilon.}$$

◇ Dada a extensão

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u \text{ em } \Omega \\ 0 \text{ fora de } \Omega, \end{cases}$$

já mostramos que [vide comentários para extensão e regularização - capítulo 2 - seção 2.5 - regularização e aproximação em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$] que

$$\begin{cases} \widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n) \\ \text{e} \\ u_\epsilon = (\widetilde{u})_\epsilon = \widetilde{u} * \rho_\epsilon \text{ em todo o } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Pelo corolário *o produto de convolução definido em $L^p(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$* - vide capítulo 2, seção 2.2 (produto de convolução) - seguem então as duas primeiras afirmações anunciadas

$$\begin{cases} u_\epsilon = \widetilde{u} * \rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \\ \text{e} \\ \partial^\alpha(u_\epsilon) = \widetilde{u} * \partial^\alpha \rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

◇ Por outro lado, por hipótese $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ e então pelo lema *regularização e aproximação em $L^p(\Omega)$ e $L^p_{loc}(\Omega)$* [vide capítulo 2 - seção 2.5] segue

$$(\partial^\alpha u)_\epsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} \partial^\alpha u.$$

Dado $O \subset\subset \Omega$, seja $r > 0$ com $\overline{O} \subset \Omega_r \subset \Omega$. O lema *derivada fraca, regularização e aproximação* garante $(\partial^\alpha u)_\epsilon = \partial^\alpha(u_\epsilon)$ em $O \subset \Omega_r \subset \Omega_\epsilon$, se $\epsilon < r$. Logo,

$$\partial^\alpha(u_\epsilon) \xrightarrow{L^p(O)} \partial^\alpha u.$$

Donde segue

$$u_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u.$$

(b) A afirmação sobre o suporte é trivial.

É trivial a propriedade $\mathrm{supp}(\partial^\alpha u) \subset \mathrm{supp}(u)$. Cheque.

Por hipótese, $\mathrm{supp}(u)$ é compacto em Ω. Fixemos $V \subset\subset \Omega$ tal que

$$\mathrm{supp}(u) \subset V.$$

Consideremos $0 < \epsilon < d\big(\mathrm{supp}(u), \mathbb{R}^n \setminus V\big)\big\}$. Temos então

$$\mathrm{supp}[\partial^\alpha(u_\epsilon)] \subset \mathrm{supp}(u_\epsilon) \subset \mathrm{supp}(u) + D(0,\epsilon) \subset V \subset\subset \Omega.$$

Por (a) segue

$$u_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}(V)} u.$$

Isto é,

$$\partial^\alpha(u_\epsilon) \xrightarrow{L^p(V)} \partial^\alpha u.$$

Como $\mathrm{supp}\big(\partial^\alpha(u_\epsilon)\big) \subset V$, obtemos

$$\partial^\alpha(u_\epsilon) \xrightarrow{L^p(\Omega)} \partial^\alpha u.$$

Donde concluímos que

$$u_\epsilon \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u \,\clubsuit$$

Teorema (Aproximação global por funções suaves. Meyers-Serrin, 1964). *Vale a propriedade,*

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \text{ é denso em } W^{k,p}(\Omega).$$

Prova.

Na seção 2.4 - *Urysohn e partição da unidade* - exibimos uma sequência exaustiva de abertos $O_j \nearrow \Omega$, onde $j \geq 1$, e uma partição da unidade (ψ_j) para Ω e subordinada à cobertura (O_j). Mostramos também

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\psi_j) \subset O_j \smallsetminus \overline{O_{j-3}} \text{ para todo } j = 1, 2, 3, \ldots, \\ \\ \text{convencionado } O_{-2} = O_{-1} = O_0 = \varnothing. \end{cases}$$

Fixado $u \in W^{k,p}(\Omega)$, temos $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega)$ [verifique] com o suporte de $\psi_j u$ compacto em Ω. Existe $\epsilon_j > 0$ satisfazendo

$$\operatorname{supp}(\psi_j u)_{\epsilon_j} \subset O_j \smallsetminus \overline{O_{j-3}} \text{ para todo } j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Pelo *lema de Friedrichs*, imediatamente acima, podemos supor ϵ_j pequeno tal que

$$\|(\psi_j u)_{\epsilon_j} - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Dado $D(x,r) \subset \Omega$, existe N tal que $D(x,r) \subset O_N$. Segue

$$v = \sum_j (\psi_j u)_{\epsilon_j} \equiv (\psi_1 u)_{\epsilon_1} + \cdots + (\psi_{N+3} u)_{\epsilon_{N+3}} \text{ no disco } D(x,r).$$

Logo, $v \in C^\infty(\Omega)$. Para completar, temos

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum \left\|(\psi_j u)_{\epsilon_j} - \psi_j u\right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \epsilon \clubsuit$$

O teorema de Meyers-Serrin mostra que $W^{k,p}(\Omega)$ pode ser caracterizado como o completamento do espaço $C^\infty(\Omega)$ sob a norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Fronteira. Sejam Ω aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, de variável $x = (x_1, \ldots, x_n)$. (Extraído de Evans [6, pp. 226-268 e 710–711].)

- Dizemos que $\partial\Omega$ é C^1 se para cada ponto $p \in \partial\Omega$ existe uma função

$$\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$$

tal que, renomeando os eixos se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B(p,r) = \big\{x \in B(p,r) : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\big\}.$$

Assim, localmente temos $\partial\Omega = \text{gráfico}(\gamma)$ para alguma γ de classe C^1.

- Se $\partial\Omega$ é C^1, então ao longo de $\partial\Omega$ está definido o **campo vetorial contínuo normal unitário exterior** (apontando para o exterior de Ω) indicado

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

- Consideremos uma função $f \in C^1(\overline{\Omega})$. A sua **derivada normal exterior** é definida pelo produto interno

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla f.$$

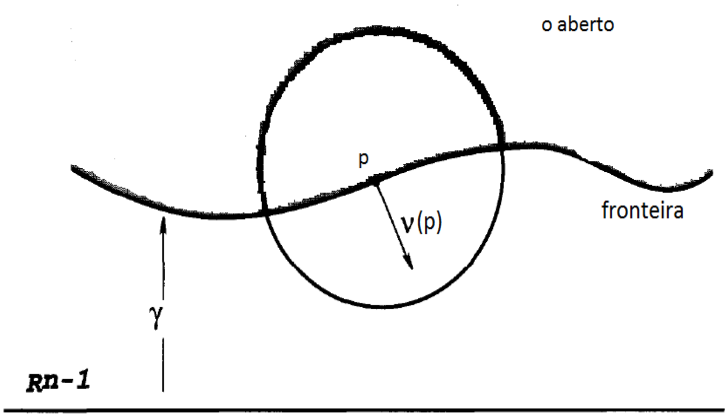

Figura 3.15: O vetor normal exterior.

- Para **aplainar a fronteira** próximo a p, definimos função $y = \Phi(x)$ por

$$\begin{cases} y_j = x_j = \Phi_j(x), \text{ onde } j = 1, \dots, n \\ y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Phi_n(x). \end{cases}$$

Observemos que $y_n = 0$ se e somente se x pertence a gráfico$(\gamma) = \partial\Omega$.

Analogamente, definimos $x = \Psi(y)$ pelas equações

$$\begin{cases} x_j = y_j = \Psi_j(y), \text{ onde } j = 1, \dots, n \\ x_n = y_n + \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Psi_n(y). \end{cases}$$

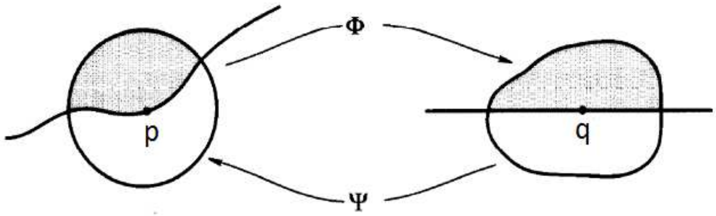

Figura 3.16: Aplainando a fronteira, com $q = \Phi(p)$.

Temos

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi)(y) &= \Phi\big(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})\big) \\ &= \big(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) - \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})\big) = y. \end{aligned}$$

Analogamente, $(\Psi \circ \Phi)(x) = x$. Donde segue $\Phi = \Psi^{-1}$. Notemos que

$$\det J\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\partial_1\gamma & -\partial_2\gamma & \cdots & -\partial_{n-1}\gamma & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

É então claro que $\det J\Psi = 1$. Dizemos que a aplicação

$$x \mapsto \Phi(x) = y$$

"aplaina/nivela" a fronteira $\partial\Omega$. Sobre o gráfico de γ temos $\Phi_n \equiv 0$. Logo,

$$\nabla\Phi_n = (-\partial_1\gamma, \dots, -\partial_{n-1}\gamma, 1)$$

é ortogonal ao gráfico de γ. Como o gradiente $\nabla\Phi_n$ aponta no sentido do crescimento de Φ_n, segue que o normal exterior ao gráfico de γ [e $\partial\Omega$] é

$$\nu = -\frac{\nabla\Phi_n}{\|\nabla\Phi_n\|} = \frac{(\nabla\gamma, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla\gamma\|^2}}.$$

Definição (Propriedade do Segmento). Um aberto limitado Ω tem a propriedade do segmento se existe uma cobertura aberta $V_0, V_1, \ldots, V_N$ do fecho $\overline{\Omega}$ satisfazendo:

(a) $V_0 \subset \Omega$.

(b) $V_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ para cada $j = 1, \ldots, N$.

(c) Para cada $j = 1, \ldots, N$, existe um vetor $v^j \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x + \delta v^j \notin \overline{\Omega} \text{ para todo } x \in V_j \setminus \Omega \text{ e todo } 0 < \delta < 1.$$

Vide figura abaixo.

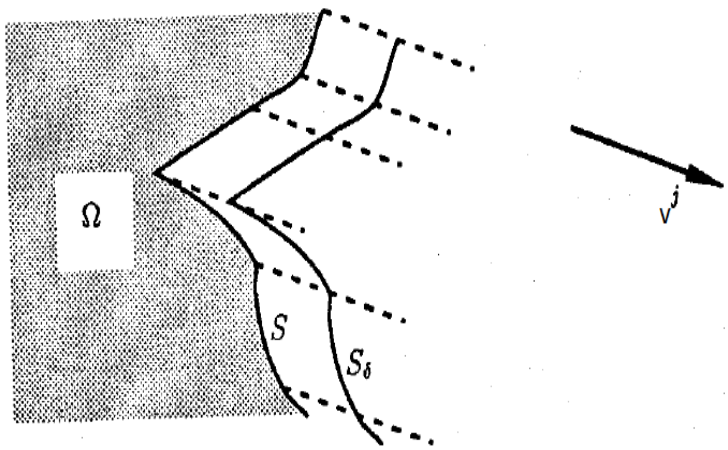

Figura 3.17: Um aberto Ω com a propriedade do segmento.

Exercício. Se Ω é um aberto conexo e limitado, com fronteira de classe C^1, então Ω tem a propriedade do segmento.

O teorema abaixo pode ser estendido a $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema. [Aproximação global por funções suaves até a fronteira - O espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{k,2}(\Omega)$]. *Sejam Ω um aberto limitado que tem a propriedade do segmento e $k \in \mathbb{N}$. Então, $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{k,2}(\Omega)$.*

Prova. Extraída de Folland [7, pp. 221–222]. Vide Adams [1, pp. 67–70].

- ⋄ É evidente que $C^\infty(\overline{\Omega})$ - o espaço das funções reais definidas em Ω e cujas derivadas parciais, de toda ordem, se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$ - é um subespaço de $W^{k,2}(\Omega)$.

◇ Sejam $V_0, V_1, \ldots, V_N$ dados pela propriedade do segmento. Existe uma cobertura $O_0, O_1, \ldots, O_N$ de $\overline{\Omega}$ e satisfazendo $\overline{O_j} \subset V_j$ (cheque). Existe uma partição da unidade $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N$ para o compacto $\overline{\Omega}$ e subordinada à subcobertura $O_0, O_1, \ldots, O_N$ [cheque, vide Lista 2 - Exercício 4].

Dada $u \in W^{k,2}(\Omega)$, é trivial ver que $\phi_j u \in W^{k,2}(\Omega)$ (cheque, note que as derivadas de ϕ_j são limitadas, vide Lista 4 - Exercício 3). Então, devido a

$$u = \phi_0 u + \phi_1 u + \cdots + \phi_N u,$$

basta mostrarmos que $\phi_j u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ para $j = 0, 1, \ldots, N$.

◇ O caso $\phi_0 u$ é trivial pois $\operatorname{supp}(\phi_0)$ é compacto em $O_0 \subset \Omega$. Neste caso

$$(\phi_0 u) * \rho_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad (\phi_0 u) * \rho_\epsilon \xrightarrow{W^{k,2}(\Omega)} \phi_0 u.$$

Cheque, vide Lista 3 - Exercício 7.

◇ O caso $j = 1, \ldots, N$. Notemos que $\operatorname{supp}(\phi_j u)$, contido em $\operatorname{supp}(\phi_j) \cap \Omega$, é um fechado relativo a Ω. Trocando $\phi_j u \in W^{k,2}(\Omega)$ por u, encontramos $\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{supp}(\phi_j) \cap \Omega$ para algum $j = 1, \ldots, N$.

Estendamos $u \equiv 0$ fora de Ω. Então, $\operatorname{supp}(u) \subset \overline{\operatorname{supp}(u) \cap \Omega} \subset \operatorname{supp}(\phi_j) \cap \overline{\Omega}$. Isto é, o suporte da extensão é um compacto dentro de O_j e dentro de $\overline{\Omega}$.

Consideremos o compacto

$$S = \overline{O_j} \cap \partial\Omega.$$

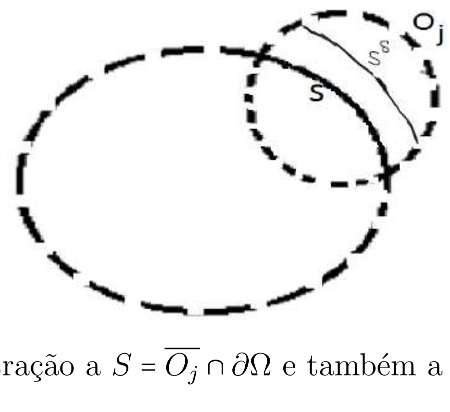

Figura 3.18: Ilustração a $S = \overline{O_j} \cap \partial\Omega$ e também a S^δ (disjunto de $\overline{\Omega}$).

É sabido que $\mathbb{R}^n = \Omega \cup \partial\Omega \cup \overline{\Omega}^c$. É trivial ver que coincidem os abertos

$$\mathbb{R}^n \setminus S \;=\; \mathbb{R}^n \setminus (\overline{O_j} \cap \partial\Omega) \;=\; (\overline{O_j})^c \cup \Omega \cup \overline{\Omega}^c.$$

Então - vide Lista 4, Exercício 7 (localização) - a função u e suas derivadas fracas de ordem menor ou igual a k estão bem definidas no aberto $\overline{O_j}^c \cup \Omega \cup \overline{\Omega}^c$ e pertencem ao espaço $L^2(\overline{O_j}^c \cup \Omega \cup \overline{\Omega}^c) = L^2(\mathbb{R}^n \setminus S)$. Isto é,

$$u \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n \setminus S).$$

Seja $0 < \delta \leq 1$. É claro que $S^\delta = S + \delta v^j$ é compacto para cada $0 < \delta \leq 1$. Ainda mais, temos

$$\boxed{\overline{\Omega} \cap S^\delta = \emptyset,}$$

pois caso ocorra $x + \delta v^j \in \overline{\Omega}$, com $x \in S = \overline{O_j} \cap \partial\Omega$, então $x \in V_j \setminus \Omega$ e pela propriedade do segmento deduzimos que $x + \delta v^j \notin \overline{\Omega}$ ↯

Em particular, $\boxed{\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus S^\delta}$.

Consideremos a função (u transladada)

$$\begin{cases} u^\delta(x) = u(x - \delta v^j), \text{ com } x \text{ no aberto } \boxed{\mathbb{R}^n \setminus S^\delta = (S + \delta v^j)^c}, \\ \\ \text{notando que para todo tal } x \text{ temos } \boxed{x - \delta v^j \notin S}. \end{cases}$$

Assim, $u^\delta \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n \setminus S^\delta)$ pois $u \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n \setminus S)$. Para δ pequeno, u e u^δ estão suportadas em O_j [pois $\text{supp}(u) \subset \text{supp}(\phi_j)$, este compacto em O_j].

É claro que $(\partial^\alpha u^\delta)(x) = (\partial^\alpha u)(x - \delta v^j)$ se $x \in \mathbb{R}^n \setminus S^\delta$, para todo $|\alpha| \leq k$.

Fixemos um multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$. Logo,

$$\int_\Omega \left|\partial^\alpha u^\delta - \partial^\alpha u\right|^2 dx = \int_\Omega \left|(\partial^\alpha u)(x - \delta v^j) - (\partial^\alpha u)(x)\right|^2 dx.$$

Definamos $\mu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\boxed{\mu = \partial^\alpha u \text{ em } \Omega \text{ e } \mu = 0 \text{ em } \Omega^c.}$$

Se $x - \delta v^j \in \Omega$, é evidente que $(\partial^\alpha u)(x - \delta v^j) = \mu(x - \delta v^j)$.

Seja $x \in \Omega$ tal que $x - \delta v^j \notin \Omega$. Pelos destaques acima segue

$$x - \delta v^j \in (\mathbb{R}^n \setminus S) = \overline{O_j}^c \cup \Omega \cup \overline{\Omega}^c \text{ porém } x - \delta v^j \notin \Omega.$$

Logo, $x - \delta v^j \in \overline{O_j}^c \cup \overline{\Omega}^c$. Por construção, temos $u \equiv 0$ no aberto $\overline{O_j}^c \cup \overline{\Omega}^c$. Donde encontramos $(\partial^\alpha u)(x - \delta v^j) = 0 = \mu(x - \delta v^j)$.

O teorema *continuidade da translação em L^p* (seção 1.3) garante

$$\int_\Omega \left|(\partial^\alpha u)(x-\delta v^j)-(\partial^\alpha u)(x)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\mu(x-\delta v^j)-\mu(x)\right|^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mu(x-\delta v^j)-\mu(x)\right|^2 dx \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Assim, pela arbitrariedade do multi-índice α, para encerrar esta prova basta verificarmos que a restrição

$$u^\delta\Big|_\Omega \in W^{k,2}(\Omega)$$

é limite de funções em $C^\infty(\overline{\Omega})$, na norma de $W^{k,2}(\Omega)$.

Fixemos δ. Já vimos que $u^\delta \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n \setminus S^\delta)$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \chi = 1 \text{ em uma vizinhança de } \overline{\Omega}, \\ \text{e} \\ \chi = 0 \text{ em uma vizinhança de } S^\delta. \end{cases}$$

Então,

$$\chi u^\delta \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n) \quad [\textsf{cheque}].$$

Ainda, χu^δ tem suporte compacto. Logo, $(\chi u^\delta) * \rho_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$(\chi u^\delta) * \rho_\epsilon \xrightarrow{W^{k,2}(\mathbb{R}^n)} \chi u^\delta \quad \text{[Vide Lista 3 - Exercício 7].}$$

Donde segue que

$$[(\chi u^\delta) * \rho_\epsilon]\Big|_{\overline{\Omega}} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{e} \quad (\chi u^\delta) * \rho_\epsilon\Big|_\Omega \xrightarrow{W^{k,2}(\Omega)} u^\delta \clubsuit$$

3.6 Teoremas de Imersão.

No que segue, nestas notas, Ω é um aberto limitado.

Alerta. É bem natural (a princípio), dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$ cogitarmos de uma extensão em $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Este argumento não é válido em geral e requer propriedades de suavidade de $\partial\Omega$. Vide (futura) seção 3.?? - Extensão e Interpolação ou *Extension Operators* em Brezis [3, p. 272].

Como é usual, $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ é o sub-espaço das funções em $C^k(\Omega)$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k se estendem continuamente ao fecho $\overline{\Omega}$.

Em várias aplicações em EDP é importante compreender o grau de regularidade de uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Veremos, nesta e na próxima seção, dois resultados básicos nesta direção. Informalmente, seguem seus enunciados.

- Desigualdades de Sobolev (ou Sobolev-Gagliardo-Nirenberg):
$$W_0^{1,p}(\Omega) \text{ está imerso em} \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) \text{ se } p < n, \\ C^0(\overline{\Omega}) \text{ se } p > n. \end{cases}$$
- Teorema da Imersão de Morrey: as funções no espaço $W^{1,p}(\Omega)$ são Hölder contínuas (após modificarmos tais funções em um conjunto de medida zero).

Assim, esta e a próxima seção exploram a conexão entre

(1) propriedades pontuais e de integração para u fracamente diferenciável e

(2) propriedades de integrabilidade das derivadas de u.

Um dos simples resultados nesta direção é que se u é fracamente diferenciável, em uma variável real, então u é absolutamente contínua. Assim, pelo teorema fundamental do cálculo (Lebesgue), u é derivável q.t.p., com u' integrável e
$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)dt.$$
Já vimos este resultado, com o nome *teorema de caracterização das funções com derivada fraca em* L^1, em um comentário extra na seção 3-2 - derivadas fracas.

Temos então o seguinte exemplo.

Exemplo. Seja um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Toda $u \in W^{1,p}((a,b))$ coincide q.t.p. com uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua com derivada $f' \in L^p((a,b))$.

Em dimensões $n \geq 2$, tanta regularidade não ocorre. Segue um exemplo.

Exemplo (Uma função em $W^{1,p}(B(0,1))$, onde $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, mas não contínua e não limitada, conforme os valores n e p). Consideremos

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{\gamma}}, \text{ onde } 0 < \gamma < \frac{n-p}{p} \text{ e } 0 < |x| < 1.$$

Verificação.

◇ Seja $B = B(0,1)$. É óbvio que $u \in C^1(B \setminus \{0\})$. É trivial ver que

$$\partial_j u(x) = \frac{-\gamma}{2}(|x|^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1}(2x_j) = \frac{-\gamma x_j}{|x|^{\gamma+2}}.$$

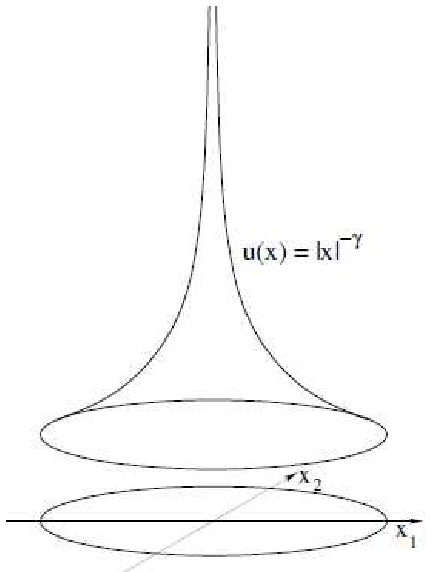

Figura 3.19: O gráfico de $u(x) = |x|^{-\gamma}$.

Logo,

$$|\nabla u| = \frac{\gamma}{|x|^{\gamma+1}}.$$

Em $B \setminus \{0\}$, u admite derivadas fracas de todas as ordens e estas coincidem com as clássicas. Respondamos à particular pergunta abaixo.

Pergunta. Em quais casos as derivadas clássicas $\partial_j u$ definem as derivadas fracas de u em toda a bola B? Isto é, em quais casos vale a fórmula

$$\int_B (\partial_j u)\varphi \, dx = -\int_B u \, \partial_j \varphi \, dx, \text{ para toda } \varphi \in C_c^1(B)?$$

Assim, devemos analisar para toda $\varphi \in C_c^1(B)$ e não só para $\varphi \in C_c^1(B \setminus \{0\})$.

Destaquemos

$$\boxed{u \in L^1(B),\ \text{se } \gamma < n} \quad \text{e} \quad \boxed{|\partial_j u| \in L^1(B) \text{ se } \gamma + 1 < n.}$$

A seguir, seja $\varphi \in C_c^1(B)$. Dado $\epsilon > 0$ o teorema do divergente assegura

$$\int_{\epsilon<|x|<1} \partial_j(u\varphi)dx = \int_{|x|=\epsilon} u(x)\varphi(x)\nu_j(x)dS,$$

onde dS é a medida $(n-1)$-dimensional na superfície da bola $B(0,\epsilon)$ e

$$\nu_j(x) = -\frac{x_j}{|x|}$$

é tal que $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal (definido exterior à faixa circular $\{x : \epsilon < |x| < 1\}$ em $\{x : |x| = \epsilon\}$) apontando para o interior da bola $B(0,\epsilon)$. Sob a condição $n - 1 > \gamma$ obtemos

$$\int_{|x|=\epsilon} |u(x)\varphi(x)\nu_j(x)|dS \le \epsilon^{-\gamma}\|\varphi\|_{L^\infty}\sigma(S^{n-1})\epsilon^{n-1} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Assim, para $n - 1 > \gamma$ encontramos $\partial_j(u\varphi) = u\partial_j\varphi + \varphi\partial_j u \in L^1(B)$ com

$$\int_B \partial_j(u\varphi)dx = 0 \quad \text{e então} \quad \int_B u\partial_j\varphi\, dx = \int \frac{\gamma x_j}{|x|^{\gamma+2}}\varphi(x)\, dx.$$

Logo,

$$\boxed{\partial_j u = -\tfrac{\gamma x_j}{|x|^{\gamma+2}} \quad \text{é a derivada fraca de } u \text{ na bola } B(0,1).}$$

Ainda, observemos que

$$\int_B \left(\frac{1}{|x|^{\gamma+1}}\right)^p dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^1 r^{n-1-p(\gamma+1)}dr < \infty$$

se e somente se

$$n - 1 - p(\gamma+1) > -1 \text{ ou, equivalentmente, } \gamma < \frac{n-p}{p}.$$

Segue então que (cheque)

$$u \in W^{1,p}(B) \text{ se } 0 < \gamma < \frac{n-p}{p} \clubsuit$$

Antes de provarmos as desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, façamos mais algumas observações.

(1) As desigualdades de Sobolev em $W_0^{k,p}(\Omega)$ valem em todo aberto Ω. Valem desigualdades análogas em $W^{k,p}(\Omega)$, se a fronteira de Ω é regular (suave) o suficiente. Vide Evans [6, pp. 253–305] e Gilbard-Trudinger [10, p. 171].

No espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ as desigualdades de Sobolev são menos árduas para provar que no espaço $W^{1,p}(\Omega)$.

(2) **O conjugado de Sobolev p^* para um expoente $p \in [1, n)$.** As desigualdades de Sobolev envolvem estimativas entre funções, suas derivadas e espaços $L^{p's}$. Fixado o expoente p, determinemos condições necessárias sobre q para a validade da desigualdade (com C uma constante)

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p, \text{ para toda } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

- Para tal tarefa, sigamos os físicos e físicas e utilizemos um reescalonamento (um argumento comum entre elas e eles). Dada $f \neq 0$, consideremos

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \text{ com } \lambda > 0 \text{ uma constante.}$$

Segue

$$\left(\int |f(\lambda x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int |\nabla f_\lambda|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Temos $(\nabla f_\lambda)(x) = \lambda(\nabla f)(\lambda x)$. Encontramos então

$$\left(\frac{\int |f(y)|^q dy}{\lambda^n}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\frac{\lambda^p \int |\nabla f(y)|^p dy}{\lambda^n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donde segue

$$\|f\|_q \leq C\left(\lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\right)\|\nabla f\|_p, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Ora, isto só é possível se

$$1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0.$$

Tal valor para q é denotado p^*, o conjugado de Sobolev para p. Isto é,

$$\boxed{\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{ou, ainda,} \quad p^* = \frac{np}{n-p}.}$$

Notemos que p^* varia segundo as relações

$$1 \leq p < p^* < +\infty \clubsuit$$

(3) A *desigualdade de Hölder generalizada* para N funções não negativas mostra

$$\int g_1^{\frac{1}{N}} \cdots g_N^{\frac{1}{N}} dm \le \left(\int g_1\, dm\right)^{\frac{1}{N}} \cdots \left(\int g_N\, dm\right)^{\frac{1}{N}} \qquad \text{[vide seção 1.4].}$$

Sejam $f_1 \ge 0, \ldots, f_n \ge 0$ funções na variável $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostremos

$$\boxed{F(x) = \prod_j \left(\int f_j dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}} \implies \int F\, dx \le \prod_j \left(\int f_j\, dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.}$$

De fato, pela *desigualdade de Hölder generalizada* (para $n-1$ funções) segue [note que a integral $\int f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1$ independe de x_1, vide figura]

$$\int F\, dx_1 \le \left(\int f_1\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j\ge 2} \left(\int f_j\, dx_j\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

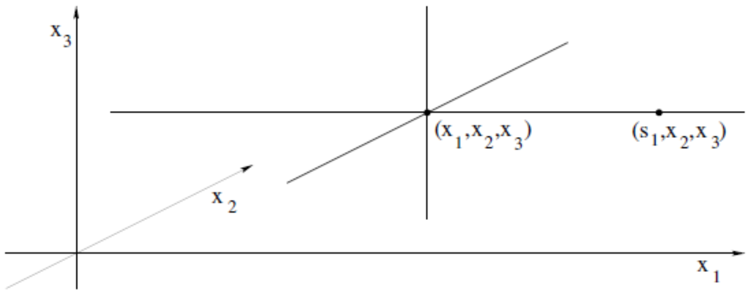

Figura 3.20: O caso $n = 3$. A integral $\int f_1(s, x_2, x_3) ds$ independe de x_2 e de x_3. Analogamente quanto às demais variáveis.

Reaplicando tal *desigualdade de Hölder* (com $n-1$ funções) obtemos

$$\int F\, dx_1\, dx_2 \le \left(\int f_2\, dx_2\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int f_1\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j\ge 3} \left(\int f_j\, dx_j\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Vemos então que

$$\int F\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \le \left(\int f_3\, dx_3\, dx_2\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int f_2\, dx_2\, dx_1 dx_3\right)^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\times \left(\int f_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j\ge 4} \left(\int f_j\, dx_j\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Iterando segue (por "indução informal")

$$\int F\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n \le \prod_j \left(\int f_j\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \clubsuit$$

Para formalizar a indução, cheque por indução em k a fórmula

$$\int F\, dx_1 \cdots dx_k \le \prod_{j=1}^{k} \left(\int f_j\, dx_1 \cdots dx_k\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j\ge k} \left(\int f_j\, dx_j dx_1 \cdots dx_k\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

(4) **Média geométrica X Média aritmética.** Para positivos $a_1 \ldots, a_n$ segue

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Cheque, dada uma constante $c > 0$ maximize o produto

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$$

sob as condições $x_1 + \cdots + x_n = c$, $x_1 \ge 0, \ldots x_n \ge 0$ via multiplicadores de Lagrange.
(5) Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (para o produto interno) em $\mathbb{R}^n$ segue

$$a_1 + \cdots + a_n \le \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{n}.$$

(6) Fixado $\gamma > 1$, a função

$$\phi = \phi_\gamma(t) = |t|^\gamma, \ \text{onde } t \in \mathbb{R},$$

é (cheque) de classe C^1 e satisfaz

$$\phi'(t) = \gamma |t|^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(t), \ \text{onde} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} \text{ se } t \ne 0 \\ 0 \text{ se } t = 0. \end{cases}$$

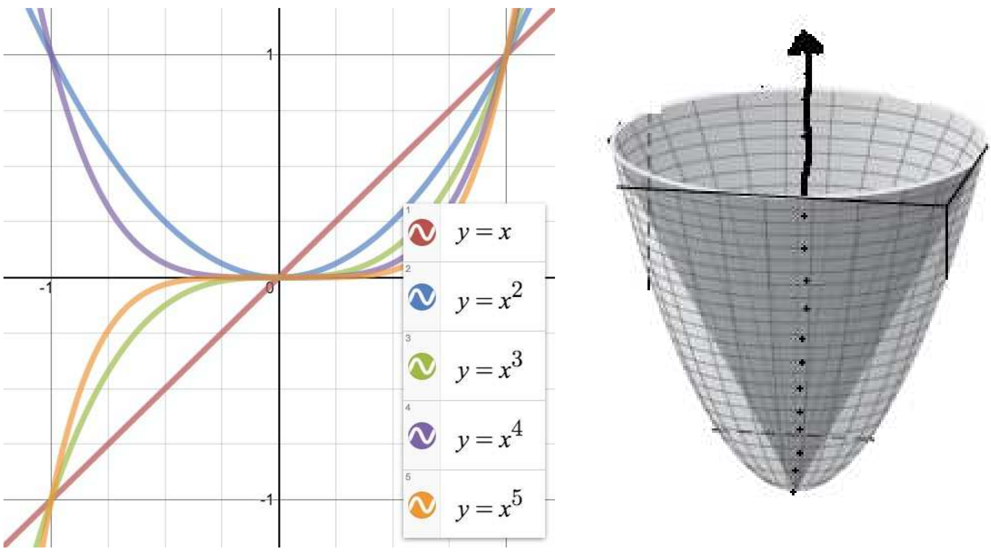

Figura 3.21: À esquerda, gráficos de monomiais reais $y = x^n$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. À direita, gráfico em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ da função $x \mapsto |x|^\gamma$ onde $\gamma > 1$, com um cone "dentro'.

Teorema (Desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). *Sejam $p \geq 1$, onde p é finito, e $p^* = np/(n-p)$ o conjugado de Sobolev de p. Então,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{se } p < n \\ \\ C^0\left(\overline{\Omega}\right) & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Isto é, se $p > n$, toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem uma (única) representante contínua em $\overline{\Omega}$.

Ainda, existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\begin{cases} \|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p & \text{se } p < n \\ \\ \sup\limits_{\Omega} |u| \leq C\,|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\,\|\nabla u\|_p & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Em particular, a única função constante em $W_0^{1,p}(\Omega)$ é a função nula.

Prova.

◇ Caso $p = 1$. Seja $f \in C_c^1(\Omega)$, denso em $W_0^{1,1}(\Omega)$. Dado $1 \leq j \leq n$ seguem

$$|f(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x_j} \partial_j f\, dx_j\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_j f| dx_j \quad \text{e}$$

$$|f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \int |\partial_j f| dx_j\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Donde segue, pelo comentários prévios (*desigualdade de Hölder generalizada, médias geométrica e aritmética e desigualdade de Cauchy-Schwartz*)

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \int_{\Omega} |\partial_j f| dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\int \sum |\partial_j f| dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int |\nabla f| dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f\|_1.$$

Argumento de densidade (argumento padrão) . Dada $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, existe uma sequência $(f_j) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que

$$\boxed{f_j \xrightarrow{W^{1,1}(\Omega)} u.}$$

Podemos supor $f_j \to u$ q.t.p. (cheque). A desigualdade acima permite destacarmos a desigualdade

$$\boxed{\|f_j\|_{1^*} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f_j\|_1, \quad \text{onde } 1^* = \tfrac{n}{n-1}.}$$

Portanto (f_j) é de Cauchy em $L^{1^*}(\Omega)$ e existe U tal que

$$\boxed{f_j \xrightarrow{L^{1^*}(\Omega)} U.}$$

Existe uma subsequência $f_{j_k} \to U$ q.t.p. Logo,

$$\boxed{u = U \in L^{1^*}(\Omega).}$$

Impondo $j \to \infty$ na desigualdade já destacada acima segue

$$\|u\|_{1^*} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_1.$$

◇ Caso $1 < p < n$. Sejam $f \in C_c^1(\Omega)$ [espaço denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$] e $\gamma > 1$. No comentário prévio (6) introduzimos

$$\phi(t) = |t|^\gamma \in C^1(\mathbb{R}).$$

Segue

$$|f|^\gamma = \phi(f) \in C_c^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \left|\nabla(|f|^\gamma)\right| = \left|\phi'(f)\nabla f\right| \le \gamma|f|^{\gamma-1}|\nabla f|.$$

Encontramos então, pelo caso já mostrado e a desigualdade de Hölder,

$$\||f|^\gamma\|_{\frac{n}{n-1}} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int |f|^{\gamma-1}|\nabla f|dx \text{ e}$$

$$\boxed{\left\||f|^\gamma\right\|_{\frac{n}{n-1}} \le \tfrac{\gamma}{\sqrt{n}}\left\||f|^{\gamma-1}\right\|_{p'}\|\nabla f\|_p.}$$

Seja $p' = p/(p-1)$ o conjugado de p. Para $p < n$ escolhamos γ tal que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)p' = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}; \quad \text{i.e., } \gamma = \frac{(n-1)p}{n-p} > 1 \text{ e } \frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*.$$

Segue

$$\left\|f\right\|_{p^*}^{p^*\left(\frac{n-1}{n}\right)} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\left\|f\right\|_{p^*}^{p^*\left(\frac{p-1}{p}\right)}\|\nabla f\|_p$$

e então (cheque)

$$\left\|f\right\|_{p^*}^{p^*\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)} = \|f\|_{p^*} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|\nabla f\|_p.$$

Por um argumento padrão de densidade (vide caso $p = 1$) obtemos (**cheque**)

$$\|u\|_{p^*} \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_p, \text{ para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

◇ **Caso** $p > n$. O sub-caso $|\Omega| = \infty$ é trivial. Suponhamos $|\Omega| < \infty$. Sejam $f \in C_c^1(\Omega)$ [espaço denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$], com f não nula, e $\gamma > 1$. Definamos

$$F = \frac{\sqrt{n}|f|}{\|\nabla f\|_p}.$$

Sub-caso $|\Omega| = 1$. Consideremos os expoentes conjugados

$$n' = \frac{n}{n-1} \quad \text{e} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

A desigualdade em norma e já provada (e destacada) para $|f|^\gamma$ mostra

$$\|F^\gamma\|_{n'} = \frac{n^{\frac{\gamma}{2}}}{\|\nabla f\|_p^\gamma}\big\| |f|^\gamma \big\|_{n'} \leq \frac{n^{\frac{\gamma}{2}}}{\|\nabla f\|_p^\gamma}\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\left\||f|^{\gamma-1}\right\|_{p'}\|\nabla f\|_p.$$

Logo,

$$\|F^\gamma\|_{n'} \leq \gamma\left\|F^{\gamma-1}\right\|_{p'}.$$

Donde segue

$$\|F\|_{\gamma n'} = \|F^\gamma\|_{n'}^{\frac{1}{\gamma}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\left\|F^{\gamma-1}\right\|_{p'}^{\frac{1}{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\left\|F\right\|_{p'(\gamma-1)}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

No capítulo 1 - seção 1.4 - desigualdades e interpolações básicas - vimos que sob as hipóteses $r < s$ e $|\Omega| = 1$, vale $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_s$.

Concluímos então que

$$\boxed{\|F\|_{\gamma n'} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}}\left\|F\right\|_{\gamma p'}^{1-\gamma^{-1}}.}$$

Notemos que $p > n$ implica $p' < n'$. Substituamos

$$\gamma = \delta^k, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, \text{ onde } \delta = \frac{n'}{p'} > 1.$$

Encontramos então (a identidade $p'\delta^k = n'\delta^{k-1}$ é utilizada)

$$\|F\|_{n'\delta^k} \leq \delta^{k\delta^{-k}}\left\|F\right\|_{p'\delta^k}^{1-\delta^{-k}} = \delta^{k\delta^{-k}}\left\|F\right\|_{n'\delta^{k-1}}^{1-\delta^{-k}}.$$

Iterando encontramos

$$\|F\|_{n'\delta^k} \leq \delta^{k\delta^{-k}+(k-1)\delta^{-(k-1)}+\cdots+1\delta^{-1}}\left\|F\right\|_{n'}^{(1-\delta^{-k})(1-\delta^{-(k-1)})\cdots(1-\delta^{-1})}.$$

À esquerda temos $\|F\|_{\delta^k} \leq \|F\|_{n'\delta^k}$. À direita, pelo caso $p = 1$ e $n' = 1^*$ segue

$$\left\|F\right\|_{n'} = \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla f\|_p}\|f\|_{n'} = \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla f\|_p}\|f\|_{1^*} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|\nabla f\|_p}\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f\|_1 \leq 1.$$

Vale então a desigualdade (a soma infinita $\sum j\delta^{-j}$ converge, **cheque**)

$$\left\|F\right\|_{\delta^k} \leq c = \delta^{\sum j\delta^{-j}} < \infty.$$

O teorema "A função convexa $p \mapsto \|f\|_p^p$" (capítulo 1 - seção 1.4) garante a convergência

$$\|F\|_{\delta^k} \xrightarrow{k\to\infty} \|F\|_\infty.$$

Donde segue $\sup(F) \leq c$ e destacamos a desigualdade

$$\boxed{\sup_\Omega |f| \leq \tfrac{c}{\sqrt{n}}\|\nabla f\|_p.}$$

Por um argumento de densidade chegamos a (cheque)

$$\text{ess sup}(|u|) = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_p, \text{ para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ainda, dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe $(f_j) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $f_j \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $f_j \xrightarrow{\text{q.t.p.}} u$. Utilizemos a desigualdde destacada imediatamente acima. No conjunto $\overline{\Omega}$, a sequência (f_j) é de Cauchy na norma do sup e converge uniformemente a uma função contínua $\widetilde{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. É trivial ver que

$$u = \widetilde{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$.

Sub-caso Ω geral. Introduzamos a mudança $x = T(y) = |\Omega|^{\frac{1}{n}} y = (|\Omega|^{\frac{1}{n}} I_n)y$, com I_n o operador identidade de ordem n. Segue

$$|T^{-1}(\Omega)| = |\det T^{-1}||\Omega| = 1.$$

Dada $f \in C_c^1(\Omega)$ temos o produto matricial $\nabla(f \circ T) = (\nabla f)(T) \times T$ e então

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega |f| &= \sup_{T^{-1}(\Omega)} |f \circ T| \\
&\leq \frac{c}{\sqrt{n}} \left(\int_{T^{-1}(\Omega)} |(\nabla f)(Ty) \times T|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{c|\Omega|^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \left(\int_{T^{-1}(\Omega)} |(\nabla f)(Ty)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{c|\Omega|^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \left(\int_{\Omega} |(\nabla f)|^p |\Omega|^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{c|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}}{\sqrt{n}} \|\nabla f\|_p.
\end{aligned}$$

Por densidade, tal desigualdade vale em $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$. Cheque♣

Corolário. *Valem as imersões contínuas*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega) & \text{se } kp < n \\ \\ C^m(\overline{\Omega}) & \text{se } 0 \le m < k - \frac{n}{p} \left[= \frac{kp-n}{p}\right]. \end{cases}$$

[O número $k - (n/p)$ é chamado **suavidade líquida de** $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$*.]*

Prova.

- ◇ A primeira inclusão. O caso $k = 1$ segue do teorema. Supondo a inclusão contínua válida se $kp < n$, provemos para $(k+1)p < n$. Dada $u \in W_0^{k+1,p}(\Omega)$ segue $\{u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u\} \subset W_0^{k,p}(\Omega)$. Por hipótese de indução temos $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega)$. O caso $k = 1$ garante

$$u \in W^{1,\frac{np}{n-kp}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\left(\frac{np}{n-kp}\right)^*}(\Omega) = L^{\frac{n\frac{np}{n-kp}}{n-\frac{np}{n-kp}}}(\Omega) = L^{\frac{np}{n-(k+1)p}}(\Omega).$$

  O caso $k = 1$ e a hipótese de indução garantem

$$\|u\|_{\frac{np}{n-(k+1)p}} = \|u\|_{\left(\frac{np}{n-kp}\right)^*} \le C_1 \|\nabla u\|_{\frac{np}{n-kp}} \le C_1 C_2 \|\nabla u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} \le C_1 C_2 \|u\|_{W_0^{k+1,p}(\Omega)}.$$

- ◇ A segunda inclusão. Sejam $m = 0$ e k qualquer. É evidente a inclusão $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, com o teorema obtemos

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

  As inclusões desejadas valem se $k = 1$, pois então temos $m = 0$ e $p > n$.

  Supondo a afirmação válida para k provemo-la para $k+1$. Consideremos

$$f \in C_c^{k+1}(\Omega) \subset W_0^{k+1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad 1 \le m < k + 1 - \frac{n}{p}$$

  [para $m = 0$ use a afirmação para k]. Seguem, com a hipótese de indução,

$$0 \le m - 1 < k - \frac{n}{p} \quad \text{e} \quad \{\partial^\alpha f : |\alpha| \le 1\} \subset W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{\Omega}).$$

  Portanto existe $C_1 > 0$ tal que

$$\max_{|\alpha|\le 1, |\beta| \le m-1} \sup_\Omega |\partial^\beta \partial^\alpha f| \;\le\; C_1 \Big(\|f\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} + \|\nabla f\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} \Big).$$

  Logo, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|f\|_{C^m(\Omega)} = \max_{|\gamma| \le m} \sup_\Omega |\partial^\gamma f| \;\le\; C_2 \|f\|_{W_0^{k+1,p}(\Omega)}.$$

  (Exercício.) Finalize com um argumento de densidade [vide prova do teorema]♣.

3.7 Estimativas para o Potencial e Teoremas de Imersão.

Seja Ω um aberto limitado. Aperfeiçoemos os resultados de imersão, via estimativas para o potencial, e provemos o **teorema de imersão de Morrey**.

Dado $\mu \in (0,1]$, definimos o **operador** V_μ atuando em $L^1(\Omega)$ - o lema a seguir garante tal fato - pelo **potencial de Riesz**

$$V_\mu(f)(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy, \text{ onde } x \in \Omega.$$

[Já vimos no capítulo 1 que $z \mapsto |z|^\lambda$ pertence a $L^1\big(B(0,1)\big)$ se e só se $\lambda > -n$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, então V_μ é **operador de convolução de núcleo** $K(z) = |z|^{n(\mu-1)}$.]

Inicialmente, verifiquemos que para a função $f \equiv 1$ temos

$$(3.7.1) \qquad V_\mu 1 = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)}dy \le \mu^{-1}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu \qquad [\omega_n \text{ o volume de } B(0,1)].$$

Obviamente podemos supor $|\Omega| < \infty$. Existe um único $r > 0$ tal que $|B(x,r)| = |\Omega|$.

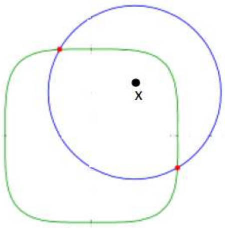

Figura 3.22: O aberto Ω e $B(x,r)$, com $|\Omega| = |B(x,r)|$.

Segue

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |y-x|^{n(\mu-1)}dy &= \int_{\Omega\cap B(x,r)} |y-x|^{n(\mu-1)}dy + \int_{\Omega\setminus B(x,r)} |y-x|^{n(\mu-1)}dy \\
&\le \qquad\qquad '' \qquad\qquad + \int_{\Omega\setminus B(x,r)} r^{n(\mu-1)}dy \\
&= \qquad\qquad '' \qquad\qquad + \int_{B(x,r)\setminus\Omega} r^{n(\mu-1)}dy \\
&\le \qquad\qquad '' \qquad\qquad + \int_{B(x,r)\setminus\Omega} |y-x|^{n(\mu-1)}dy \\
&= \int_{B(x,r)} |y-x|^{n(\mu-1)}dy \\
&= \int_0^r \int_{S^{n-1}} \rho^{n(\mu-1)}\rho^{n-1} d\sigma\, d\rho = \frac{r^{n\mu}}{n\mu}\sigma(S^{n-1}) \\
&= (r^n\omega_n)^\mu \omega_n^{1-\mu}\mu^{-1} \\
&= \mu^{-1}\omega_n^{1-\mu}|B(0,r)|^\mu \clubsuit
\end{aligned}$$

Dado $p \in [1, \infty)$ e um coeficiente $\mu \in (0, 1]$, consideremos valores $q \geq 1$ tais que

$$0 \leq \delta = \delta(p, q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu.$$

Destaquemos que

$$q \;\in\; \begin{cases} \left[p, \frac{1}{\frac{1}{p} - \mu}\right) & \text{se } 0 < \mu < \frac{1}{p} \\ \\ [p, +\infty] & \text{se } \frac{1}{p} \leq \mu \leq 1. \end{cases}$$

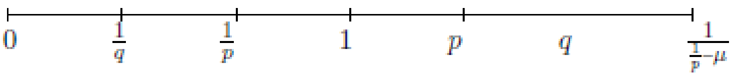

Figura 3.23: Distribuição dos expoentes p e q e seus inversos, no caso $\mu < \frac{1}{p}$.

Lema (O operador V_μ, potencial de Riesz). *Sejam p, μ, q e δ como acima. Então,*

$$V_\mu : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega) \qquad \left[V_\mu(f)(x) = \int_\Omega |x - y|^{n(\mu-1)} f(y)dy\right],$$

é linear contínua e satisfaz

$$\|V_\mu f\|_q \leq \left(\frac{1 - \delta}{\mu - \delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p.$$

[Em particular, se $p = q$ temos $\delta = 0$ e $V_\mu : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ operador contínuo.]

Prova.

◇ Seja $r \geq 1$ definido por

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1 - \delta \qquad \left[\text{com } 1 \geq r(\mu - 1) + 1 > r\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1\right) + 1 = 0\right].$$

Fixado $x \in \Omega$ e abusando da notação, a função $K_x(y) = |x - y|^{n(\mu-1)}$ satisfaz (vide desigualdade 3.7.1 seguinte à definição do potencial do Riesz)

$$\begin{aligned} \|K_x\|_r^r &= \int_\Omega |x - y|^{nr(\mu-1)} dy \\ &= \int |x - y|^{n\left\{[r(\mu-1)+1]-1\right\}} dy \\ &= V_{[r(\mu-1)+1]}(1) \\ &\leq \frac{1}{r(\mu - 1) + 1}\, \omega_n^{1-[r(\mu-1)+1]} |\Omega|^{[r(\mu-1)+1]}. \end{aligned}$$

Donde segue

$$\|K_x\|_r \leq \left(\frac{1}{r(\mu-1)+1}\right)^{\frac{1}{r}} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-1+\frac{1}{r}}$$
$$= \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}.$$

Então, $\boxed{M = \sup\{\|K_x\|_r : x \in \Omega\}}$ é menor ou igual à última quantidade acima.

A seguir, adaptamos a prova da *desigualdade de Young generalizada para convoluções sobre todo o* $\mathbb{R}^n$ (capítulo 2 - seção 2.2 - produto de convolução). Abusando da notação, indiquemos $K_x = K$. Escrevamos (cheque)

$$K|f| = K^{\frac{r}{q}} K^{r\left(1-\frac{1}{p}\right)} |f|^{\frac{p}{q}} |f|^{p\delta} = (K^r|f|^p)^{\frac{1}{q}} K^{r\left(1-\frac{1}{p}\right)} |f|^{p\delta}.$$

Se $\delta = 0$, podemos eliminar o termo $|f|^{p\delta}$. Notemos que

$$\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}+\delta \ = \ 1 \ = \ \frac{1}{q}+\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}+\frac{1}{\frac{1}{\delta}} \qquad [\text{se } \delta > 0].$$

Então, pela *desigualdade de Hölder generalizada* encontramos

$$V_\mu f(x) = \int_\Omega K(x-y)|f(y)|dy$$
$$\leq \left(\int_\Omega K^r(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega K^r(x-y)dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(y)|^p dy\right)^{\delta}.$$

Segue, graças à definição de M e ao *teorema de Fubini*,

$$\int_\Omega V_\mu f(x)^q dx \ \leq \ M^{rq\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_p^{pq\delta} \int_\Omega |f(y)|^p \int_\Omega K^r(x-y)\, dx\, dy$$
$$\leq M^{rq\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_p^{pq\delta} M^r \|f\|_p^p.$$

Encontramos então (se $\delta \neq 0$, notando que o caso $\delta = 0$ segue junto)

$$\|V_\mu f\|_q \leq M^{r\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \|f\|_p^{p\left(\delta+\frac{1}{q}\right)}$$
$$= M\|f\|_p$$
$$\leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p \clubsuit$$

Seguem dois lemas que conectam derivadas fracas e potenciais de Riesz.

Seja $v \cdot w$ o produto interno entre os vetores v e w, ambos em $\mathbb{R}^n$.

Lema (Representação via Potencial de Riesz). *Seja* $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. *Então,*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\Omega} \frac{(x-y) \cdot \nabla u(y)}{|x-y|^n} dy \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Prova.

- Notemos que $(x-y) \cdot \nabla u(y) = \sum (x_j - y_j)\partial_j u(y)$.
- Seja $f \in C_c^1(\Omega)$ e estendamos $f \equiv 0$ em Ω^c. Dada a direção $\omega \in S^{n-1}$ temos

$$f(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dr}\{f(x+r\omega)\}dr.$$

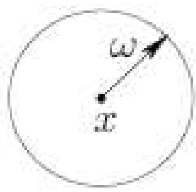

Figura 3.24: O ponto x e uma direção ω.

A seguir integramos tal identidade em S^{n-1}, utilizamos $\sigma(S^{n-1}) = n\omega_n$ [vide *teorema de mudança de variável em coordenadas polares* no capítulo 1] e na passsagem final substituímos $x + r\omega = y$ e novamente aplicamos o *teorema de mudança de variável em coordenadas polares* .

Ainda mais, objetivando claridade utilizamos a **notação de Einstein** e suprimimos o símbolo Σ de somatório que é então subentendido. Obtemos

$$\begin{aligned} -f(x)n\omega_n &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \omega \cdot \nabla f(x+r\omega)\, d\sigma(\omega)dr \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \omega_j \partial_j f(x+r\omega) d\sigma(\omega)dr \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{r\omega_j \partial_j f(x+r\omega)}{r^n} r^{n-1}\, d\sigma(\omega)dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_j-y_j)\partial_j f(y)}{|x-y|^n}\, dy. \end{aligned}$$

O caso para funções em $C_c^1(\Omega)$ está então provado.

◇ Sejam $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e uma sequência $(f_j) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que

$$f_j \xrightarrow{W_0^{1,1}(\Omega)} u.$$

O teorema *convergência em L^p e convergência pontual* (capítulo 1 - seção 1.3) permite supor

$$f_j \longrightarrow u \ \text{ q.t.p.}$$

O lema "O operador V_μ", com $p = q = 1$ e $\mu = 1/n$, mostra a continuidade de

$$V_{\frac{1}{n}} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega).$$

Para cada x em Ω temos

$$\left| f_j(x) - \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega \frac{(x-y)\cdot \nabla u(y) dy}{|x-y|^n} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\omega_n} \left| \int_\Omega \frac{(x-y)\cdot \nabla f_j(y) dy}{|x-y|^n} - \int_\Omega \frac{(x-y)\cdot \nabla u(y) dy}{|x-y|^n} \right| \\
&\leq \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega |x-y|^{-n+1} |\nabla f_j - \nabla u|(y) dy \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega |x-y|^{n(\frac{1}{n}-1)} |\nabla f_j - \nabla u|(y) dy \\
&\leq \frac{1}{n\omega_n} V_{\frac{1}{n}} |\nabla f_j - \nabla u|(x).
\end{aligned}$$

Como $|\nabla f_j - \nabla u| \to 0$ em $L^1(\Omega)$ segue que

$$V_{\frac{1}{n}} \left(|\nabla f_j - \nabla u| \right) \xrightarrow{L^1(\Omega)} 0.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor

$$V_{\frac{1}{n}} (|\nabla f_j - \nabla u|) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Já comentamos que $f_j \to u$ q.t.p. Por fim, concluímos

$$u(x) = \int_\Omega \frac{(x-y)\cdot \nabla u(y) dy}{|x-y|^n} \text{ q.t.p. em } \Omega ♣$$

O lema a seguir será utilizado na prova do **teorema da imersão de Morrey**.

Lema (ao primeiro teorema da imersão de Morrey). *Sejam* Ω *convexo (e limitado) e* $u \in W^{1,1}(\Omega)$*. Então,*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int\limits_{\Omega} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \quad q.t.p. \ em \ \Omega,$$

onde S *é um subconjunto mensurável de* Ω *e, ainda,*

$$u_S = \frac{1}{|S|} \int\limits_{S} u(y) dy \ [a \ média \ de \ u \ em \ S] \quad e \quad d = diam(\Omega).$$

Prova.

◇ Dado $x \in \Omega$, temos $\Omega \subset B(x,d)$.

◇ Pelo *teorema de Meyers-Serrin*, $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ é denso em $W^{1,1}(\Omega)$. Seja $f \in C^\infty(\Omega)$. Dados x e y, ambos em Ω, é trivial ver que (cheque)

$$f(x) - f(y) = -\int_0^{|x-y|} \frac{d}{dr}\{f(x+r\omega)\} dr, \quad \text{onde } \omega = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

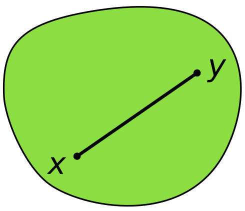

Figura 3.25: Dois pontos, x e y, em um convexo Ω.

Notemos que $\omega = \omega(x,y)$. Fixemos x. Integrando em y e sobre S achamos

$$|S|\,[f(x) - f_S] = -\int\limits_{S} \int\limits_{0}^{|x-y|} \nabla f(x+r\omega) \cdot \omega \, dr \, dy.$$

Dado $r \geq 0$, o ponto $x+r\omega$ está na reta contendo x e de direção ω. Definamos

$$\nabla f = 0 \text{ fora de } \Omega.$$

As coordenadas de ∇f estão então estendidas ao $\mathbb{R}^n$ e são mensuráveis.

A *desigualdade triangular para integrais*, a observação $\Omega \subset B(x,d)$, o *teorema de Tonelli* e uma *troca de variável com coordenadas polares*, mostram

$$|S|\,\big|f(x) - f_S\big| \leq \int\limits_{S} \int\limits_{0}^{|x-y|} |\nabla f(x+r\omega) \cdot \omega| \, dr \, dy$$

$$\leq \int_0^\infty \int_{B(x,d)} |\nabla f(x+r\omega)\cdot\omega|\,dy\,dr$$
$$= \int_0^\infty \int_{B(x,d)} \left|\nabla f\left(x + r\frac{y-x}{|y-x|}\right)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\right| dy\,dr$$
$$= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \int_0^d \left|\nabla f\left(x + r\frac{\rho\omega}{|\rho\omega|}\right)\cdot\frac{\rho\omega}{|\rho\omega|}\right| \rho^{n-1}\,d\rho\,d\omega\,dr$$
$$= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \int_0^d |\nabla f(x+r\omega)\cdot\omega|\,\rho^{n-1}\,d\rho\,d\omega\,dr$$
$$= \frac{d^n}{n}\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |\nabla f(x+r\omega)\cdot\omega|\,d\omega\,dr$$
$$= \frac{d^n}{n}\int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \left|\nabla f(x+r\omega)\cdot\frac{\omega}{r^{n-1}}\right| r^{n-1}\,dr\,d\omega$$
$$= \frac{d^n}{n}\int_\Omega \left|\nabla f(y)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^n}\right| dy$$
$$\leq \frac{d^n}{n}\int |x-y|^{1-n}\,|\nabla f(y)|\,dy$$

- ◇ Sejam $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e $(f_j) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $f_j \xrightarrow{W^{1,1}(\Omega)} u$. O teorema *convergência em L^p e convergência pontual* permite supor $\boxed{f_j \longrightarrow u \text{ q.t.p.}}$ O lema "o potencial V_μ", com $p = q = 1$ e $\mu = 1/n$, mostra a continuidade de

$$V_{\frac{1}{n}} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega).$$

Pelo que provamos até aqui temos

$$\boxed{\left|f_j(x) - (f_j)_S\right| \leq \tfrac{d^n}{n|S|}\left(V_{\frac{1}{n}}|\nabla f_j|\right)(x) \text{ q.t.p.}}$$

Em $L^1(\Omega)$, como $\nabla f_j \to \nabla u$ então $|\nabla f_j| \to |\nabla u|$ e $V_{1/n}|\nabla f_j| \to V_{1/n}|\nabla u|$. Passando a uma subsequência, se preciso, podemos supor

$$\boxed{V_{\frac{1}{n}}|\nabla f_j| \to V_{\frac{1}{n}}|\nabla u| \text{ q.t.p.}}$$

Como $f_j \to u$ em $L^1(\Omega)$, então $\boxed{(f_j)_S \to u_S}$. Os destaques dados mostram

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u|(y)dy \text{ q.t.p. em } \Omega\clubsuit$$

Definição (Espaços de Hölder). Sejam $k \in \mathbb{N}$ e um expoente (de Hölder) $\gamma \in (0,1]$. Seja $C^k(\overline{\Omega})$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cujas derivadas até ordem k são contínuas e com extensões contínuas a $\overline{\Omega}$. O **espaço de Hölder** $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é o subespaço normado das funções f em $C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas até ordem k são limitadas e cujas derivadas de ordem k são Hölder-contínuas com expoente γ. Ainda, a norma é

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha f| \; + \; \max_{|\beta|=k} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Seja $k = 0$. O espaço $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é normado e completo, com norma (cheque)

$$\boxed{\|f\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} = \sup_{\overline{\Omega}} |f| + \sup_{x\neq y} \tfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}.}$$

Definição. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, a **oscilação de** f **em** X é

$$\boxed{\operatorname{osc}(f) = \operatorname{osc}(f, X) = \sup_{x,y} |f(x) - f(y)| = \operatorname{diam}[f(X)].}$$

Teorema [Imersão de Morrey para $W_0^{1,p}(\Omega)$]. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p > n$. Então,*

$$u \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right), \text{ com } \gamma = 1 - \frac{n}{p}.$$

Ainda, para cada bola $B = B_r$ de raio r vale a desigualdade

$$osc(u, \Omega \cap B_r) \leq c r^\gamma \|\nabla u\|_p, \quad \text{onde } c = c(n,p).$$

Ainda mais,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Prova. [Como já convencionado, Ω é limitado.]

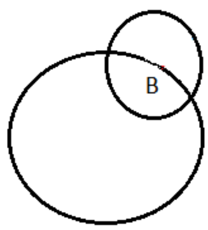

Figura 3.26: A intersecção $\Omega \cap B$, com B uma bola.

◇ As *desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg* garantem

$$\boxed{u \in C^0(\overline{\Omega}).}$$

◇ Como $|\Omega| < \infty$, então $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

◇ Seja $f \in C_c^1(\Omega)$ [espaço denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$], imersa em $C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

◇ Então, $F = f|_B \in W^{1,1}(B)$. Pelo lema a este teorema (B é convexa), segue

$$|F(x) - F_B| \leq \frac{(2r)^n}{nr^n\omega_n} \int_B |x-y|^{1-n} |\nabla F|(y)dy \quad \text{para todo } x \in B.$$

Utilizemos o lema "O potencial V_μ", com

$$q = \infty, \quad \mu = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{1}{p} - 0 < \frac{1}{n} \qquad\qquad [p > n].$$

Segue

$$\begin{aligned}|F(x) - F_B| &\leq \frac{(2r)^n}{nr^n\omega_n} \left(\frac{1 - \frac{1}{p}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \omega_n^{1-\frac{1}{n}} (r^n \omega_n)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \|\nabla F\|_p \\ &= c(n,p) r^\gamma \|\nabla F\|_p.\end{aligned}$$

◇ Dados quaisquer $x \in B$ e $y \in B$, com a desigualdade triangular encontramos

$$|F(x) - F(y)| \leq 2cr^\gamma \|\nabla F\|_p, \text{ onde } c = c(n,p).$$

Segue $\operatorname{osc}(F, B) \leq 2cr^\gamma \|\nabla F\|_p$.

É trivial ver que

$$\operatorname{osc}(f, \Omega \cap B) \leq \operatorname{osc}(F, B) \quad \text{e} \quad \|\nabla F\|_p = \|\nabla f\|_{L^p(B)}.$$

Logo, podemos destacar

$$\boxed{\operatorname{osc}(f, \Omega \cap B) \leq 2cr^\gamma \|\nabla f\|_{L^p(B)}.}$$

◇ Sejam $x \in \Omega$ e $y \in \Omega$, com $x \neq y$. Seja $B = B(x,r)$ com $r > |y - x|$.

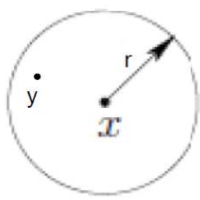

Figura 3.27: Os pontos distintos x e y, ambos em Ω e com $y \in B(x,r)$.

Já vimos

$$|f(x) - f(y)| \leq 2cr^{\gamma}\|\nabla f\|_p.$$

Impondo $r \searrow |y - x|$ encontramos e destacamos

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq 2c|y - x|^{\gamma}\big\|\nabla f\big\|_p.}$$

◇ Seja $(f_j) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $f_j \to u$ na topologia do espaço $W^{1,p}(\Omega)$. Logo,

$$\|\nabla f_j\|_p \to \|\nabla u\|_p.$$

Pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual*, podemos supor $f_j \to u$ q.t.p. em Ω. Utilizando as duas desigualdades destacadas para f e também que $u \in C(\Omega)$, encontramos as desigualdades (cheque)

$$\begin{cases} \operatorname{osc}(u, \Omega \cap B_r) \leq 2cr^{\gamma}\|\nabla u\|_p \\ \text{e} \\ |u(x) - u(y)| \leq 2c|y - x|^{\gamma}\|\nabla u\|_p \text{ se } x \in \Omega \text{ e } y \in \Omega. \end{cases}$$

Porém, $u \in C\big(\overline{\Omega}\big)$ e esta última desigualdade também vale em $\overline{\Omega}$. Segue

$$\sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}, y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \leq 2c\|\nabla u\|_p.$$

Logo, $u \in C^{0,\gamma}\big(\overline{\Omega}\big)$.

◇ A continuidade da inclusão. Pela definição da norma em $C^{0,\gamma}\big(\overline{\Omega}\big)$, as desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (caso $p > n$) e a última desigualdade mostrada acima obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}, y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \\ &\leq c_1\big\|\nabla u\big\|_p + 2c\big\|\nabla u\big\|_p \clubsuit \end{aligned}$$

As desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg não são necessárias para obter muitas das estimativas a priori. Em várias situações bastam as (famosas) desigualdades de Poincaré a seguir.

Corolário (Desigualdades de Poincaré). *Seja $1 \le p < \infty$. Vale o que segue.*

(a) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u\|_p \le \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p.$$

(b) Suponhamos Ω convexo. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u - u_\Omega\|_p \le d^n \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{1-\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p, \ \textit{onde } d = \mathit{diam}(\Omega).$$

Prova. [Como já convencionado, Ω é limitado.]

- ⋄ Empreguemos o lema "o potencial de Riesz V_μ" com

$$\mu = \frac{1}{n}, \quad q = p \text{ e } \quad \delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0.$$

- ⋄ Por hipótese, $|\Omega| < \infty$. Logo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

(a) O lema "representação via potencial de Riesz" revela

$$|u| \le \frac{1}{n\omega_n} V_{\frac{1}{n}} |\nabla u|.$$

Pelo lema "o potencial de Riesz V_μ" encontramos

$$\|u\|_p \le \frac{1}{n\omega_n} n\omega_n^{1-\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p = \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p.$$

(b) O "lema ao teorema da imersão de Morrey" revela

$$|u - u_\Omega| \le \frac{d^n}{n|\Omega|} V_{\frac{1}{n}} |\nabla u|.$$

Pelo lema "o potencial de Riesz V_μ" encontramos

$$\|u - u_\Omega\|_p \le \frac{d^n}{n|\Omega|} n\omega_n^{1-\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_p ♣$$

3.8 Estimativas de Morrey e John-Nirenberg.

Por enquanto vamos apenas comentar sobre tais estimativas. Voltaremos a elas quando apropriado (se for o caso). Para provar tais estimativas consideramos o potencial de Riesz V_μ em uma diferente classe de espaços (não mais de tipo L^p).

Definição. Seja $p \in [1, \infty]$. Seja B_R uma bola arbitrária de raio R arbitrário. Introduzimos

$$M^p(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} f \in L^1(\Omega): & \text{existe uma constante } K \text{ tal que temos} \\ & \displaystyle\int_{\Omega \cap B_R} |f|\, dx \leq K R^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \text{ para toda } B_R \end{array} \right\}.$$

Dada $f \in M^p(\Omega)$, a sua norma é dada por

$$\|f\|_{M^p(\Omega)} = \inf \left\{ K : \int_{\Omega \cap B_R} |f|\, dx \leq K R^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \text{ para toda } B_R \right\}.$$

Propriedades Básicas. *Com as notações acima, temos*

- $L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega)$.
- $L^1(\Omega) = M^1(\Omega)$.
- $L^\infty(\Omega) = M^\infty(\Omega)$.

Prova. Exercício♣

Ao invés de considerarmos em detalhes o operador V_μ em um arbitrário $M^p(\Omega)$, nos limitaremos ao caso $p \geq \mu^{-1}$.

Lema (ao segundo teorema da imersão de Morrey). *Sejam* $f \in M^p(\Omega)$ *e*

$$\delta = \frac{1}{p} < \mu.$$

Então segue

$$|V_\mu f(x)| \leq \frac{1-\delta}{\mu - \delta} [diam(\Omega)]^{n(\mu-\delta)} \, \|f\|_{M^p(\Omega)} \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Prova. Vide Gilbard & Trudinger [10, p. 165]♣

Teorema (Imersão de Morrey para $W^{1,1}(\Omega)$). *Seja $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Seja B_R uma bola arbitrária de raio R arbitrário.*

- *Suponhamos que existem constantes positivas K e $\alpha \geq 1$ tais que temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \leq KR^{n-1+\alpha} \text{ para toda } B_R \subset \Omega.$$

Sob tais condições seguem que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e para toda $B_R \subset \Omega$ temos

$$osc(u, B_R) \leq CKR^{\alpha},$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

- *Suponhamos*

$$\Omega = O \cap \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in O : x_n > 0\}$$

para algum domínio (aberto conexo) $O \subset \mathbb{R}^n$ e que para tal aberto O temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \leq KR^{n-1+\alpha} \text{ para toda } B_R \subset O.$$

Neste caso obtemos

$$\begin{cases} u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega} \cap O\right) \\ e \\ osc(u, B_R) \leq CKR^{\alpha} \text{ para toda } B_R \subset O, \end{cases}$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Prova.

Combine o "lema ao segundo teorema da imersão de Morrey" imediatamente acima com o "lema ao primeiro teorema da imersão de Morrey"♣

Como mais uma consequência do "lema ao segundo teorema da imersão de Morrey" encontramos o resultado abaixo.

Lema (ao teorema de John-Nirenberg). *Seja* $f \in M^p(\Omega)$, *com* $p > 1$, *e*

$$g = V_{\frac{1}{p}} f.$$

Então, existe constantes c_1 *e* c_2, *dependentes somente de* n *e* p, *tais que temos*

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|g|}{c_1 K}\right) dx \leq c_2 [diam(\Omega)]^n, \text{ onde } K = \|f\|_{M^p(\Omega)}.$$

Prova. Vide Gilbard & Trudinger [10, p. 166]♣

Teorema da Imersão (John-Nirenberg). *Sejam* Ω *convexo e* $u \in W^{1,1}(\Omega)$. *Seja* B_R *uma bola arbitrária de raio* R *arbitrário. Suponhamos que exista uma constante* K *satisfazendo*

$$\int_{\Omega \cap B_R} |\nabla u| \, dx \leq K R^{n-1} \text{ para toda } B_R.$$

Então, existem constantes positivas σ_0 *e* C, *dependentes somente de* n, *tais que*

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\sigma}{K}|u - u_\Omega|\right) dx \leq C[diam(\Omega)]^n,$$

onde

$$\sigma = \frac{\sigma_0 |\Omega|}{[diam(\Omega)]^n}.$$

Prova.

Combine o "lema ao segundo teorema da imersão de Morrey" com o "lema ao teorema (da imersão) de John-Nirenberg" imediatamente acima♣

3.9 Resultados de Compacidade.

Definição. Sejam X_1 e X_2 dois espaços normados e $T : X_1 \to X_2$ linear contínua. Dizemos que T é **compacta** se para todo subconjunto limitado $A \subset X_1$ temos que $T(A)$ é **relativamente compacto em** X_2 [isto é, $\overline{T(A)}$ é compacto em X_2]. Equivalentemente (cheque),

$$\boxed{T \text{ é } \textbf{compacto} \text{ se } \overline{T\big(B(0,1)\big)} \text{ é compacto em } X_2.}$$

Definição. Sejam X um espaço normado e $A \subset X$. O conjunto A é **totalmente limitado** se para todo $\epsilon > 0$ existe uma quantidade finita de pontos $a_1, \ldots, a_n$, todos em A, tais que

$$A \subset B(a_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \epsilon).$$

Lema (Relativamente compactos e totalmente limitados). *Sejam X um espaço de Banach e $A \subset X$. Então, A é relativamente compacto se e somente se A é totalmente limitado.*

Prova. Vide, caso queira, Royden & Fitzpatrick [12, p. 199].

(⇒) Seja $\epsilon > 0$. É trivial ver que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon).$$

Como $\overline{A}$ é compacto, existem $a_1 \in A, \ldots, a_N \in A$ (quantidade finita) tais que

$$A \subset \overline{A} \subset B(a_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(a_N, \epsilon).$$

(⇐) Pela bem conhecida **Propriedade de Bolzano-Weierstrass**, basta mostrar que toda sequência em $\overline{A}$ tem uma subsequência convergente em $\overline{A}$. Como $\overline{A}$ é fechado no completo X, segue que $\overline{A}$ é completo. Logo, basta mostrar que toda sequência em $\overline{A}$ tem uma subsequência de Cauchy.

Seja então (α_j) uma sequência em $\overline{A}$. Observemos que $\overline{A}$ é totalmente limitado (pois A é totalmente limitado). Então, dado $\epsilon = 1$ existe uma subsequência (α_j^1), de (α_j), contida em uma bola de raio 1. Por indução, existe uma subsequência (α_j^k), de (α_j^{k-1}), contida em uma bola de raio $1/k$.

Pelo **método da diagonalização de Cantor**, (α_j^j) é de Cauchy♣

Definições. Sejam Y um subconjunto de um espaço normado X e o espaço vetorial real $C(Y) = C(Y, \mathbb{R}) = \{f : Y \to \mathbb{R}, \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}$. Seja $\mathcal{F} \subset C(Y)$.

- A coleção $\mathcal{F}$ é **equicontínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|y_1 - y_2| < \delta \Longrightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon, \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \qquad [y_1 \in Y \text{ e } y_2 \in Y].$$

- $\mathcal{F}$ é **pontualmente limitada** se $\{f(y) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado, para cada $y \in Y$.

Teorema (Ascoli-Arzelá). Sejam K um espaço métrico compacto e o espaço de Banach $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}, \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}$ munido da norma do sup. Consideremos uma coleção $\mathcal{F} \subset C(K)$. Então

$$\mathcal{F} \text{ é relativamente compacta} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F} \text{ é pontualmente limitada} \\ \text{e} \\ \mathcal{F} \text{ é equicontínua.} \end{cases}$$

Prova. Seja $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ a norma em $C(K)$.

($\Rightarrow$) (A implicação trivial.) Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto no espaço de Banach $C(K)$, pelo lema a este teorema segue que $\mathcal{F}$ é totalmente limitada.

Seja $\epsilon > 0$. Existem então $f_1 \in C(K), \ldots, f_N \in C(K)$ tais que

$$\mathcal{F} \subset B(f_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(f_N, \epsilon).$$

Logo, dada uma arbitrária $f \in \mathcal{F}$ temos

$$\|f\| \leq \epsilon + \max_{1 \leq j \leq N} \|f_j\|.$$

Portanto, a coleção $\mathcal{F}$ é **uniformemente limitada**.

Ainda, cada $f_1, \ldots, f_N$ é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f_j(x) - f_j(x')| < \epsilon, \text{ para todos } x \in K, x' \in K \text{ e } j = 1, \ldots, N.$$

Sejam então $x \in K$ e $x' \in K$ tais que $|x - x'| < \delta$. Seja f arbitrária em $\mathcal{F}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \in B(f_1, \epsilon)$. Segue

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_1(x)| + |f_1(x) - f_1(x')| + |f_1(x') - f(x')| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon.$$

($\Leftarrow$) (A implicação susbstancial.) Vide Folland [8, p. 137]♣

Seja $1 \le p < n$. Sejam p^* o conjugado de Sobolev de p e $1 \le q < p^*$. Isto é,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{n-p}{np} \quad \text{e} \quad 1 \le q < p^* \qquad [\text{note-se } p < p^*].$$

Pelas desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg sabemos que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Também sabemos $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois Ω é limitado (v. capítulo 1 - seção 1.4). Logo, o seguinte diagrama de inclusões contínuas é comutativo

$$\begin{tikzcd} W_0^{1,p}(\Omega) \arrow[r, "\jmath"] \arrow[d, "\imath"'] & L^q(\Omega) \\ L^{p^*}(\Omega) \arrow[ur, "\imath_*"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado e um expoente $p \ge 1$.*

(a) *Suponhamos $p < n$. Seja $q \ge 1$ tal que*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \qquad \left[\textit{i.e.}, \ 1 \le q < p^* = \frac{np}{n-p}\right].$$

Então, a inclusão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{é compacta.}$$

(b) *Suponhamos $p > n$. Então, a inclusão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0\left(\overline{\Omega}\right) \quad \textit{é compacta.}$$

Prova.

◇ Consideremos o disco unitário $D = D(0,1) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e a usual função "curva do sino ρ" (suportada no disco unitário de $\mathbb{R}^n$).

(a) O caso $q = 1$. Seja $A = C_c^1(\Omega) \cap D(0,1)$. Pela *desigualdade de Hölder* temos

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_p |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \text{ com } p' \text{ o conjugado (usual) de } p.$$

Fixado $\epsilon > 0$, definimos

$$A_\epsilon = \{f_\epsilon : f \in A\}, \text{ onde } f_\epsilon \text{ é uma regularização de } f.$$

Vejamos que A_ϵ é relativamente compacto em $L^1(\Omega)$. Notemos $A_\epsilon \subset C(\overline{\Omega})$.

Como A é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então A é limitado em $L^p(\Omega)$ e em $L^1(\Omega)$. Dada $f \in A$, temos

$$|f_\epsilon(x)| \leq \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)|f(x-\epsilon y)|dy \leq \epsilon^{-n}\|\rho\|_\infty \|f\|_1.$$

Logo, o conjunto A_ϵ é limitado (uniformemente, é redundante) em $C^0(\overline{\Omega})$

[Vide a distinção conceitual entre a regularização f_ϵ e o regularizador ρ_ϵ.] Para o regularizador ρ, é trivial que vale a regra $\partial_j(\rho_\epsilon) = \epsilon^{-1}(\partial_j\rho)_\epsilon$. Segue $\partial_j(f_\epsilon) = \partial_j(\rho_\epsilon * f) = [\partial_j(\rho_\epsilon)] * f = \epsilon^{-1}(\partial_j\rho)_\epsilon * f$ e

$$|\partial_j f_\epsilon(x)| \leq \epsilon^{-1}\int_{|y|\leq 1} |\partial_j\rho(y)|\,|f(x-\epsilon y)|dy \leq \epsilon^{-n-1}\|\partial_j\rho\|_\infty\,\|f\|_1.$$

Logo, o conjunto $\partial_j(A_\epsilon)$ é limitado em $C^0(\overline{\Omega})$ e pelo *teorema do valor médio* vemos que A_ϵ é subconjunto equicontínuo de $C^0(\overline{\Omega})$. O *teorema de Ascoli-Arzelá* mostra que A_ϵ é relativamente compacto em $C^0(\overline{\Omega})$. A aplicação

$$C^0(\overline{\Omega}) \to L^1(\Omega) \text{ definida por } g \mapsto g|_\Omega,$$

é contínua e portanto A_ϵ é relativamente compacto em $L^1(\Omega)$ [cheque].

A seguir, dada $f \in A$ estimamos

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_\epsilon(x)| &\leq \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)|f(x) - f(x-\epsilon y)|dy \\
&= \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)\left|\int\limits_0^\epsilon \frac{d}{dt}\left[f(x-ty)\right]dt\right|dy \\
&\overset{s=t|y|}{\leq} \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)\int\limits_0^{\epsilon|y|}\left|\nabla f\left(x - s\frac{y}{|y|}\right)\cdot y\right|\frac{1}{|y|}ds\,dy \\
&\overset{\omega=\frac{y}{|y|}}{=} \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)\int\limits_0^{\epsilon|y|} |\nabla f\,(x-s\omega)\cdot\omega|\,ds\,dy \\
&\leq \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)\int\limits_0^{\epsilon|y|} |\nabla f\,(x-s\omega)\,|\,ds\,dy.
\end{aligned}$$

Então, integrando em x encontramos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |f(x) - f_\epsilon(x)|\, dx &\leq \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y) \int\limits_{0}^{\epsilon|y|} |\nabla f\,(x - s\omega)\,|\, ds\, dy\, dx \\
&= \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y) \int\limits_{0}^{\epsilon|y|} \int\limits_{\Omega} |\nabla f\,(x - s\omega)\,|\, dx\, ds\, dy \\
&\leq \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y) \int\limits_{0}^{\epsilon|y|} \|\nabla f\|_1\, ds\, dy \\
&\leq \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y) \|\nabla f\|_1 \big(\epsilon\|y\|\big) dy \\
&\leq \epsilon\|\nabla f\|_1 \int\limits_{|y|\leq 1} \rho(y)\, dy \\
&= \epsilon\|\nabla f\|_1. \\
&\leq \epsilon\|\nabla f\|_p\, |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \epsilon|\Omega|^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}
$$

Logo, os conjuntos A e A_ϵ, considerados no espaço $L^1(\Omega)$, estão próximos. Pelo lema *relativamente compactos e totalmente limitados* segue que A_ϵ é totalmente limitado. Segue então que A é totalmente limitado em $L^1(\Omega)$ [cheque] e portanto, pelo mesmo lema, concluímos que A é relativamente compacto em $L^1(\Omega)$.

Demonstramos que a inclusão $\jmath : W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é tal que o conjunto $A = C_c^1(\Omega) \cap D(0,1)$, onde $D(0,1)$ é o disco unitário em $W_0^{1,p}(\Omega)$, satisfaz

$$\overline{\jmath(A)} \text{ é compacto em } L^1(\Omega).$$

Considerada a topologia de $W_0^{1,p}(\Omega)$, é trivial ver que (cheque)

$$\begin{cases} \overline{A} = D(0,1) \\ \jmath\left(\overline{A}\right) \subset \overline{\jmath(A)}. \end{cases}$$

Donde segue que $\jmath\big(D(0,1)\big)$ é relativamente compacto (cheque). Logo,

$$\jmath : W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \text{ é uma imersão compacta.}$$

O caso $q = 1$ está então provado.

O caso $1 < q < p^*$. Então, temos

$$1 < q < \frac{np}{n-p} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \lambda\frac{1}{1} + (1-\lambda)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right), \text{ para algum } \lambda \in [0,1].$$

Vimos na seção 1.4 (desigualdades e interpolações), a desigualdade

$$\|f\|_q \leq \|f\|_1^\lambda \|f\|_{\frac{np}{n-p}}^{1-\lambda} \quad \text{para toda } f \text{ mensurável.}$$

Pelas desigualdades de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_1^\lambda C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda}, \text{ para toda } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a imersão (vide diagrama previamente comentado)

$$\jmath : W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ é contínua.}$$

Seja $D = D(0,1)$ o disco unitário em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mostremos que $\jmath$ é compacta. Pelo lema *relativamente compactos e totalmente limitados*, basta ver que $\jmath(D)$ é totalmente limitado em $L^q(\Omega)$.

Já provamos D relativamente compacto em $L^1(\Omega)$. Pelo lema *relativamente compactos e totalmente limitados*, D é totalmente limitado em $L^1(\Omega)$.

Logo, dado $\epsilon > 0$ existem $u_1 \in D, \ldots, u_N \in D$ tais que

$$\begin{cases} D \subset B_{L^1(\Omega)}(u_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B_{L^1(\Omega)}(u_N, \epsilon), \\ \text{com cada } B_{L^1(\Omega)}(u_j, \epsilon) \text{ uma bola em } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Seja $u \in D$, com u arbitrária. Existe j tal que $\|u - u_j\|_1 < \epsilon$. Logo,

$$\|u - u_j\|_q \leq C\|u - u_j\|_1^\lambda \|u - u_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda} \leq C\epsilon^\lambda 2^{1-\lambda}.$$

É então trivial ver que $D(0,1)$ é totalmente limitado em $L^q(\Omega)$ [cheque]. O lema *relativamente compactos e totalmente limitados* mostra que $D(0,1)$ é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$. Portanto, a imersão j é compacta.

Isto encerra o caso $1 < q < p^*$.

A afirmação (a) está provada.

(b) Sejam $D(0,1)$ o disco unitário em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e u arbitrária em $D(0,1)$.

Seja B_r uma arbitrária bola de raio r arbitrário. Pelo *teorema da imersão de Morrey para o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$ sabemos que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

e que existe uma constante c, independente de r, tal que temos

$$\begin{cases} \sup\limits_{\overline{\Omega}} |u| \leq \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c\|\nabla u\|_p \leq c \\ \text{e} \\ |u(x) - u(y)| \leq cr^\gamma \|\nabla u\|_p \leq cr^\gamma, \text{ se } x \text{ e } y \text{ pertencem a } B_r \cap \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Portanto, a coleção de funções $D(0,1)$ é pontualmente limitada.

A equicontinuidade da coleção $D(0,1)$. Dado $\epsilon > 0$ seja r tal que $cr^\gamma = \epsilon$. Consideremos

$$x \in \overline{\Omega} \text{ e } y \in \overline{\Omega}, \text{ tais que } |x - y| < r.$$

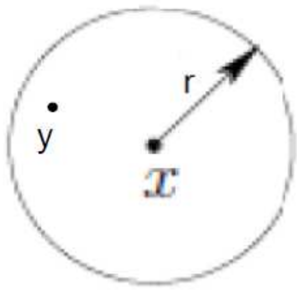

Figura 3.28: Os pontos distintos x e y, ambos em $\overline{\Omega}$, e com $|y - x| < r$.

Então, $y \in B(x,r)$ e, como já dito acima, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq cr^\gamma = \epsilon.$$

Isto mostra que $D(0,1)$ é equicontínua.

Pelo *teorema de Ascoli-Arzelá* segue que $D(0,1)$ é relativamente compacto em $C^0(\overline{\Omega})$. Logo, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacta♣

3.10 Diferenças de Quociente.

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e e_j o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Definimos a **diferença de quociente na direção** e_j pelo quociente de Newton

$$\Delta^h f(x) = \Delta_j^h f(x) = \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}, \text{ onde } h \in \mathbb{R}^*.$$

Lema (Estimativa para o quociente de Newton). *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, $\Delta^h u \in L^p(O)$ para todo $O \subset\subset \Omega$ tal que $|h| < d(O, \partial\Omega)$ e neste caso temos*

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(O)} \leq \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova. Está bem definido $\Delta^h u$ em O (cheque).

◇ Seja $f \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ [espaço denso em $W^{1,p}(\Omega)$, por *Meyers-Serrin*]. Fixado x em Ω, para h pequeno segue

$$\Delta^h f(x) = \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{dt}\{f(x + te_j)\}\, dt$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^h (\partial_j f)(x + te_j) dt.$$

Pela *desigualdade de Hölder* segue

$$|\Delta^h f(x)|^p \leq \frac{1}{|h|^p}\left(\int_0^h |(\partial_j f)(x + te_j)|^p dt\right)\left(\int_0^h 1^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}} dt\right)^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$
$$= \frac{1}{|h|}\int_0^h |(\partial_j f)(x + te_j)|^p dt.$$

Integrando em O, por *Tonelli* segue

$$\int_O |\Delta^h f(x)|^p dx \leq \frac{1}{|h|}\int_0^h \int_O |\partial_j f(x + te_j)|^p dx\, dt \leq \frac{1}{|h|}\int_0^h \int_\Omega |\partial_j f(y)|^p dy\, dt$$
$$= \|\partial_j f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

◇ Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe $(f_k) \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com $f_k \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u$ e assim

$$|h|\|\Delta^h f_k - \Delta^h u\|_{L^p(O)} = \|f_k(\cdot + he_j) - f_k(\cdot) - [u(\cdot + he_j) - u(\cdot)]\|_{L^p(O)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

pela desigualdade triangular. Concluimos então

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(O)} = \lim_{k\to\infty} \|\Delta^h f_k\|_{L^p(O)} \leq \lim_{k\to\infty} \|\partial_j f_k\|_{L^p(\Omega)} = \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} ♣$$

Lema (Existência da derivada fraca em L^p). *Sejam $p \in (1, \infty]$ e $u \in L^p(\Omega)$. Suponhamos que existe uma constante (finita) c satisfazendo*

$$\left\|\Delta^h u\right\|_{L^p(O)} \leq c, \text{ para quaisquer } O \subset\subset \Omega \text{ e } h \text{ tais que } 0 < h < d(O, \partial\Omega).$$

Sob tais condições, a derivada fraca $\partial_j u$ existe e satisfaz

$$\left\|\partial_j u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq c.$$

Ainda mais, dada $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ segue

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega (\Delta^h u)\varphi\, dx = \int_\Omega (\partial_j u)\varphi\, dx.$$

Prova. Se $p = \infty$, a seguir troque *convergência fraca* por *convergência fraca**.

- A derivada fraca. Seja $O \subset\subset \Omega$. Pela compacidade fraca/fraca* do conjunto limitado

  $$\{\Delta^h u : 0 < h < d(O, \partial\Omega)\} \subset L^p(O)$$

  [vide teorema *as compacidades fraca em L^p e fraca* em L^∞* - seção 1.5 - O dual de L^p] existem uma sequência $h_k \to 0^+$ e uma $v = v_O \in L^p(O)$ tais que

  $$\Delta^{h_k} u \xrightarrow{\text{fraca/fraca* em } L^p(O)} v \quad \text{e} \quad \|v\|_{L^p(O)} \leq c.$$

  Dada $\varphi \in C_c^1(O)$ temos

  $$\int_O \varphi \Delta^{h_k} u\, dx \to \int_O \varphi v\, dx.$$

  Para $h_k < d(\text{supp}(\varphi), \partial O)$ segue, pelo *teorema da convergência dominada* e notando que $u \in L^1(O)$ e $\Delta^{-h_k}\varphi$ é uniformemente limitada,

  $$\begin{aligned}\int_O \varphi\Delta^{h_k} u\, dx &= \int_O \frac{\varphi(x)u(x+h_k e_j) - \varphi(x)u(x)}{h_k}\, dx \\ &\overset{y = x + h_k e_j}{=} -\int_O \frac{\varphi(y - h_k e_j)u(y) - \varphi(y)u(y)}{-h_k} dy \\ &= -\int_O u\Delta^{-h_k}\varphi dy \\ &\to -\int_O u\partial_j\varphi\, dy.\end{aligned}$$

  Logo,

  $$\int_O \varphi v\, dx = -\int_O u\partial_j\varphi\, dx \quad \text{e existe } \partial_j u = v_O \in L^p(O).$$

- Sejam O e W abertos relativamente compactos em Ω tais que $O \cap W \neq \varnothing$. No aberto $O \cap W$, a *unicidade da derivada fraca* [vide seção 3.2 - derivadas fracas] garante
$$v_O = \partial_j u = v_W \text{ em } O \cap W.$$
Logo, no aberto Ω (união enumerável de bolas relativamente compactas) está bem definida (q.t.p.) a função
$$v(x) = v_O(x) \text{ se } x \in O, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

- Seja O_i uma sequência de abertos relativamente compactos tal que $O_i \nearrow \Omega$. Pelo já visto temos
$$\|v\|_{L^p(O_i)} \leq c \text{ para todo } i.$$
Assim, utilizando o *teorema da convergência monótona* no caso $1 < p < \infty$ (a afirmação é trivial no caso $p = \infty$), encontramos
$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c.$$

- Mostremos que v é a derivada fraca $\partial_j u$ em Ω. Dada $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, seja $O \subset\subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset O$. Pelo já visto temos
$$\begin{aligned}\int_\Omega u\,\partial_j\varphi\,dx &= \int_O u\,\partial_j\varphi\,dx \\ &= -\int_O v_O\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega v\varphi\,dx.\end{aligned}$$

- O limite do quociente de Newton $\Delta^h u$. Fixemos $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Consideremos o limite
$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega (\Delta^h u)\varphi\,dx.$$
Dada uma sequência $h_k \to 0$, vimos que existe uma subsequência (h_{k_l}) com
$$\int_\Omega (\Delta^{h_{k_l}} u)\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega (\partial_j u)\varphi\,dx.$$
Isto mostra que (cheque, é simples)
$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega (\Delta^h u)\varphi\,dx = \int_\Omega (\partial_j u)\varphi\,dx \clubsuit$$

3.11 Diferenciabilidade (Lipschitz e Rademacher).

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz. Isto é, existe uma constante c (dita uma constante de Lipschitz) satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ para quaisquer } x \in \Omega \text{ e } y \in \Omega.$$

Seja Ω um aberto limitado. É então claro que

$$W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ para todo } p \in [1, \infty].$$

Proposição. *Sejam Ω um aberto limitado e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de Lipschitz. Então,*

$$f \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

Prova.

- ◇ É trivial ver que $f \in L^\infty(\Omega)$.

- ◇ Sejam $O \subset\subset \Omega$ e $0 < |h| < d(O, \partial\Omega)$. Fixemos $k \in \{1, \ldots, n\}$ e o vetor e_k, o k-ésimo vetor canônico em $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in O$, encontramos

$$|\Delta^h f(x)| = \left| \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} \right| \leq c.$$

Donde segue

$$\|\Delta^h f\|_{L^\infty(O)} \leq c.$$

Então, pelo lema *existência da derivada fraca em L^p* segue que existe a derivada fraca $\partial_k f$ e

$$\left\|\partial_k f\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c.$$

Variando k concluímos que

$$f \in W^{1,\infty}(\Omega) \clubsuit$$

Segue um teorema de diferenciabilidade em espaços de Sobolev.

Teorema (Diferenciabilidade). *Sejam Ω limitado e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $p > n$. Então, u é diferenciável q.t.p.*

Prova.

- É trivial ver que basta considerar o caso $n < p < \infty$.

- Pela *desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg* [vide seção 3.6 - teoremas de imersão] ou pelo *teorema da imersão de Morrey para $W_0^{1,p}(\Omega)$* [vide seção 3.7 - estimativas para o potencial e teoremas de imersão] segue que u é contínua (isto é, podemos identificar u com uma função contínua).

- Temos $\nabla u \in L^p(\Omega)$. Seja x um ponto no conjunto-L^p de Lebesgue de ∇u [vide seção 1.9 - o conjunto-L^p de Lebesgue de uma função].

  Consideremos uma bola $B(x,r) \subset \Omega$. O já citado *teorema de Morrey* fornece uma constante c tal que para $r > 0$ e pequeno o suficiente temos

  $$|u(x+h) - u(x)| \leq c|h|^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } |h| = r.$$

  Donde segue

  $$|u(x+h) - u(x)| \leq C|h| \left(\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  A função $v(y) = u(y) - \nabla u(x) \cdot y$ satisfaz

  $$\nabla v = \nabla u - \nabla u(x).$$

  Troquemos a função $u(y)$ pela função $v(y)$ na última desigualdade acima. Com $r = |h|$, encontramos

  $$\frac{|u(x+h) - u(x) - \nabla u(x) \cdot h|}{|h|} \leq C \left(\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |\nabla u(y) - \nabla u(x)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Com x no conjunto-L^p de Lebesgue de ∇u e $r = |h| \to 0$, vemos que u é diferenciável no ponto x. Como

  $$\Big| \Omega \setminus (\text{conjunto} - L^p \text{ de Lebesgue de } \nabla u) \Big| = 0,$$

  concluímos que u é diferenciável q.t.p. ♣

Corolário. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com Ω limitado e $p > n$, então u é diferenciável q.t.p.*

Prova.

Dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $\varphi u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo teorema acima, φu é diferenciável q.t.p. para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, u é diferenciável q.t.p (cheque)♣

Corolário (Teorema de Rademacher). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de Lipschitz. Então, f é diferenciável q.t.p.*

Prova.

Segue de $f \in W^{1,n+1}(O)$ para todo $O \subset\subset \Omega$ e do corolário acima♣

Comentários.

(1) A prova acima do teorema de Rademacher se baseia nas provas em Evans [6, pp. 294–296] e em Taylor, M. E. *Measure Theory and Integration*, AMS, p. 133 e p. 143. Este último livro ainda apresenta resultados sobre homeomorfismos de Lipschitz e aproximação de funções de Lipschitz por funções de classe C^1.

(2) Para uma prova elementar (isto é, uma prova "mão na massa" e não baseada em resultados fortes) do teorema de Rademacher vide a interessante e não curta prova em Tao, T., *An Introduction to Measure Theory*, AMS, pp. 188–192.

(3) O *teorema de diferenciabilidade* também vale no espaço $W^{1,1}(\mathbb{R})$. Vide Lista 7 de Exercícios.

(4) Também vale a implicação reversa no *teorema de Rademacher*. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é fracamente diferenciável e com as derivadas fracas limitadas, então u é de Lipschitz. Vide Lista 7 de Exercícios.

3.12 Caracterização de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Extraído de Brezis [3, pp. 287-289] e das notas de aula do professor Rodney Josué Biezuner, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - disponível em

`http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/edp.pdf`

Interpretamos as funções em $W_0^{k,p}(\Omega)$, a grosso modo, como funções que se anulam na fronteira de Ω. É necessário dar um sentido preciso a esta noção pois as funções no espaço $W^{k,p}(\Omega)$ são definidas a menos de conjuntos de medida nula e $\partial\Omega$ tem, sob hipóteses razoáveis de suavidade, medida nula (sem esquecer que existem abertos com fronteira de medida maior que zero). Ainda, as funções em $W^{k,p}(\Omega)$ não são necessariamente representadas por uma função contínua.

Recordemos que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ se $p > n$, pela *desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg* [vide seção 3.6] e que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ se $p > n$, pelo *teorema da imersão de Morrey para* $W_0^{1,p}(\Omega)$ [vide seção 3.7].

Teorema - Caracterização dos espaços $W_0^{k,p}(\Omega)$. *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e uma função $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então temos*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Prova.

($\Leftarrow$) O caso $\mathrm{supp}(u)$ limitado [isto não significa $\mathrm{supp}(u)$ compacto; $\mathrm{supp}(u)$ é o fecho em Ω de $\{x : u(x) \neq 0\}$]. Consideremos $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que (exiba uma)

$$|f(t)| \leq |t| \quad \text{e} \quad f(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } |t| \leq 1, \\ t \text{ se } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Definamos então a sequência de funções

$$u_j = \frac{1}{j} f(ju).$$

Pela *regra da cadeia em* $W^{k,p}(\Omega)$ - seção 3.4 - temos $u_j \in W^{k,p}(\Omega)$. Segue

$$|u_j| \leq \frac{j|u|}{j} = |u| \in L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad u_j(x) \longrightarrow \begin{cases} u(x) \text{ se } u(x) = 0 \\ u(x) \text{ se } u(x) \neq 0. \end{cases}$$

Portanto, pelo *teorema da convergência dominada*,

$$u_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} u.$$

Ainda mais,

$$\partial_k(u_j) = f'\big(ju(x)\big)\partial_k u(x) \quad \text{e} \quad f'\big(ju(x)\big) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } u(x) \neq 0, \text{ para } j \text{ grande} \\ 0 \text{ se } u(x) = 0. \end{cases}$$

Donde segue $\partial_k(u_j)(x) \longrightarrow \partial_k u(x)$ se $u(x) \neq 0$.

No conjunto $u^{-1}(0)$, pelo teorema *o gradiente na pré-imagem de um ponto* - vide seção 3.3, regra da cadeia e regra do produto - temos $\partial_k u = 0$ q.t.p. Portanto

$$\partial_k(u_j) \xrightarrow{q.t.p.} \partial_k u.$$

Temos também $|\partial_k(u_j)| \leq \|f'\|_\infty |\partial_k u| \in L^p(\Omega)$. Portanto, pelo *teorema da convergência dominada* encontramos

$$\partial_k(u_j) \xrightarrow{L^p(\Omega)} \partial_k u.$$

Consideremos $\operatorname{supp}(u_j)$. Isto é,

$$\text{o fecho em } \Omega \text{ do conjunto } \{x \in \Omega : u_j(x) \neq 0\}.$$

É fácil ver que

$$\{x \in \Omega : u_j(x) \neq 0\} \subset \left\{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{j}\right\} \longleftarrow \text{ este fechado em } \Omega \text{ e limitado.}$$

Logo,

$$\operatorname{supp}(u_j) \ \subset \left\{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}.$$

Mostremos que $\operatorname{supp}(u_j)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$. Consideremos uma sequência

$$(x_m) \subset \operatorname{supp}(u_j) \ \text{ tal que } x_m \to x, \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n.$$

Claramente $x \in \overline{\Omega}$. Para cada $x_m \in \operatorname{supp}(u_j)$, existe $y_m \in \Omega$ tal que

$$|x_m - y_m| < \frac{1}{m} \ \text{ e } \ u_j(y_m) \neq 0.$$

Portanto $y_m \to x$ e $u_j(y_m) \neq 0$. Pelo que já mostramos acima segue $|ju(y_m)| \geq 1$ para todo m. Pela continuidade de u seguem $|ju(x)| \geq 1$ e $u(x) \neq 0$. Logo, $x \in \Omega$. Temos então

$$y_m \to x, \ \ u_j(y_m) \neq 0 \ \text{ e } \ x \in \Omega.$$

Logo, $x \in \operatorname{supp}(u_j)$ o qual é então limitado e fechado e portanto compacto.

Pelo lema *regularização e aproximação em* $W^{k,p}(\Omega)$ [vide seção 3.5] segue

$$u_j \in W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

O caso $\mathrm{supp}(u_j)$ não limitado. Consideremos a "função de corte"

$$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \eta = \begin{cases} 1 \text{ no disco } D(0,1) \\ 0 \text{ fora de } D(0,2). \end{cases}$$

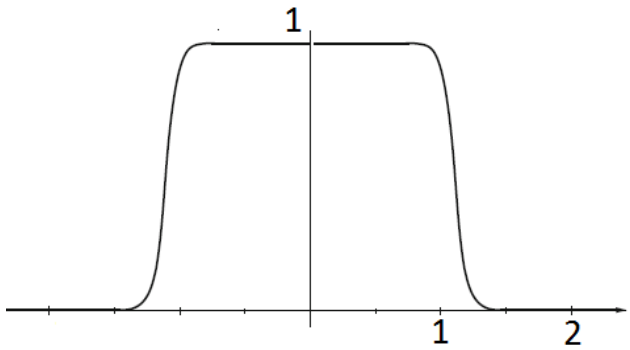

Figura 3.29: Ilustração ao gráfico de η.

Definamos a sequência de funções de corte

$$\eta_j(x) = \eta\left(\frac{x}{j}\right).$$

Temos $\eta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo j. Portanto $\eta_j u \in W^{k,p}(\Omega)$ - cheque. Evidentemente, $\mathrm{supp}(\eta_j u)$ é limitado. Pelo caso anterior segue e destacamos

$$\boxed{\eta_j u \in W_0^{1,p}(\Omega).}$$

Pelo *teorema da convergência dominada* segue $\eta_j u \to u$ em $L^p(\Omega)$. Ainda mais, dado um arbitrário $k = 1, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned} \left\|\partial_k(\eta_j u) - \partial_k u\right\|_p &\leq \left\|\frac{1}{j}\partial_k\eta\left(\frac{x}{j}\right)u(x)\right\|_p + \left\|(\eta_j - 1)\partial_k u\right\|_p \\ &\leq \frac{\|\partial_k\eta\|_\infty \|u\|_p}{j} + \|(1-\eta_j)\partial_k u\|_p. \end{aligned}$$

Donde seguem (vide também destaque acima)

$$\eta_j u \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u \quad \text{e} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

($\Rightarrow$) Utilizando cartas locais é suficiente utilizar o semi-cilindro superior

$$Q_+ = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } 0 < x_n < 1\}$$

e mostrar que

$$u \in W_0^{1,p}(Q^+) \cap C(\overline{Q_+}) \implies u \equiv 0 \text{ em } Q_0 = \overline{Q_+} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

Dada u em tal intersecção, existe uma sequência $(u_j) \subset C_c^1(Q_+)$ tal que

$$\boxed{u_j \xrightarrow{W^{1,p}(Q_+)} u.}$$

Utilizemos que $u_j \in C^1$ e $u_j(x', 0) = 0$. Segue (com integral de Riemann)

$$|u_j(x', x_n)| \leq \int_0^{x_n} |\partial_n u_j(x', t)| dt.$$

Fixado $0 < \epsilon < 1$, segue

$$\int_0^{\epsilon} |u_j(x', x_n)| dx_n \leq \epsilon \int_0^{\epsilon} |\partial_n u_j(x', t)| dt.$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon} \int\limits_{|x'|<1} \int\limits_0^{\epsilon} |u_j(x', x_n)| dx' \, dx_n \leq \int\limits_{|x'|<1} \int\limits_0^{\epsilon} |\partial_n u_j(x', x_n)| dx' \, dx_n.$$

Impondo $j \to \infty$ segue (vide convergência destacada acima)

$$\frac{1}{\epsilon} \int\limits_{|x'|<1} \int\limits_0^{\epsilon} |u(x', x_n)| dx' \, dx_n \leq \int\limits_{|x'|<1} \int\limits_0^{\epsilon} |\partial_n u(x', x_n)| dx' \, dx_n.$$

Utilizemos que $x_n \mapsto u(x', x_n)$ é contínua, o *teorema do valor médio para integrais* e que $\partial_n u \in L^1(Q_+)$. Impondo $\epsilon \to 0$ encontramos (cheque)

$$\int\limits_{|x'|<1} |u(x', 0)| dx' = 0.$$

Isto mostra $u(x', 0) \equiv 0$. Isto é, $u \equiv 0$ em Q_0 ♣

3.13 Caracterização das funções fracamente diferenciáveis [isto é, em $W^1(\Omega)$].

Lema [$W^1(\Omega)$ é um "espaço local"]. *Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\Omega = O_1 \cup O_2 \cup \cdots$, com cada O_j aberto. Então, $u \in W^1(\Omega)$ se e somente se $u \in W^1(O_j)$ para cada j.*

Prova.

($\Rightarrow$) Trivial (cheque).

($\Leftarrow$) Dada $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, existe N tal que $\text{supp}(\varphi) \subset O_1 \cup \cdots \cup O_N$.

Existem $\psi_1 \in C_c^\infty(O_1), \ldots, \psi_N \in C_c^\infty(O_N)$ [vide Lista 2 Exerc. 4.] com

$$\begin{cases} \psi_1 + \cdots + \psi_N \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } K \\ \varphi = \psi_1\varphi + \cdots + \psi_N\varphi. \end{cases}$$

- Fixemos ∂_k, para algum $k = 1, \ldots, n$. Seja $v_{k,j}$ a k-ésima derivada fraca de u em O_j. Esta derivada independe de O_j. Isto é, se $O_j \cap O_i \neq \varnothing$, pela *unicidade da derivada fraca* [vide seção 3.2] segue

$$v_{k,j} = v_{k,i} \text{ na intersecção } O_j \cap O_i.$$

Está então bem definida a função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$v_k(x) = v_{k,j}(x) \text{ se } x \in O_j.$$

Dado $x \in \Omega$, existe um disco compacto e não degenerado $D(x,r)$ contido em algum O_j e então $v_k = v_{k,j} \in L^1(D(x,r))$. Isto mostra

$$v_k \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

- Temos então

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\partial_k\varphi\,dx = \sum_{j=1}^N \int_{O_j} u\partial_k(\psi_j\varphi)\,dx &= -\sum_{j=1}^N \int_{O_j} v_k\psi_j\varphi\,dx \\ &= -\sum_{j=1}^N \int_\Omega v_k\psi_j\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega v_k\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Logo, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é fracamente diferenciável e $\partial_k u = v_k$ ♣

Seja u_{x_j} a j-ésima derivada parcial (clássica) e $\partial_j u$ a j-ésima derivada fraca.

Teorema (Caracterização das funções fracamente diferenciáveis). *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então, u é fracamente diferenciável se e somente se valem ambas as condições (i) e (ii) abaixo.*

(i) A função u é equivalente a uma função que é absolutamente contínua em quase todos os segmentos paralelos aos eixos coordenados.

(ii) As derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem de u existem q.t.p. em Ω e são localmente integráveis em Ω.

[Em particular, se u é fracamente diferenciável, valem as propriedades abaixo.

- *Nos segmentos citados, as derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem de u coincidem com suas respectivas derivadas fracas q.t.p. no segmento.*
- *As derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem de u coincidem com suas respectivas derivadas fracas q.t.p. em Ω.]*

Prova.

($\Rightarrow$) Fixemos um paralepípedo P e um aberto O tais que

$$P = [a_1, c_1] \times \cdots \times [a_n, c_n] \subset O \subset\subset \Omega.$$

Pelo teorema *caracterização das derivadas fracas* [vide seção 3.2], existe uma sequência $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que

$$(u_m, \nabla u_m) \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} (u, \nabla u).$$

Podemos supor sem perda de generalidade

$$\|u_m - u\|_{W^{1,1}(O)} \leq \frac{1}{2^m} \text{ para todo} m.$$

Fixemos um representante $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e um representante $\partial_1 u : \Omega \to \mathbb{R}$.

⋄ Consideremos as derivadas fracas $\partial_1 u$ e $\partial_1 u_1, \partial_1 u_2, \ldots$ e as funções

$$f = |u_1| + \sum_{m=1}^{\infty} |u_{m+1} - u_m| \quad \text{e} \quad g = |\partial_1 u_1| + \sum_{m=1}^{\infty} |\partial_1 u_{m+1} - \partial_1 u_m| \ [\text{em } O].$$

"Triangulando" com u é trivial ver que

$$\|u_{m+1} - u_m\|_{W^{1,1}(O)} \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Donde $\{f, g\} \subset L^1(O)$ e as séries para f e g são finitas q.t.p. em O.

Escrevendo $\partial_1 u_m = \partial_1 u_1 + (\partial_1 u_2 - \partial_1 u_1) + \cdots + (\partial_1 u_m - \partial_1 u_{m-1})$ obtemos

$$\boxed{|\partial_1 u_m| \leq g \quad \text{em todo ponto de } O.}$$

⋄ Seja $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ a variável em $\mathbb{R}^n$. Seja $Y = [a_2, c_2] \times \cdots \times [a_n, c_n]$. Doravante, computamos em $[a_1, c_1] \times Y$.

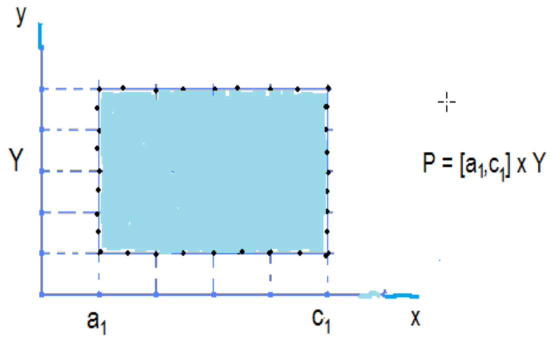

Figura 3.30: O paralelepípedo $P = [a_1, c_1] \times Y$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Graças a *Tonelli* segue

$$\int_Y \left[\int_{a_1}^{c_1} \Big(|u_m - u| + |\partial_1 u_m - \partial_1 u| \Big) dx \right] dy \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_Y \int_{a_1}^{c_1} g(x, y) dx\, dy < \infty.$$

Pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual* [vide capítulo 1], existem uma subsequência (u_{m_i}) e um conjunto $\mathcal{Y} \subset Y$, com $Y \setminus \mathcal{Y}$ de medida $(n-1)$ dimensional zero, tais que para todo ponto $y \in \mathcal{Y}$ temos

$$\int_{a_1}^{c_1} \Big[|u_{m_i} - u| + |\partial_1 u_{m_i} - \partial_1 u| \Big](x, y) dx \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{a_1}^{c_1} g(x, y) dx < \infty.$$

Podemos supor $(u_{m_i}) = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

Assim, para todo $y \in \mathcal{Y}$ temos

$$\boxed{\int\limits_{a_1}^{c_1} \big[|u_m - u| + |\partial_1 u_m - \partial_1 u|\big](x,y)dx \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int\limits_{a_1}^{c_1} g(x,y)dx < \infty}\,.$$

Troquemos a ordem de integração, dispensando o integrando $|\partial_1 u_m - \partial_1 u|$. O teorema de *Tonelli* garante

$$\int\limits_{a_1}^{c_1} \int\limits_{Y} |u_m - u| \, dy \, dx \longrightarrow 0.$$

Pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual* [vide capítulo 1], existe uma subsequência (u_{m_j}) tal que

$$\int\limits_{Y} |u_{m_j} - u|(x,y)dy \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. em } [a_1, c_1].$$

Podemos supor $(u_{m_j}) = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

A seguir, podemos escolher um ponto $b_1 \in [a_1, c_1]$ tal que

$$\int\limits_{Y} |u_m - u|(b_1, y)dy \longrightarrow 0.$$

Pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual* [ver capítulo 1], existe uma subsequência (u_{m_k}) tal que

$$\begin{cases} u_{m_k}(b_1, y) \longrightarrow u(b_1, y) \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}', \\ \text{com } Y \setminus \mathcal{Y}' \text{ de medida } (n-1) \text{ dimensional zero.} \end{cases}$$

Podemos supor $(u_{m_k}) = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

A seguir, trocando $\mathcal{Y}$ por $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}'$ se necessário, podemos supor

$$\boxed{u_m(b_1, y) \longrightarrow u(b_1, y) \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}.}$$

Como $u_m(b_1, \cdot)$ é mensurável em Y e o conjunto $Y \setminus \mathcal{Y}$ tem medida $n-1$ dmensional zero, então $u_m(b_1, \cdot) \to u(b_1, \cdot)$ q.t.p. em Y e portanto a função $y \mapsto u(b_1, y)$ é mensurável independentemente de como a definimos em $Y \setminus \mathcal{Y}$.

◇ Fixando $y \in \mathcal{Y}$. Pelo teorema *convergência em L^p e convergência pontual*, existe uma subsequência (u_{m_l}) tal que

$$\big(u_{m_l}, \partial_1 u_{m_l}\big)(x,y) \xrightarrow{\text{q.t.p. em } [a_1,c_1]} (u, \partial_1 u)(x,y).$$

Podemos supor $(u_{m_l}, \partial_1 u_{m_l}) = (u_l, \partial_1 u_l)$. Destaquemos a convergência

$$\boxed{(u_m, \partial_1 u_m)(x,y) \xrightarrow{\text{q.t.p. em } [a_1,c_1]} (u, \partial_1 u)(x,y).}$$

Para todo $x \in [a_1, c_1]$ temos (com u_m suave e Cálculo I) a identidade

$$\boxed{(3.13.1) \qquad u_m(x,y) = u_m(b_1,y) + \int_{b_1}^{x} \partial_1 u_m(t,y)dt.}$$

Analisemos o limite desta identidade para $m \to \infty$. Pelos dois passos imediatamente anteriores segue

$$|\partial_1 u_m(\cdot,y)| \leq g(\cdot,y) \in L^1([a_1,c_1]).$$

Assim, o lado direito de tal identidade converge à função dada por

$$\widetilde{u}(x,y) = u(b_1,y) + \int_{b_1}^{x} \partial_1 u(t,y)dt, \text{ onde } x \in [a_1,c_1].$$

É trivial que $\widetilde{u}$ é absolutamente contínua na variável x. O *teorema fundamental do cálculo (integral de Lebesgue)* mostra que

$$x \mapsto \widetilde{u}(x,y)$$

é derivável (classicamente) em quase todo ponto e que sua derivada clássica $(\widetilde{u})_x$ coincide com a função $x \mapsto \partial_1 u(x,y)$ q.t.p. em $[a_1,c_1]$.

Quanto ao lado esquerdo em (3.13.1), já destacamos acima a convergência

$$u_m(x,y) \xrightarrow{\text{q.t.p. em } [a_1,c_1]} u(x,y).$$

Encontramos então

$$\boxed{u(x,y) = \widetilde{u}(x,y) \ \text{ para quase todo } x \in [a_1,c_1]}.$$

Note-se que y é arbitrário em $\mathcal{Y}$. Por Fubini, $\widetilde{u} : [a_1,c_1] \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ é mensurável (cheque). O conjunto $[a_1,c_1] \times (Y \setminus \mathcal{Y})$ tem medida zero e, independentemente da definição de $\widetilde{u}$ neste conjunto, $\widetilde{u} : [a_1,c_1] \times Y \to \mathbb{R}$ é mensurável.

◇ Variando y em Y. Consideremos a função mensurável $\widetilde{u} : [a_1, c_1] \times Y \to \mathbb{R}$. O conjunto dos pontos em que existe o limite pontual de uma sequência de funções reais e mensuráveis é um conjunto mensurável, vide Folland [8, p. 48 - Exercício 3]. A derivada clássica $\widetilde{u}_x = (\widetilde{u})_x$ é um limite de quocientes de Newton, os quais são funções mensuráveis. Portanto, o conjunto dos pontos em que a derivada clássica $\widetilde{u}_x$ está bem definida é mensurável. Logo, $\widetilde{u}_x$ é mensurável, vide Folland [8, p. 48 - Exercícios 5 ou 1].

Consideremos o conjunto mensurável (pois $\widetilde{u}_x$ e $\partial_1 u$ são mensuráveis)

$$\boxed{\begin{array}{l} \Big\{(x,y) \in [a_1,c_1] \times Y : \widetilde{u}_x(x,y) \neq \partial_1 u(x,y)\Big\} = [a_1,c_1] \times (Y \smallsetminus \mathcal{Y}) \cup A, \\ \text{onde a união é disjunta e} \\ A = \bigcup\limits_{y \in \mathcal{Y}} A^y \times \{y\} \text{ com cada (seção) } A^y \text{ de medida zero em } [a_1,c_1]. \end{array}}$$

A medida de $[a_1, c_1] \times (Y \smallsetminus \mathcal{Y})$ é zero. É trivial ver que A é mensurável (A é diferença de mensuráveis, cheque). Portanto (com m_1 a medida de Lebesgue na reta real)

$$\begin{aligned} m(A) = \int \chi_A \, dm &= \int \left(\int \chi_A(x,y)\, dx \right) dy = \int \left(\int \chi_{A^y}(x)\, dx \right) dy \\ &= \int m_1(A^y) dy = 0. \end{aligned}$$

Mostramos então

$$\boxed{\widetilde{u}_x = \partial_1 u \text{ q.t.p. no paralelepípedo } P.}$$

Analogamente vê-se (cheque)

$$\boxed{\widetilde{u} = u \text{ q.t.p. no paralelepípedo } P.}$$

◇ Iterando a argumentação acima, trocando a função u por $\widetilde{u}$ e as derivadas (a clássica e a fraca) de primeira ordem e em relação à primeira variável pelas derivadas (a clássica e a fraca) de primeira ordem em relação à segunda, terceira, etc .variáveis, obtemos o resultado desejado no retângulo P.

◇ A “ida” do teorema está provada para todo retângulo compacto contido em Ω. Em particular, para todo cubo diádico contido em Ω.

◇ Complete a prova da “ida”.

($\Leftarrow$) Evidentemente Ω é uma união enumerável de cubos diádicos. Assim, pelo *Lema: $W^1(\Omega)$ é um "espaço local"*, basta provar que $u \in W^1(O)$ onde O é um tal cubo.

◇ Mostremos que existe a derivada fraca $\partial_1 u$ (a existência das demais segue por permutação na ordem das variáveis).

Notemos que, por hipótese, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Portanto, $u \in L^1_{loc}(O)$.

Escrevamos $O = (\alpha_1, \beta_1) \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, com variável $(x, y) \in (\alpha_1, \beta_1) \times Y$.

Sejam $\varphi \in C^1_c(O)$ e m a medida (Lebesgue) em $\mathbb{R}^n$. *Fubini* nos garante

$$\int_O u \partial_1 \varphi \, dm = \int_Y \int_{\alpha_1}^{\beta_1} u(x,y)\varphi_x(x,y)\, dx\, dy$$

Por hipótese, para quase todo $y \in Y$ temos que $x \mapsto u(x,y)$ é absolutamente contínua e então, pelo *teorema fundamental do cálculo (Lebesgue)*, derivável q.t.p. (obviamente, $x \mapsto \varphi(x,y)$ é absolutamente contínua). Para um tal y, com o *teorema fundamental do cálculo (Lebesgue)* ou a *fórmula de integração por partes (Lebesgue)*, vide capítulo 1, encontramos (cheque)

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} u(x,y)\varphi_x(x,y)\, dx = -\int_{\alpha_1}^{\beta_1} u_x(x,y)\varphi(x,y)\, dx.$$

Por hipótese, $u_x \in L^1_{loc}(\Omega)$. Portanto $u_x \in L^1_{loc}(O)$. Por *Fubini* segue

$$\int_O u_x \varphi \, dm = \int_Y \int_{\alpha_1}^{\beta_1} u_x(x,y)\varphi(x,y)\, dx\, dy.$$

Combinando as três identidades acima obtemos

$$\begin{aligned}
\int_O u \partial_1 \varphi \, dm &= \int_Y \int_{\alpha_1}^{\beta_1} u(x,y)\varphi_x(x,y)\, dx\, dy \\
&= -\int_Y \int_{\alpha_1}^{\beta_1} u_x(x,y)\varphi(x,y)\, dx\, dy \\
&\overset{u_x \in L^1_{loc}(O)}{=} -\int_O u_x \varphi \, dm.
\end{aligned}$$

Portanto u é fracamente diferenciável em O ♣

3.14 Regra Geral do Produto.

Seja u_{x_j} a j-ésima derivada parcial (clássica) e $\partial_j u$ a j-ésima derivada fraca.

Teorema (Regra do Produto). *Sejam* $u \in W^1(\Omega)$ *e* $v \in W^1(\Omega)$ *tais que*

$$uv \ \ e \ \ u\nabla v + v\nabla u \text{ pertencem a } L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Então, $uv \in W^1(\Omega)$ *e vale a fórmula*

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

Prova.

- O produto de absolutamente contínuas é uma função absolutamente contínua. Pelo *teorema de caracterização para funções fracamente diferenciáveis*, u e v são equivalentes a funções que são absolutamente contínuas em quase todo segmento paralelo aos eixos coordenados. Donde segue e destacamos

$$\boxed{\begin{array}{l}uv \text{ é equivalente a uma função que é absolutamente contínua} \\ \text{em quase todo segmento paralelo aos eixos coordenados.}\end{array}}\ .$$

- Pelo mesmo *teorema de caracterização*, as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem q.t.p. É então trivial ver que as derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem do produto uv existem q.t.p. e satisfazem

$$(uv)_{x_j} = u_{x_j}v + uv_{x_j} \text{ q.t.p., onde } j = 1, \dots, n.$$

- Fixemos $j \in \{1, \dots, n\}$. Pelo mesmo *teorema de caracterização* temos

$$u_{x_j} = \partial_j u \text{ q.t.p.} \quad \text{e} \quad v_{x_j} = \partial_j v \text{ q.t.p.}$$

  Encontramos então

$$(uv)_{x_j} = v\partial_j u + u\partial_j v \text{ q.t.p.}$$

  Por hipótese, $v\partial_j u + u\partial_j v$ é localmente integrável. Assim, podemos destacar

$$\boxed{\text{as derivadas parciais de ordem um de } uv \text{ são localmente integráveis}}\ .$$

- Destaquemos que, por hipótese, $\boxed{uv \text{ é localmente integrável}}$.

◇ Pelos três destaques acima e o *teorema de caracterização para funções fracamente diferenciáveis* (e a arbitrariedade de $j \in \{1, \ldots, n\}$), segue que

$$uv \text{ é fracamente diferenciável.}$$

◇ Fórmula. Pelo mesmo *teorema de caracterização* vemos que as derivadas fracas de primeira ordem da função fracamente diferenciável uv coincidem q.t.p. com suas respectivas derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem. Donde segue

$$\begin{cases} \partial_j(uv) = (uv)_{x_j} \text{ q.t.p.} \\ \text{para todo } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Porém, já mostramos as identidades

$$\begin{cases} (uv)_{x_j} = v\partial_j u + u\partial_j v \text{ q.t.p.} \\ \text{para todo } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Segue então

$$\begin{cases} \partial_j(uv) = (uv)_{x_j} = v\partial_j u + u\partial_j v \text{ q.t.p.} \\ \text{para todo } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Isto é,

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \clubsuit$$

REFERÊNCIAS

[1.] R. A. Adams and Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003.

[2.] A. Bressan, *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, 2012, Univ. of Pennsylvania. https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/sobolev-notes.pdf

[3.] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2011, Springer.

[4.] M. M. Cavalcanti e V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Ed. Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[5.] Driver, B. K., *Lecture Notes on PDE*, University of California (San Diego).

[6.] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010. http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/lecture_notes.htm

[7.] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, second edition, Princeton University Press, 1995.

[8.] —-, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[9.] Giglioli, A., *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, 10 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975, IMPA.

[10.] Gilbard D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, reprint of the 1998 edition, 2001.

[11.] Hunter, J. *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, Univ. of California (Davis). See https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/ch3.pdf
On PDE, see https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/pdes.html

[12.] Royden, H. L. - Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, 4th ed, Prent. Hall, 2010.

[13.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[14.] —, *Functional Analysis*, 2nd ed., Int. Ser. Pure and Appl. Math., 1991.

[15.] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1980.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, M. Deker, 1977.