EDP's ELÍPTICAS - MAT5812 - IMEUSP - 2017

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas baseiam-se em Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (2001) e, como material de apoio, em G. B. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed, John Wiley & Sons. Agradeço particularmente às notas de aula do curso sobre os mesmos tópicos e ministrado por J. C. D. Fernandes.

Capítulo 3 - Espaços de Sobolev.

Capítulo 1

ESPAÇOS L^p e de HILBERT

Capítulo 2

PRODUTO DE CONVOLUÇÃO, APROXIMAÇÃO E REGULARIZAÇÃO

2.1 Introdução

Suponhamos que a média final MF em um curso se dê pela média ponderada das notas $n_1, \ldots, n_k$, com respectivos pesos $p_1, \ldots, p_k$. Isto é,

$$MF = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} p_j}.$$

Esta simples observação sugere o resultado abaixo.

Teorema (Primeiro TVM para Integrais, Generalizado - Cauchy, 1821). *Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável e, ainda, $p \geq 0$ e*

$$\int_a^b p(x)\, dx > 0.$$

Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(c) \int_a^b p(x)\, dx.$$

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ o mínimo de f e $M = f(x_2)$ o máximo de f. Se $x \in [a,b]$, temos $m \le f(x) \le M$ e ainda $mp(x) \le f(x)p(x) \le Mp(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}.$$

- ⋄ O caso $m < \gamma < M$. O teorema do valor intermediário garante c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que $f(c) = \gamma$.

- ⋄ O caso $\gamma = M$. Temos então

$$\int_a^b [M - f(x)]p(x)\,dx = 0.$$

Donde, pela desigualdade $[M - f(x)]p(x) \ge 0$, obtemos $[M - f(x)]p(x) = 0$ em todo ponto de continuidade de p (cheque).

A função p não se anula em algum intervalo aberto J (caso contrário, p admite uma sequência de somas de Riemann que converge a 0↯ - cheque).

Logo, f é constante e igual a M em J. Todo ponto $c \in J$ satisfaz o desejado.

- ⋄ O caso $\gamma = m$. Basta aplicar o segundo caso ao par de funções $-f$ e p♣

Interpretação aritmética para o "primeiro TVM para integrais, generalizado." Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e uma função (peso) Riemann-integrável $p : [a,b] \to [0,\infty)$ e tal que

$$\int_a^b p(x)dx > 0.$$

Então, f, ponderada por p, assume em algum c a sua média ponderada. Isto é,

$$\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} = f(c).$$

Definição. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **suporte** de f é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função f não se anula. Temos a notação

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto, então f é identicamente nula no complementar de algum intervalo fechado e limitado.

Nestas notas faremos muito uso de funções que são de classe C^∞ e que tem suporte compacto. Tais funções são chamadas, entre outros nomes, **funções lombadas/bacias** ("bump functions"). Utilizamos o exemplo abaixo para então construirmos uma função infinitamente derivável e de suporte compacto.

Exemplo (Lombada lateral ou rampa, suave). *A função*

$$\Lambda(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{se } x \leq 0\,, \end{cases}$$

é tal que $\Lambda^{(n)}(0) = 0$ *para todo* n *e é de classe* C^∞*.*

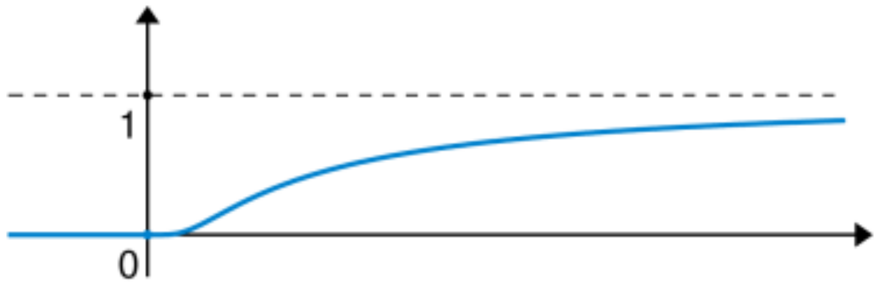

Figura 2.1: Gráfico de $\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$, com $\Lambda(x) = 0$ se $x \leq 0$.

Verificação. Seja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

É claro que $\Lambda(1) = e^{-1}$. É também claro que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada $\Lambda^{(n)}$ [com $\Lambda^{(0)} = \Lambda$] satisfaz

$$\Lambda^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x > 0, \text{ com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x \to 0^+} \Lambda^{(n)}(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\Lambda^{(n)}(x) - 0}{x - 0} = \lim_{y \to +\infty} y e^{-y} P_n(y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Por indução segue que $\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda^{(3)}, \ldots$ são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo, Λ é infinitamente derivável ♣

Exemplo (Uma função infinitamente derivável e de suporte compacto) **Uma função lombada ou bacia, suave.** Seja $\Lambda = \Lambda(x)$ como no exemplo imediatamente anterior. Seja

$$\Phi(x) \ = \Lambda(1 - x^2), \text{ onde } x \in \mathbb{R}.$$

A função Φ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \ \text{ e } \ \text{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

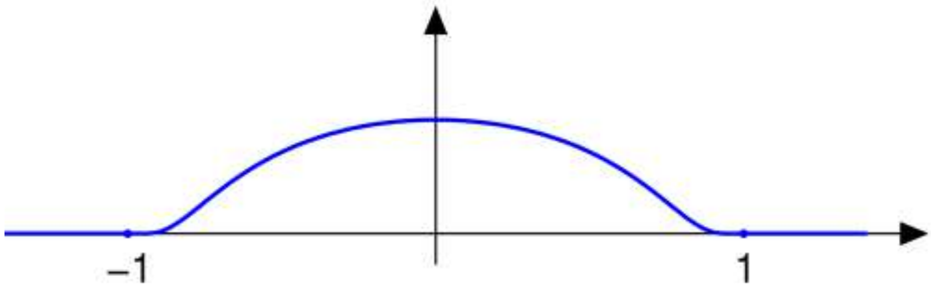

Figura 2.2: Gráfico da função Φ.

A expressão para Φ é

$$\boxed{\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \clubsuit \end{cases}}$$

A seguir, veremos algumas das propriedades da função Φ para *aproximação*. Consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \Phi(x)dx > 0.$$

Definamos a função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Antes de prosseguir, aproveitemos a oportunidade para conhecer outros dois interessantes e úteis exemplos de funções infinitamente deriváveis.

Exemplos extras: degrau e platô suaves.

(1) **Degrau suave.** Seja $\Phi = \Phi(x)$ a "função lombada" dada acima. Seja

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt, \text{ onde } x \in \mathbb{R}.$$

A função Ψ é de classe C^∞ na reta, crescente e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq c = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t)dt \quad \text{com} \quad \Phi = \begin{cases} 0 \text{ em } (-\infty, -1], \\ c \text{ em } [1, \infty). \end{cases}$$

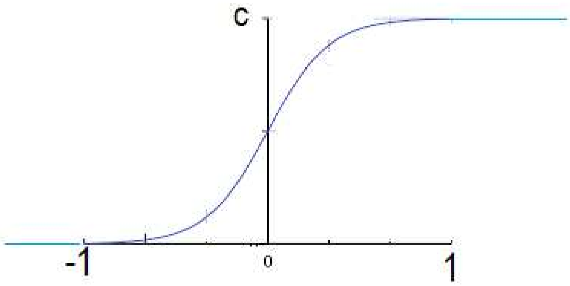

Figura 2.3: Gráfico da função "degrau suave" Ψ.

(2) **Platô suave.** Seja $\Psi(x)$ a "função degrau" acima. Dado $a > 1$, seja

$$\Gamma(x) = \frac{1}{c^2}\Psi(x+a)\Psi(a-x).$$

A função Γ é de classe C^∞ na reta, crescente e satisfaz

$$0 \leq \Gamma \leq 1 \quad \text{com} \quad \Gamma = \begin{cases} 0 \text{ em } (-\infty, -1-a] \cup [a+1, +\infty), \\ 1 \text{ em } [1-a, a-1]. \end{cases}$$

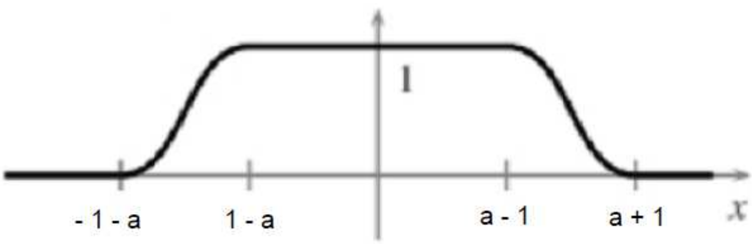

Figura 2.4: Gráfico da "função platô suave" Γ ♣

Retornemos ao estudo da função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Dado um arbitrário $\epsilon > 0$, consideremos a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}.$$

A função φ_ϵ é de classe C^∞ na reta e satisfaz

$$0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq \frac{1}{c\epsilon} \quad \text{e} \quad \text{supp}(\varphi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, \epsilon].$$

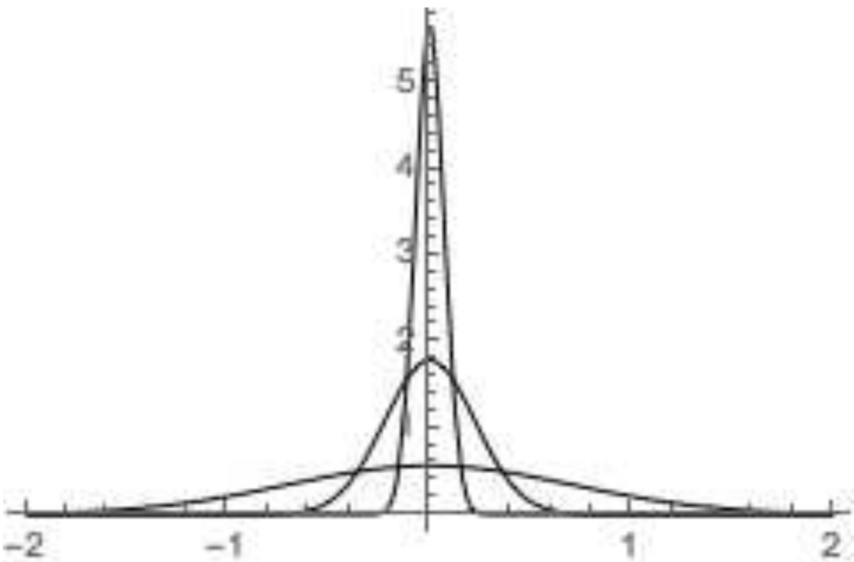

Figura 2.5: Ilustração para o gráfico de φ_ϵ, conforme $\epsilon \to 0^+$.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Isto mostra que conforme $\epsilon \to 0$, mais e mais a área abaixo do gráfico de φ_ϵ, e acima do eixo Ox, se concentra em torno da origem mas o valor numérico atribuído à área permanece constante e igual a 1.

Teorema. *Seja* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *contínua. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{onde}\ 0 < \epsilon < 1,$$

acima definidas. Então,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0).$$

Prova.

O primeiro TVM para integrais, generalizado, garante a existência de um ponto $\overline{x} \in [-\epsilon, \epsilon]$, com $\overline{x} = \overline{x}(\epsilon)$ dependendo de ϵ, tal que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \\ &= f(\overline{x}). \end{aligned}$$

Como f é contínua na origem, temos que

$$f(\overline{x}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(0) \clubsuit$$

Veremos mais sobre a família de funções $\{\varphi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ na próxima seção, sobre **aproximação da identidade**.

Indicamos

$$C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f \in C^\infty \ \text{ e } \ \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

Definição. O δ de Dirac *é dado por*

$$\delta(f) = f(0), \ \textit{onde}\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Dizemos que a família de funções

$$\{\varphi_\epsilon :\ 0 < \epsilon < 1\}$$

se aproxima do δ *de Dirac, se* $\epsilon \to 0$. *Escrevemos então*

$$\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} \delta.$$

Corolário. *Seja f uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ onde } 0 < \epsilon < 1,$$

acima definidas. Então,

(a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p-x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(p).$$

(b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(p-x)dx \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(p).$$

Prova.

(a) Escrevendo $F(x) = f(p-x)$, basta aplicar o teorema imediatamente anterior.

(b) Basta notar que as integrais em (a) e (b) tem mesmo valor♣

Pelo corolário imediatamente acima, é justificado chamar a família de funções $\{\varphi_\epsilon\}$ de uma **aproximação da identidade**.

Em inglês, tais funções φ_ϵ são chamadas *mollifier* ou *approximations to the identity*. A tradução de *mollifier* para o português é "molificante" (Molificar: acalmar, aplacar , suavizar. Molificante: que molifica, que acalma, abranda, que suaviza), mas este termo é pouco utilizado.

Os molificantes são também conhecidos por molificantes de Friedrichs (Kurt Otto Friedrichs).

Um molificante é uma função suave (isto é, infinitamente derivável) com algumas propriedades especiais que são utilizadas, por exemplo, em Teoria das Distribuições para criar sequências de funções suaves que se aproximam de funções não suaves e de funções generalizadas, via Produto de Convolução. Este é o tópico da próxima seção.

Ainda mais, as integrais em (a) e (b) inspiram o conceito Produto de Convolução.

2.2 Produto de Convolução

Convolução: ato ou efeito de enrolar; ato ou efeito de enrolar-se; envolver.

Antecipemos um pouco do que será apresentado neste capítulo.

Intuitivamente, o valor do produto de convolução em um ponto dado está relacionado à noção de média ponderada de uma função (ponderada por uma segunda função). Esta interpretação da convolução como "uma média ponderada" aponta várias propriedades de suavização/regularização do produto de convolução.

Intuitivamente, dada uma função irregular, convolvendo-a com um molificante/regularizador temos que a função é suavizada/regularizada. Isto é, as características ásperas da função irregular (por exemplo, "bicos" ou "esquinas" no gráfico da função) são suavizadas e, ainda, a convolução se mantém próxima (em algum sentido ou norma) da função não suave (ou função generalizada) original.

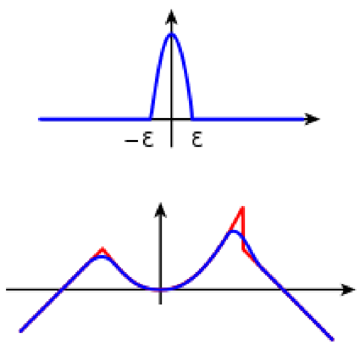

Figura 2.6: Os gráficos do regularizador φ_ϵ, da não suave f e da suavização de f.

Outra importante característica do produto de convolução entre duas funções f e g é que (antecipando o símbolo para o produto de convolução) a convolução

$$f * g$$

suaviza a função f e também suaviza a função g. Ainda mais, a convolução herda as propriedades de suavidade de g e as propriedades de suavidade de f. Por exemplo, veremos que se g é derivável então o produto de convolução $f * g$ é derivável [e satisfaz $\partial_j(f * g) = f * \partial_j g$, onde ∂_j é o operador derivação em relação à variável x_j e $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ é a variável em $\mathbb{R}^n$].

Definição. *Dadas duas funções Lebesgue mensuráveis* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *definimos o* **produto de convolução** *[ou, brevemente,* **convolução***]* $(f * g)(x)$ *por*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy,$$

nos pontos x *tais que a integral acima existe.*

Exemplo. Computemos o produto de convolução

$$(f * g)(x) = \int f(u)g(x-u)du,$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução.

A convolução envolve uma translação e uma reflexão. Para visualiza-la, mantemos estática a função de menor suporte, a função f (coincidentemente a mais simples), e refletimos e "deslizamos" a função g.

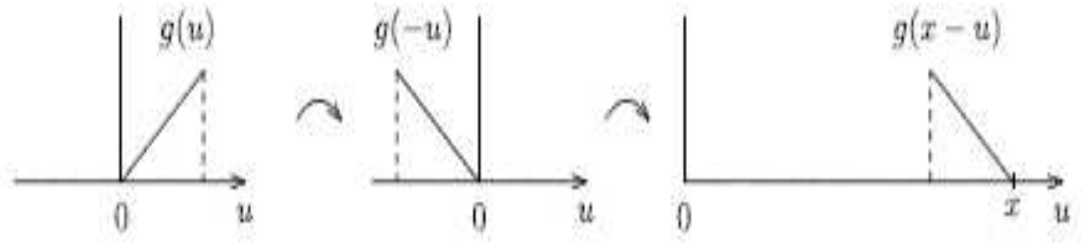

Figura 2.7: O gráfico de g sob efeito de reflexão e então de translação.

Se o ponto x está distante da origem [i.e., se o suporte da função $u \mapsto g(x-u)$ não intersecta o suporte $[0, 1]$ da função f], então temos

$$(f * g)(x) = 0.$$

Assim, movendo x desde $-\infty$ até $+\infty$, só teremos algum trabalho de cálculo nos casos em que os suportes de $u \mapsto g(x-u)$ e $f(u)$ se intersectam.

As figuras a seguir mostram que temos então apenas cinco casos a analisar.

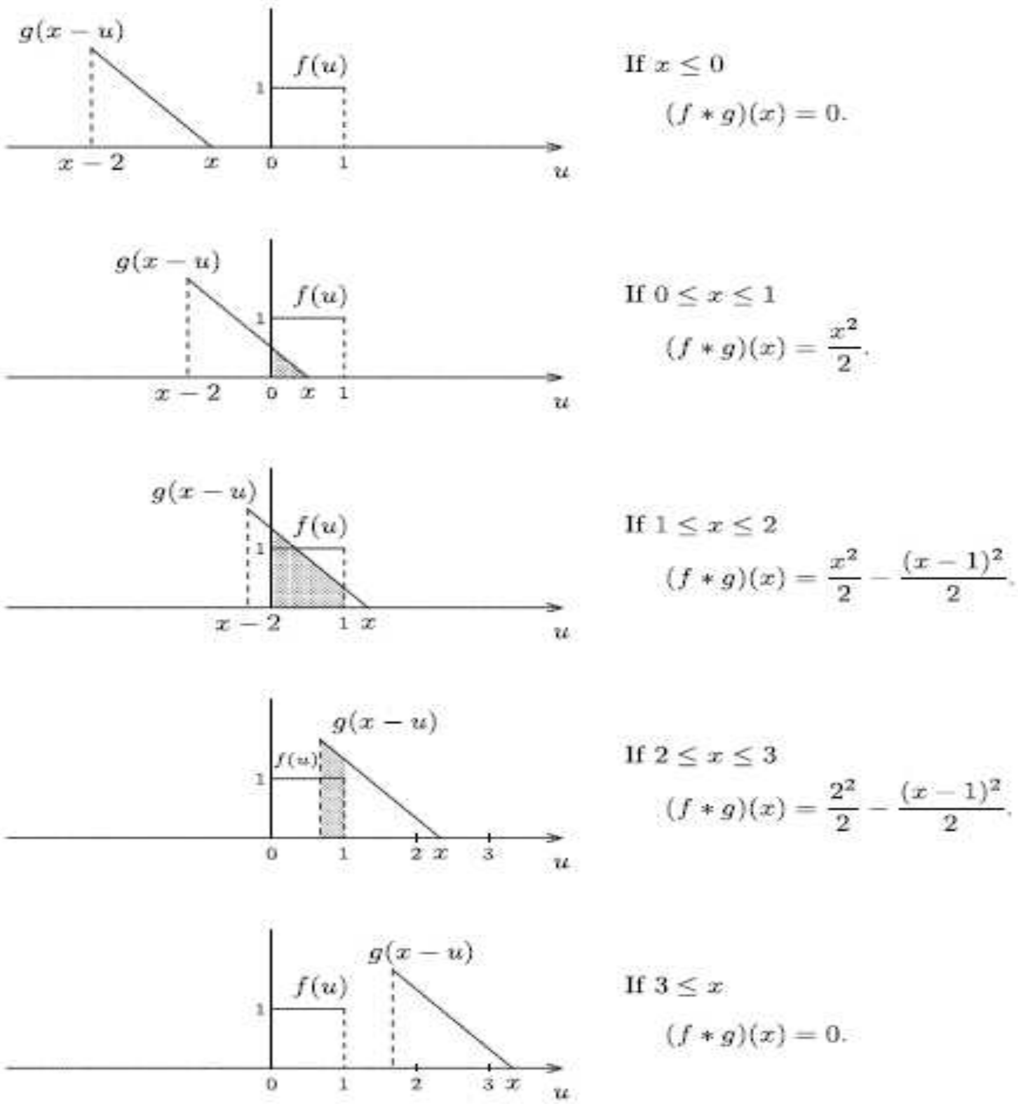

Figura 2.8: O produto de convolução $(f * g)(x)$ ♣

Exercício. Para o exemplo acima, esboce o gráfico da convolução $f * g$.

Tarefa. Assista duas convoluções animadas em
`https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution`.

Definição (O operador translação τ_h). *Dados $h \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos a translação*

$$\tau_h f(x) = f(x-h).$$

Proposição. *Assumindo que todas as integrais envolvidas existem, temos*

(a) $f * g = g * f$.

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(c) $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$.

(d) $supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$.

(e) $(af) * g = a(f * g) = f * (ag)$ *se* $a \in \mathbb{C}$.

(f) $(f + g) * h = (f * h) + (g * h)$.

(h) $\int (f * g)\, dx = \big(\int f(x)\, dx\big)\big(\int g(x)\, dx\big)$.

Prova.

(a) Mudando a variável de y para $z = x - y$ obtemos

$$f * g\,(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(z)g(x-z)dz = g * f\,(x).$$

(b) Utilizemos o teorema de Fubini e a comutatividade [vide (a)]. Segue

$$\begin{aligned}(f * g) * h\,(x) &= \int (g * f)(x-y)h(y)dy \\ &= \int\int g(x-y-z)f(z)h(y)dzdy \\ &= \int (g * h)(x-z)f(z)dz = (g * h) * f\,(x) \\ &= f * (g * h)\,(x).\end{aligned}$$

(c) Segue de

$$\tau_h(f * g)(x) = \int f(x-h-y)g(y)dy = \int (\tau_h f)(x-y)g(y)dy = (\tau_h f) * g\,(x).$$

(d) Se x não pertence a $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, então para cada $y \in \operatorname{supp}(g)$ nós temos $x-y \notin \operatorname{supp}(f)$. Donde segue $f(x-y)g(y) = 0$ para todo y e, portanto, $f * g\,(x) = 0$. Logo,

$$\{x : (f * g)(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

(e) e (f). Triviais♣

Comentário. O produto de convolução é comutativo, associativo e bilinear, analogamente ao produto usual. Ainda, utilizando **Transformada de Fourier** não é difícil provar que (mas não o faremos) a transformada de Fourier do produto de convolução é exatamente o produto das transformadas de Fourier. Isto é,

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g).$$

O lema abaixo, de prova trivial, é bastante utilizado.

Lema. *Se $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ [e.g., $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$], então f é uniformemente contínua.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ garantindo $|f(x)| < \epsilon$ se $|x| \geq r$. Como f é contínua e então uniformemente contínua no compacto $D(0, r+2)$, existe $0 < \delta < 1$ tal que temos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$, onde $x \in D(0, r+2)$ e $y \in D(0, r+2)$.

Figura 2.9: Os discos $D(0, r)$ e $D(0, r+2)$

Assim, dados $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tais que $|u - v| < \delta$, temos $|f(u) - f(v)| < 2\epsilon$ ♣

Lema (Continuidade da translação em L^p). *Dado $1 \leq p < \infty$, a translação é contínua em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Isto é, fixados $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$\|\tau_{v+h} f - \tau_v f\|_p \to 0 \ \text{ se } h \to 0 \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Prova. No capítulo 1 vimos que $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \to 0$ se $h \to 0$. Portanto

$$\|\tau_{v+h} f - \tau_v f\|_p = \|f(\cdot - v - h) - f(\cdot - v)\|_p = \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_p \xrightarrow{h \to 0} 0 \clubsuit$$

Lema. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mensurável. Então, a função*

$$K(x, y) = f(x - y) \text{ é mensurável em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Prova.

A função $F(x, y) = f(x)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pois o conjunto

$$F^{-1}\big(O\big) = f^{-1}\big(O\big) \times \mathbb{R}^n$$

é mensurável (cheque) para todo aberto $O \subset \mathbb{C}$. Gratos ao isomorfismo linear $T(x, y) = (x - y, x + y)$ concluímos que $F \circ T = K$ é mensurável (cheque)♣

Comentário (O significado do produto de convolução em EDP).

Consideremos
$$P = P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha,$$
um operador diferencial com coeficientes constantes e suponhamos que podemos resolver (com solução única) a equação $Pu = g$, na forma
$$u(x) = (Kg)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)g(y)dy$$
onde a função $k(x,y)$ é um "núcleo (kernel) integral". A suposição é natural já que a integração é o inverso da diferenciação.

A seguir, consideremos um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e o operador translação τ_v. Como vale a comutatividade $\tau_v P = P\tau_v$ (esta é outra forma de caracterizarmos os operadores diferenciais lineres de coeficientes constantes) e $P^{-1} = K$ (consequência de nossas suposições), devemos esperar que valha
$$\tau_v K = K\tau_v.$$

Explicitando esta equação encontramos
$$\begin{aligned}\int k(x-v,y)g(y)dy &= (Kg)(x-v)\\ &= \tau_v Kg(x) = (K\tau_v g)(x)\\ &= \int k(x,y)g(y-v)dy\\ &= \int k(x,y+v)g(y)dy.\end{aligned}$$
Pela arbitrariedade de g concluímos que $k(x-v,y) = k(x,y+v)$. Substituindo $y = 0$ obtemos $k(x,v) = k(x-v,0) = \rho(x-v)$. Encontramos então
$$\boxed{Kg = \rho * g.}$$

Assim, esperamos que o *operador de convolução* surja naturalmente ao resolvermos equações diferenciais parciais com coeficientes constantes♣

A seguir, veremos alguns resultados sobre o produto de convolução entre duas funções. A primeira proposição inclui um enunciado para funções não negativas (positivas). Os demais enunciados supõem cada uma das funções em um particular espaço (que pode ser um $L^p(\mathbb{R}^n)$ ou um espaço de funções contínuas).

O produto de convolução para funções positivas tem a interessante propriedade "a integral do produto (de convolução) é o produto das integrais".

Proposição [A Convolução de funções positivas e em $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$].

(a) *Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ e $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ mensuráveis. Então, $f * g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é mensurável e*

$$\int (f * g) dx = \left(\int f dx \right) \left(\int g dx \right).$$

Isto é, $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

(b) *Consideremos $f \in L(\mathbb{R}^n)$ e g em $L(\mathbb{R}^n)$. Então, $f * g \in L(\mathbb{R}^n)$ e valem*

$$\int (f * g)\, dx = \left(\int f\, dx \right) \left(\int g\, dx \right) \quad e \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Prova.

(a) Pelo último lema acima, $f(x - y)g(y) \geq 0$ é mensurável. Pelo teorema de Fubini segue que $f * g$ é mensurável. Aplicando novamente Fubini segue

$$\int (f * g)(x) dx = \int \int f(x - y)g(y) dy dx = \int \int f(x - y)g(y) dx dy$$

$$= \int g(y) \left(\int f(x - y) dx \right) dy = \int g(y) \left(\int f(x) dx \right) dy.$$

A última afirmação é evidente.

(b) Decompondo f e g em suas partes reais e imaginárias e estas em suas partes positivas e negativas, todas não negativas, mensuráveis, integráveis e finitas em todo ponto, pela bilinearidade do produto de convolução e o item (a) segue $f * g \in L(\mathbb{R}^n)$ e a identidade anunciada.

A *desigualdade triangular para integrais* garante $|f * g| \leq |f| * |g|$. Logo,

$$\|f * g\|_1 \leq \||f| * |g|\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 \clubsuit$$

O resultado a seguir (vide o particular caso $p = 1$) inclui a desigualdade no item (b) da proposição que acabamos de demonstrar.

Teorema (Desigualdade de Young e o produto de convolução em $L^1 \times L^p$). *Consideremos $p \in [1, \infty]$, uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, $f * g$ está definida em quase todo ponto, é mensurável, pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Prova.

- ◇ Por *Tonelli*, $f * g$ é mensurável se $f \geq 0$ e $g \geq 0$. É trivial constatar que $(f * g)(x) < \infty$ se e somente se $(|f| * |g|)(x) < \infty$. Temos $|f * g| \leq |f| * |g|$. Portanto, podemos supor $f \geq 0$ e $g \geq 0$.

- ◇ O teorema segue direto da *desigualdade de Young generalizada* [capítulo 1, seção 1.6 - algumas desigualdades úteis] aplicada ao núcleo mensurável $K(x, y) = f(x - y)$ [vide último lema acima], que satisfaz

$$\int K(x, y)dx = \int K(x, y)dy = \|f\|_1,$$

  e ao operador de convolução

$$Tg(x) = \int K(x, y)g(y)dy = \int f(x - y)g(y)dy = (f * g)(x).$$

- ◇ Alternativamente, basta aplicar a *desigualdade integral de Minkowski (a)*. Notemos que o caso $p = \infty$ é trivial. Para o caso p finito, temos

$$\|f * g\|_p = \left\| \int f(y)g(\cdot - y)dy \right\|_p \leq \int |f(y)| \|\tau_y g\|_p dy = \|f\|_1 \|g\|_p \clubsuit$$

Como consequência, o espaço $L^1(\mathbb{R}^n, m)$ munido do produto de convolução é uma álgebra de Banach abeliana. Ainda mais,

$$\boxed{* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \text{ é bilinear contínuo.}}$$

A próxima desigualdade generaliza a desigualdade acima. No enunciado que veremos a seguir, o particular caso $q = 1$ corresponde à elementar *desigualdade de Young* provada imediatamente acima.

Teorema (Desigualdade de Young generalizada e convolução em $L^p \times L^q$). *Seja* $\{p, q, r\} \subset [1, \infty]$ *tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \qquad\qquad [\textit{claramente, } p \leq r \text{ e } q \leq r].$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *então* $f * g$ *é mensurável, está em* $L^r(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Prova.

- $\diamond$ Iniciemos como no teorema acima. Por *Tonelli*, $f*g$ é mensurável se $f \geq 0$ e $g \geq 0$. É trivial constatar que $(f*g)(x) < \infty$ se e somente se $(|f|*|g|)(x) < \infty$. Temos $|f * g| \leq |f| * |g|$. Logo, podemos supor $f \geq 0$ e $g \geq 0$.

- $\diamond$ O caso p, q e r finitos. Se $r = p$ ou $r = q$, recaímos no teorema acima. Portanto, podemos supor $r \neq p$ e $r \neq q$. Escrevendo

$$(f * g)(x) = \int f(y)^{\frac{p}{r}} g(x-y)^{\frac{q}{r}} . f(y)^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} . g(x-y)^{q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)} dy$$

usemos a *desigualdade de Hölder* com três funções e expoentes r, p_1 e p_2,

$$\text{onde } \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \;\text{ e }\; \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$

Notemos que p_1 e p_2 são finitos e

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Então, pela *desigualdade de Hölder generalizada* (seção 1.4) segue

$$(f * g)(x) \leq \left\| f(\cdot)^{\frac{p}{r}} g(x - \cdot)^{\frac{q}{r}} \right\|_r \left\| f^{\frac{p}{p_1}} \right\|_{p_1} \left\| g(x - \cdot)^{\frac{q}{p_2}} \right\|_{p_2}.$$

Donde obtemos

$$(f * g)(x)^r \leq \left(\int f(y)^p g(x-y)^q dy \right) \| f \|_p^{\frac{pr}{p_1}} \| g \|_q^{\frac{qr}{p_2}}.$$

Integrando em x e trocando a ordem de integração por *Fubini* encontramos

$$\|f * g\|_r^r \leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q \| f \|_p^{\frac{rp}{p_1}} \| g \|_q^{\frac{rq}{p_2}} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

- $\diamond$ O caso $r = \infty$. Pela *desigualdade de Hölder* temos, em todo ponto,

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f(x - \cdot)\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Logo, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

- $\diamond$ O caso $p = \infty$. Então, temos $r = \infty$ (já provado)♣

Fixada uma função K, a convolução $f * K$ define uma aplicação

$$T : f \longmapsto f * K$$

chamada **operador de convolução com núcleo** K. Já vimos (*desigualdade de Young*) que se $K \in L^1$, então obtemos $T : L^p \to L^p$ continuamente.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, com Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Então temos (cheque)

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} = \|f\|_\infty, \quad \text{com a notação } \|f\|_u = \infty \text{ se } f \text{ é ilimitada.}$$

Segue uma clara propriedade de suavização/regularização da convolução.

Proposição [O Produto de convolução em $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^{p'}(\mathbb{R}^n)$]. *Sejam p e p' expoentes conjugados, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\begin{cases} f * g \text{ está bem definida em todo ponto,} \\ f * g \text{ é limitada e uniformemente contínua e} \\ \|f * g\|_u \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}. \end{cases}$$

Se p e p' são finitos, então $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Prova.

- ◇ Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $f(x - \cdot) \in L^p$ e $g(\cdot) \in L^{p'}$. Por Hölder segue que $(f * g)(x)$ é um número e a desigualdade $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ em todo x.

- ◇ Continuidade uniforme. Se $p < \infty$, a *continuidade da translação em L^p* mostra

$$\begin{aligned} |(f * g)(x - h) - (f * g)(x)| &= |\tau_h(f * g)(x) - (f * g)(x)| \\ &= |(\tau_h f * g)(x) - (f * g)(x)| = \Big|[(\tau_h f - f) * g](x)\Big| \\ &\leq \|\tau_h f - f\|_p \|g\|_{p'} \xrightarrow{h \to 0} 0. \end{aligned}$$

  Tal limite independe de x. Logo, $f * g$ é uniformemente contínua.

  Para $p = \infty$, basta notar que $f * g = g * f$ com p' finito e aplicar o caso $p < \infty$.

- ◇ A função $f * g$ se anula no infinito. Sejam p e p' finitos. Seja $0 < \epsilon < 1$.

  A *densidade de $C_c(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$* (vide seção 1.3 - fatos básicos) garante existirem $F \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $G \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|f - F\|_p < \epsilon/[2(\|g\|_{p'} + 1)]$ e $\|g - G\|_{p'} < \epsilon/[2(\|F\|_p + 1)]$. A função $f * g$ é contínua e a função $F * G$ é contínua e de suporte compacto.

  Temos $\|f * g - F * G\|_u = \|(f - F) * g + F * (g - G)\|_u < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ (cheque).

  Para $|x|$ grande o suficiente segue $|(f * g)(x)| \leq \epsilon$. Isto é, $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ♣

A seguir, vejamos um exemplo de uma função infinitamente derivável e de suporte compacto no espaço n-dimensional.

A função curva do sino. Consideremos a função $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boxed{\rho(x) = \begin{cases} c\,e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}}$$

onde a constante real c é definida pela condição

$$\int \rho(x)dx = 1.$$

Notemos que

$$\rho(x) = c\Phi(|x|^2), \text{ onde } \Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Já vimos que Φ é de classe C^∞. Logo, a função $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e, é claro, de suporte compacto. Vide gráfico abaixo, para o caso $n = 2$.

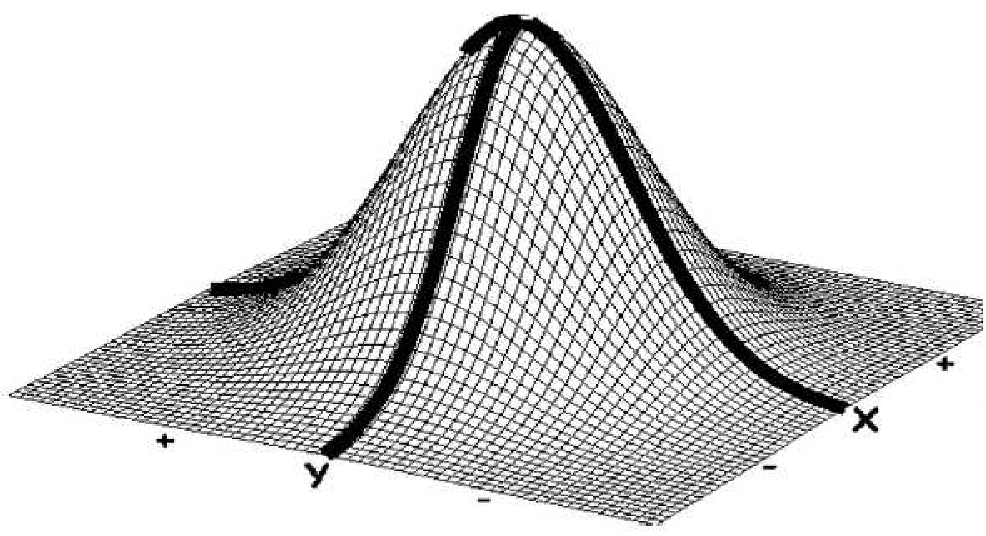

Figura 2.10: Gráfico da função "curva do sino" $\rho = \rho(x, y)$, no caso $n = 2$.

A seguir, temos dois resultados para a derivada de uma convolução.

Lema [A Derivada do Produto de Convolução no espaço $L(\mathbb{R}^n)\times C^k(\mathbb{R}^n)$]. *Sejam $f \in L(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, com $\partial^\alpha g$ limitada para todo $|\alpha| \le k$. Então temos*

$$f * g \in C^k \quad e \quad \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g, \text{ se } |\alpha| \le k.$$

Ainda mais, as derivadas de ordem menor ou igual a k de $f * g$ são limitadas.

Prova.

- ◇ Escrevamos
$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.$$

- ◇ O caso $k = 0$. A função $f(y)g(x-y)$ é majorada por $C|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para alguma constante C que independe de x, e é contínua na variável x. Portanto, a integral é finita para cada x e pelo teorema *continuidade sob o signo da integral* (vide seção 1.2) segue que $f * g$ é contínua.

- ◇ O caso $k = 1$. Fixemos $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pelo caso $k = 0$ segue que $f * \partial_j g$ é contínua. Para quaisquer x e y temos
$$|\partial_{x_j}[f(y)g(x-y)]| = |f(y)(\partial_j g)(x-y)| \le C|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$
Então, pela *derivação sob o signo da integral* (seção 1.2) temos que existe $\partial_j(f * g)$ e que $\partial_j(f * g) = f * \partial_j g$ [contínua]. Variando j concluímos que
$$f * g \in C^1.$$

- ◇ O caso $k \ge 1$. Segue trivialmente por indução (cheque).

- ◇ Paa finalizar, vale a desigualdade
$$\|\partial^\alpha (f * g)\|_\infty = \|f * \partial^\alpha g\|_\infty \le \|f\|_1 \|\partial^\alpha g\|_\infty \ < \infty \ \text{ se } \ 0 \le |\alpha| \le k \clubsuit$$

O teorema a seguir, também sobre derivação do produto de convolução $f * g$, mostra que exigindo mais de g temos mais liberdade para f.

Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Escrevemos $O \subset\subset \Omega$ se O é um **aberto relativamente compacto de** Ω. Isto é, temos $O \subset \overline{O} \subset \Omega$, com O aberto e $\overline{O}$ compacto.

Lema [A Derivada do Produto de Convolução no espaço $L^p(\mathbb{R}^n)\times C_c^k(\mathbb{R}^n)$]. *Sejam $p \in [1,\infty]$, uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, uma função $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ e um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$. Então,*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g.$$

Prova. [Aquela em Wheeden & Zygmund [16, 146-147] é árdua sem necessidade.]

◇ Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, escrevemos $A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $x - \text{supp}(g)$ é compacto e

$$(f * g)(x) = \int_{x-\text{supp}(g)} f(y)g(x-y)dy.$$

Como $f \in L^p(\Omega)$, seguem $f \in L^1\big(x - \text{supp}(g)\big)$ e $(f * g)(x) < \infty$. Cheque.

◇ Seja $O \subset\subset \mathbb{R}^n$. Seja $K = \overline{O} - \text{supp}(g)$, compacto em $\mathbb{R}^n$. Encontramos

$$(f * g)(x) = \int_K f(y)g(x-y)dy \text{ para todo } x \in O.$$

Como $f \in L^p(\Omega)$, então $f \in L^1(K)$. A função g e suas derivadas até ordem k são contínuas, limitadas e existe uma constante C tal que

$$\left|\partial_x^\alpha [f(y)g(x-y)]\right| \leq C|f(y)|, \quad \text{para todos } \ x \in O, \ y \in K \text{ e } |\alpha| \leq k.$$

Então, o teorema *continuidade e derivação sob o signo da integral* (vide seção 1.2) revela que $f * g \in C^k(O)$ e $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ se $|\alpha| \leq k$♣

Exercício. Escreva uma prova "direta" do teorema acima. Sem utilizar o teorema da continuidade e derivação sob o signo da integral. É também importante.

Corolário [O Produto de convolução definido no espaço $L^p(\mathbb{R}^n)\times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$]. *Consideremos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

$$f * g \ \in \ C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g \text{ para todo } \alpha.$$

Prova.

Segue do lema imediatamente acima, da proposição *o produto de convolução em $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^{p'}(\mathbb{R}^n)$* e da *desigualdade de Young e o produto de convolução em $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$*♣

2.3 Aproximação da Identidade

Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ cuja integral sobre $\mathbb{R}^n$ é não nula. A normalização

$$\frac{1}{c}\varphi, \quad \text{onde } c = \int \varphi(x)dx \neq 0,$$

é uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ e sua integral obviamente vale 1.

A função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \text{ onde } \epsilon > 0,$$

satisfaz

$$\int \varphi_\epsilon(x)dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int \varphi(y)\epsilon^n dy = \int \varphi(y)dy.$$

Definição. *Uma* **aproximação da identidade** *é uma família* $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, *onde*

$$\int \varphi(x)dx = 1.$$

Como mostrado acima, a integral de cada φ_ϵ sobre $\mathbb{R}^n$ também vale 1.

Em geral indicamos a família $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ por $\{\varphi_\epsilon\}_\epsilon$ ou mesmo $\{\varphi_\epsilon\}$.

Notações.

- *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *mensurável e* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Escrevemos*

  $$f_\epsilon = f * \varphi_\epsilon \quad (\textit{se existir a convolução}).$$

  Notemos que estamos utilizando o sub-índice ϵ *com dois sentidos distintos.*

- *Seja* $g_n : X \to \mathbb{C}$ *uma sequência de funções tal que* g_n *converge a* g *uniformemente se* $n \to +\infty$. *Escrevemos*

  $$g_n \xrightarrow{uniformemente} g.$$

- *Seja* $g_\epsilon : X \to \mathbb{C}$ *uma família de funções complexas, indexada em* $\epsilon > 0$, *tal que* g_ϵ *converge a* g *uniformemente se* $\epsilon \to 0$. *Escrevemos*

  $$g_\epsilon \xrightarrow{uniformemente} g \text{ se } \epsilon \to 0.$$

Lema (Três Fórmulas para f_ϵ). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mensurável e $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tais que existe $f_\epsilon = f * \varphi_\epsilon$. Então,*

$$(f * \varphi_\epsilon)(x) = \int f(x-y)\varphi_\epsilon(y)dy = \int f(z)\varphi_\epsilon(x-z)dz = \int f(x-\epsilon t)\varphi(t)dt.$$

Vale também $|(f * \varphi_\epsilon)(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_1$ em todo ponto (seja $\|f\|_\infty$ finita ou não).

Prova.

◇ A primeira identidade é uma definição e a segunda segue da comutatividade do produto de convolução. A terceira segue da mudança $x - z = \epsilon t$.

◇ Para encerrar, basta a desigualdade triangular para integrais e $\|\varphi_\epsilon\|_1 = \|\varphi\|_1$♣

Notações de Bachman-Landau ou Notação Assintótica. Sejam f e g funções definidas em uma vizinhança de um ponto x_0. Tal ponto pode ser $\pm\infty$. [*Wheeden & Zygmund* e `https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation`.]

- Notação O grande. Escrevemos

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \text{ se } x \to x_0}$$

caso exista uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ para todo } x \text{ perto de } x_0.$$

A notação O grande classifica funções de acordo com sua taxa de crescimento. Diferentes funções com mesma taxa de crescimento podem ser representadas com a mesma notação O.

A letra O é utilizada por que a taxa de crescimento de f é também dita a ordem de f. Uma descrição de f em termos da notação O grande geralmente fornece apenas um limite superior para a taxa de crescimento de f.

- Notação o pequeno. Escrevemos

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \text{ se } x \to x_0}$$

se temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0 \text{ se } x \to x_0.$$

É fácil ver que

se temos $f(x) = o(g(x))$ se $x \to x_0$, então temos $f(x) = O(g(x))$ se $x \to x_0$.

O nome Aproximação da Identidade deve-se a casos em que $\{\varphi_\epsilon\}$ nos dá uma aproximação do operador identidade sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ por operadores de convolução.

Teorema (Aproximação da Identidade e Convergência Pontual em L^∞). *Sejam $\{\varphi_\epsilon\}$ uma aproximação da identidade e $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja $f_\epsilon = f*\varphi_\epsilon$. Então,*

$$f_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(x) \text{ em todo ponto } x \text{ de continuidade de } f.$$

Prova.

Seja x um ponto de continuidade de f. Temos $\|\varphi_\epsilon\|_1 = \|\varphi\|_1$. Segue

$$\begin{aligned}
|(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)| &= \left|\int f(x-y)\varphi_\epsilon(y)dy - \int f(x)\varphi_\epsilon(y)dy\right| \\
&\le \int |f(x-y)-f(x)|\,|\varphi_\epsilon(y)|dy \\
&\le \int_{|y|\le r} |f(x-y)-f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y|\ge r} \frac{1}{\epsilon^n}|\varphi|\left(\frac{y}{\epsilon}\right)dy \\
&\le \left(\sup_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\right)\|\varphi\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{|t|\ge \frac{r}{\epsilon}} |\varphi(t)|dt.
\end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$, a continuidade em x garante $r > 0$ tal que a penúltima parcela é majorada por η. Fixado tal r, a última integral tende a zero se $\epsilon \to 0$ ♣

Teorema (Aproximação da Identidade e Convergência Pontual em L^p). *Seja $\{\varphi_\epsilon\}$ uma aproximação da identidade com φ de decaimento $\varphi(x) = o(|x|^{-n})$ se $x \to +\infty$. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $p \in [1,\infty]$. Se f é contínua no ponto x, então*

$$f_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(x).$$

Prova. (Adapta e generaliza Wheeden & Zygmund [16, pp. 150–151].)

- ◇ Caso $p = \infty$. Vide versão mais forte no teorema imediatamente acima.
- ◇ Caso $1 \le p < \infty$. A priori, não sabemos se $(f*\varphi_\epsilon)(x)$ é finita no ponto x.
- ◇ Temos $\|\varphi_\epsilon\|_1 = \|\varphi\|_1$. Computando formalmente segue

$$\begin{aligned}
(2.3.1)\quad |(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)| &= \left|\int f(x-y)\varphi_\epsilon(y)dy - \int f(x)\varphi_\epsilon(y)dy\right| \\
&\le \int |f(x-y)-f(x)|\,|\varphi_\epsilon(y)|dy
\end{aligned}$$

$$\le \int\limits_{|y|\le r} |f(x-y)-f(x)||\varphi_\epsilon(y)|dy + \int\limits_{|y|\ge r} |f(x-y)|\,|\varphi_\epsilon(y)|dy + |f(x)| \int\limits_{|y|\ge r} |\varphi_\epsilon(y)|dy.$$

Dado $\eta > 0$, na prova do teorema acima vimos que continuidade em x garante $r > 0$ tal que a ante-penúltima integral é majorada por η. Fixado tal r, no teorema acima vimos que a última integral tende a zero se $\epsilon \to 0$.

$\diamond$ A penúltima integral é majorada por (com $1 < p' \leq \infty$, p' e p conjugados)

$$\|f\|_p \left\| \varphi_\epsilon \big|_{\{y\,:\,|y|\geq r\}} \right\|_{p'}.$$

Destaquemos a identidade

$$|\varphi_\epsilon(y)| = \frac{1}{|y|^n} \left|\frac{y}{\epsilon}\right|^n |\varphi| \left(\frac{y}{\epsilon}\right).$$

O caso $p' = +\infty$. Segue de (substituindo $t = y/\epsilon$ na identidade destacada)

$$\sup_{|y|\geq r} |\varphi_\epsilon(y)| \leq \frac{1}{r^n} \left(\sup_{|t|\geq \frac{r}{\epsilon}} |t|^n |\varphi(t)| \right) \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

O caso $1 < p' < \infty$. Segue de

$$\int\limits_{|y|\geq r} |\varphi_\epsilon(y)|^{p'} dy \leq \left[\sup_{|y|\geq r} \left|\frac{y}{\epsilon}\right|^n |\varphi| \left(\frac{y}{\epsilon}\right) \right]^{p'} \int\limits_{|y|\geq r} \frac{1}{|y|^{np'}}\, dy$$

$$= \left(\sup_{|t|\geq \frac{r}{\epsilon}} |t|^n |\varphi(t)| \right)^{p'} \int\limits_{|y|\geq r} \frac{dy}{|y|^{np'}} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

$\diamond$ Mostramos então que

$$y \mapsto [f(x-y) - f(x)]\varphi_\epsilon(y) \text{ é integrável.}$$

Desta forma, como

$$y \mapsto f(x)\varphi_\epsilon(y) \text{ integrável,}$$

concluímos que $y \mapsto f(x-y)\varphi_\epsilon(y)$ também é integrável. Isto é, existe $(f * \varphi_\epsilon)(x)$. Pelos cômputos formais em (2.3.1) completamos a prova♣

Extra *(esta prova introduz um conceito da teoria de diferenciação de Lebesgue). Segue uma versão mais forte do teorema acima. Seja f uma função integrável sobre os conjuntos limitados (mensuráveis). Antes, algumas observações.*

Dizemos que um ponto x pertence ao **Conjunto de Lebesgue** *de f se*

$$\frac{1}{m\left(D(0,r)\right)}\int_{D(0,r)} |f(x-y)-f(x)|dy \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Dada uma arbitrária $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ e K compacto em $\mathbb{R}^n$, é trivial ver que $f|_K \in L^p(K)$ e $\chi_K \in L^{p'}(K)$. Pela desigualdade de Hölder segue $f\in L^1(K)$.

Dadas $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ e $\lambda>0$, são equivalentes as condições (com $|x|\to+\infty$)

- *φ é limitada e $\varphi(x)=O(|x|^{-\lambda})$, se $|x|\to+\infty$,* e • *$(1+|x|)^{\lambda}\varphi(x)$ limitada.*

Teorema (Aproximação da Identidade e Convergência Pontual em L^p). *Seja $\{\varphi_\epsilon\}$ uma aproximação da identidade com $|\varphi(x)|\leq C(1+|x|)^{-n-\sigma}$ para algum $C>0$ e para alguma $\sigma>0$ [esta condição assegura $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, cheque]. Seja $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $p\in[1,\infty]$. Então,*

$$f_\epsilon(x)\xrightarrow{\epsilon\to 0} f(x) \text{ nos pontos do conjunto de Lebesgue de } f.$$

Em particular, $f_\epsilon\to f$ q.t.p. e também nos pontos de continuidade de f.

Prova. *(Extraída de Folland [8, pp. 243-244]. Vide a bela e curta prova, via integral de Riemann-Stieltjes, em Wheeden & Zygmund [16, pp. 152-154].)*

Seja x no conjunto de Lebesgue de f. Dado $\delta>0$, existe $\eta>0$ tal que

$$\int_{|y|\leq r} |f(x-y)-f(x)|dy \leq \delta r^n \text{ para todo } 0<r\leq\eta.$$

Sejam

$$I_1=\int_{|y|<\eta}|f(x-y)-f(x)|\,|\varphi_\epsilon(y)|dy \quad\text{e}\quad I_2=\int_{|y|>\eta}|f(x-y)-f(x)|\,|\varphi_\epsilon(y)|dy.$$

Mostremos que I_1 é limitado por $A\delta$, com A independente de ϵ, e que $I_2\xrightarrow{\epsilon\to 0}0$. Tendo provado tais fatos, através da desigualdade

$$|(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)|\leq I_1+I_2$$

encontramos

$$\limsup_{\epsilon\to 0}|(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)|\leq A\delta$$

e então, como δ é arbitrário, a prova estará completa.

A estimativa para I_1. *Consideremos um inteiro K tal que*

$$2^K \leq \frac{\eta}{\epsilon} < 2^{K+1}, \text{ se } \frac{\eta}{\epsilon} \geq 1, \quad e \quad K = 0 \text{ se } \frac{\eta}{\epsilon} < 1.$$

A bola aberta $B(0,|\eta|)$ é a reunião dos anéis

$$\left\{y : \frac{\eta}{2^k} \leq |y| < \frac{\eta}{2^{k-1}}\right\}, \text{ onde } 1 \leq k \leq K, \quad \text{com a bola } B\left(0, \frac{\eta}{2^K}\right).$$

No k-ésimo anel temos

$$|\varphi_\epsilon(y)| \leq C\epsilon^{-n}\left|\frac{y}{\epsilon}\right|^{-n-\sigma} \leq C\epsilon^{-n}\left[\frac{2^{-k}\eta}{\epsilon}\right]^{-n-\sigma}.$$

Na bola $B(0, 2^{-K}\eta)$ utilizemos a óbvia estimativa $|\varphi_\epsilon(y)| \leq C\epsilon^{-n}$. Segue

$$I_1 \leq \sum_{k=1}^{K} C\epsilon^{-n}\left[\frac{2^{-k}\eta}{\epsilon}\right]^{-n-\sigma} \int_{2^{-k}\eta \leq |y| < 2^{1-k}\eta} |f(x-y) - f(x)|dy$$

$$+C\epsilon^{-n} \int_{|y| < 2^{-k}\eta} |f(x-y) - f(y)|dy.$$

Utilizando a desigualdade devida a x estar no conjunto de Lebesgue de f e que

$$2^K \leq \frac{\eta}{\epsilon} < 2^{K+1} \text{ (pois, estamos interessados em } \epsilon \text{ pequeno),}$$

encontramos

$$I_1 \leq C\delta \sum_{k=1}^{K} (2^{1-k}\eta)^n \epsilon^{-n}\left[\frac{2^{-k}\eta}{\epsilon}\right]^{-n-\sigma} + C\delta\epsilon^{-n}(2^{-K}\eta)^n$$

$$= 2^n C\delta \left[\frac{\eta}{\epsilon}\right]^{-\sigma} \sum_{k=1}^{K} 2^{k\sigma} + C\delta\left[\frac{2^{-K}\eta}{\epsilon}\right]^n$$

$$= 2^n C\delta \left[\frac{\eta}{\epsilon}\right]^{-\sigma} \frac{2^{(K+1)\sigma} - 2^\sigma}{2^\sigma - 1} + C\delta\left[\frac{2^{-K}\eta}{\epsilon}\right]^n$$

$$= 2^n C\delta 2^{-\sigma(K+1)} \frac{2^{(K+1)\sigma} - 2^\sigma}{2^\sigma - 1} + C\delta 2^n$$

$$\leq 2^n C[2^\sigma(2^\sigma - 1)^{-1} + 1]\delta.$$

A estimativa para I_2. *Seja p' o expoente conjugado de p e χ a função característica de*

$$\{y : |y| \geq \eta\} = \mathbb{R}^n \setminus B(0,\eta).$$

Pela desigualdade de Hölder encontramos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{|y|\geq\eta} \big(|f(x-y)| + |f(x)|\big)|\varphi_\epsilon(y)|dy \\ &\leq \|f\|_p \, \|\chi\varphi\|_{p'} + |f(x)| \, \|\chi\varphi_\epsilon\|_1. \end{aligned}$$

Portanto é suficiente mostrarmos que para todo $q \in [1,\infty]$, e em particular para $q = 1$ e $q = p'$, vale

$$\|\chi\varphi_\epsilon\|_q \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Caso $q = \infty$. É trivial ver que

$$\|\chi\varphi_\epsilon\|_\infty \leq \frac{C}{\epsilon^n}\frac{1}{\left(1+\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{n+\sigma}} = C\epsilon^\sigma \frac{1}{(\epsilon+\eta)^{n+\sigma}} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Caso $q < \infty$. Temos

$$\begin{aligned} \|\chi\varphi_\epsilon\|_q^q &= \int_{|y|\geq\eta} \frac{1}{\epsilon^{nq}} \left|\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\right| dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^{(q-1)n}} \int_{|z|\geq\frac{\eta}{\epsilon}} |\varphi(z)|^q dz \\ &\leq \frac{C_1}{\epsilon^{(q-1)n}} \int_{\frac{\eta}{\epsilon}} r^{n-1-(n+\sigma)q} dr \\ &= \frac{C_2}{\epsilon^{(q-1)n}} \left[\frac{\eta}{\epsilon}\right]^{n-(n+\sigma)q} \\ &= C_3\epsilon^{\sigma q}. \end{aligned}$$

Logo, I_2 tende a zero se $\epsilon \to 0$. A prova está completa♣

Concluída a demonstração deste resultado extra, retornemos ao estudo de resultados sobre o produto de convolução que não dependem de conceitos um tanto quanto sofisticados da teoria da medida de Lebessgue.

Teorema (Propriedades da Aproximação da Identidade). *Sejam* $\{\varphi_\epsilon\}$ *uma aproximação da identidade e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$*. Valem as propriedades abaixo.*

(a) *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, onde* $1 \leq p < \infty$*, então*

$$f_\epsilon \xrightarrow{L^p} f \text{ se } \epsilon \to 0.$$

(b) *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* f *é uniformemente contínua, então*

$$f_\epsilon \xrightarrow{\text{uniformemente}} f \text{ se } \epsilon \to 0.$$

(c) *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* f *é contínua em um aberto* Ω*, então*

$$f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} f \text{ uniformemente sobre os compactos de } \Omega.$$

Prova.

(a) Pela *desigualdade de Young*, $f_\epsilon \in L^p$. O primeiro lema nesta seção mostra

$$(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x) = \int [f(x - \epsilon t) - f(x)]\varphi(t)dt.$$

Pela *desigualdade generalizada de Minkowski* (capítulo 1) [no caso $p = 1$ é suficiente aplicar o *teorema de Tonelli* (cheque)], segue

$$\begin{aligned}
\|f_\epsilon - f\|_p &= \left(\int |(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int \left|\int [f(x - \epsilon t) - f(x)]\, \varphi(t)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int \left(\int |f(x - \epsilon t) - f(x)|\, |\varphi(t)|dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int \left(\int |f(x - \epsilon t) - f(x)|^p\, |\varphi(t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \int \|f(x - \epsilon t) - f(x)\|_p |\varphi(t)| dt.
\end{aligned}$$

Analisemos a última integral. O integrando é mensurável pelo *teorema de Tonelli*. O integrando é majorado por $t \mapsto 2\|f\|_p|\varphi(t)| \in L^1$. Fixado t, pela *continuidade da translação* em L^p (vide capítulo 1) o integrando tende a zero se $\epsilon \to 0$. Então, pelo *teorema da convergência dominada* segue a tese.

(b) Seja x em $\mathbb{R}^n$. Pelo lema *três fórmulas para* f_ϵ nesta seção segue

$$
\begin{aligned}
|(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)| &\le \int |f(x-\epsilon t)-f(x)|\,|\varphi(t)|dt \\
&= \int_{|t|\le r} |f(x-\epsilon t)-f(x)||\varphi(t)|\,dt \;+\; 2\|f\|_\infty \int_{|t|\ge r}|\varphi(t)|dt \\
&= \left(\sup_{s\in\mathbb{R}^n,\ |t|\le r} |f(s-\epsilon t)-f(s)|\right)\|\varphi\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{|t|\ge r}|\varphi(t)|dt.
\end{aligned}
$$

Dado $\eta>0$, existe $r>0$ tal que esta última integral é inferior a η. Para tal r e pela continuidade uniforme de f, é trivial ver que o sup imediatamente acima converge a 0 se $\epsilon\to 0$.

(c) Seja K um compacto contido em Ω. Seja $x\in K$. Analogamente a (b), segue

$$
\begin{aligned}
|(f*\varphi_\epsilon)(x)-f(x)| &\le \int |f(x-\epsilon t)-f(x)|\,|\varphi(t)|dt \\
&\le \left(\sup_{s\in K,\ |t|\le r} |f(s-\epsilon t)-f(s)|\right)\|\varphi\|_1 \;+\; 2\|f\|_\infty \int_{|t|\ge r}|\varphi(t)|dt.
\end{aligned}
$$

Dado $\eta>0$, existe $r>0$ tal que esta última integral é inferior a η. Fixo tal r, para valores pequenos de $\epsilon>0$ temos

$$K+\epsilon D(0;r)\subset \widehat{K}$$

com $\widehat{K}$ um compacto fixo em Ω. Por continuidade, f é uniformemente contínua em $\widehat{K}$. Portanto, o sup indicado acima converge a 0 se $\epsilon\to 0$ ♣

Comentário. Dado K compacto em $\mathbb{R}^n$ e $\delta>0$, o conjunto $\widehat{K}=K+D(0,\delta)$ é dito uma **vizinhança compacta de** K, pois satisfaz as condições $K\subset \mathrm{int}(\widehat{K})$ e $\widehat{K}$ é compacto. Temos $K+D(0,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,K)\le\delta\}$ e escrevemos $K+D(0,\delta)=D(K,\delta)$. Logo, $D(K,\delta)$ é o "disco (fechado) de centro K e raio δ".

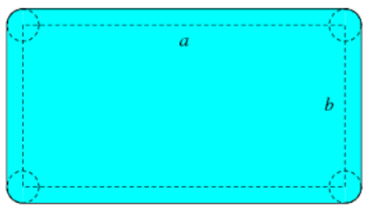

Figura 2.11: "Disco" $D(K,\delta)=K+D(0,\delta)$, com K um retângulo de lados a e b.

Proposição. *Vale o que segue.*

(a) $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$, *dado* Ω *aberto e* $1 \leq p < \infty$.

(b) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Prova. Seja $\rho = \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, a "função curva do sino" dada na seção anterior.

(a) Vimos na seção 1.2 que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, se Ω é aberto e $1 \leq p < \infty$. Logo, dada $f \in L^p(\Omega)$ e $\eta > 0$, existe $g \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\|g - f\|_p < \eta \ \text{ e } \operatorname{supp}(\rho_\epsilon * g) \subset \operatorname{supp}(\rho_\epsilon) + \operatorname{supp}(g) \subset D(0,\epsilon) + \operatorname{supp}(g).$$

Logo, $\operatorname{supp}(\rho_\epsilon * g)$ é compacto dentro de Ω se ϵ é pequeno o suficiente. Como $\rho \in C^\infty$, segue (já vimos) $\rho_\epsilon * g \in C^\infty$. Logo, $\rho_\epsilon * g \in C_c^\infty(\Omega)$ se ϵ é pequeno . A *propriedade da aproximação da identidade (a)*, teorema acima, garante

$$\|\rho_\epsilon * g - g\|_p \to 0 \text{ se } \epsilon \to 0.$$

Logo, $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

(b) Sejam $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $\eta > 0$. Existe $r > 0$ tal que $|f(x)| \leq \eta$ para todo $|x| \geq r$. É trivial construir $\chi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0 \leq \chi \leq 1 \ \text{ com } \ \chi \equiv 1 \text{ em } D(0,r) \text{ e } \ \chi \equiv 0 \text{ fora de } D(0,r+1).$$

[Considere $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ como na figura abaixo e defina $\chi(x) = g(|x|)$.]

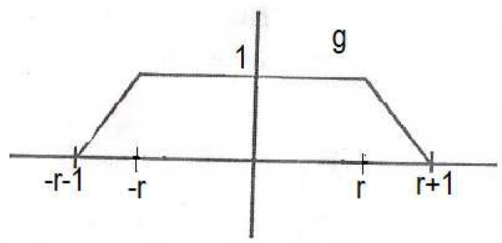

Figura 2.12: Construção de uma função (trapezoidal) $g : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Segue $\|f - \chi f\|_u \leq \eta$. Cheque, note $f - \chi f = (1-\chi)f$.

Já mostramos que $\rho_\epsilon * (\chi f) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. A *propriedade da aproximação da identidade (b)*, teorema acima, garante

$$\|\rho_\epsilon * (\chi f) - \chi f\|_u \to 0 \text{ se } \epsilon \to 0.$$

Logo, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C_0(\mathbb{R}^n)$ ♣

2.4 Lema de Urysohn (C^∞), Partição da Unidade e Teorema de Tietze

Notação. Escrevemos $f \in C_c^\infty(\Omega, [a,b])$ se temos: $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e $a \le f \le b$.

Lema de Urysohn (C^∞). *Suponhamos $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, com K compacto e Ω aberto. Então, existe $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que*

$$0 \le f \le 1 \text{ e } f \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } K.$$

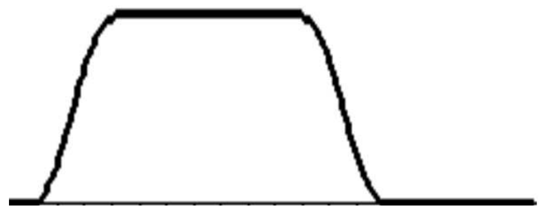

Figura 2.13: Uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ que vale 1 em um intervalo compacto.

Prova.

Seja $4\epsilon = d(K, \mathbb{R}^n \smallsetminus \Omega) > 0$ a distância de K ao complementar de Ω [tal distância é não zero pois K é compacto e, ainda, se $\Omega = \mathbb{R}^n$ então qualquer $4\epsilon > 0$ nos serve]. O conjunto

$$\widehat{K} = K + D(0,\epsilon) = \{x + y : x \in K \text{ e } |y| \le \epsilon\}$$

é uma vizinhança compacta de K e em Ω. Cheque.

[Com frequência é também utilizada a descrição $\widehat{K} = \{z \in \mathbb{R}^n : d(z,K) \le \epsilon\}$.]

Consideremos a função característica $\chi_{\widehat{K}}$ de $\widehat{K}$ e a função "curva do sino" $\rho = \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ [vide a seção 2.2]. Por construção, $\operatorname{supp}(\rho) = D(0,1)$. O suporte de ρ_ϵ é $D(0,\epsilon)$. Dado $x \in K$, temos

$$(\chi_{\widehat{K}} * \rho_\epsilon)(x) = \int_{D(0,\epsilon)} \chi_{\widehat{K}}(x-y)\rho_\epsilon(y)dy = \int 1.\rho_\epsilon(y)dy = 1.$$

É trivial ver que $0 \le \chi_{\widehat{K}} * \rho_\epsilon \le 1$. Temos ainda $\operatorname{supp}(\chi_{\widehat{K}} * \rho_\epsilon) \subset \widehat{K} + D(0,\epsilon) \subset \Omega$. Por fim, já vimos na seção 2.2 que $f = \chi_{\widehat{K}} * \rho_\epsilon$ é infinitamente derivável.

Analogamente, existe $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le f \le 1$ e $f \equiv 1$ em $\widehat{K}$♣

Notação. *Dados* Ω *aberto e* $\epsilon > 0$, *indicamos (vide figura) o aberto (*cheque*)*

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \epsilon\} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} = \{x \in \Omega : D(x, \epsilon) \subset \Omega\}.$$

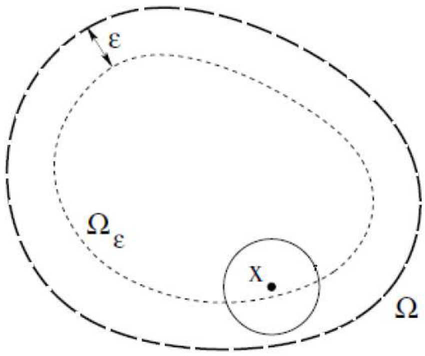

Figura 2.14: Os abertos Ω e Ω_ϵ e o disco $D(x, \epsilon)$, no caso Ω limitado.

Tem-se $\overline{\Omega_\epsilon} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \epsilon\} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon\} \subset \Omega$. Cheque.

Escrevemos $O \subset\subset \Omega$ se O é aberto com fecho $\overline{O}$ compacto contido em Ω. Neste caso, O é dito um **aberto relativamente compacto de** Ω.

Sequência exaustiva de abertos $O_{n's}$ (relativamente compactos) para Ω. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos o aberto limitado

$$O_j = \Omega_{\frac{1}{j}} \cap B(0, j).$$

É claro que $\overline{O_j} \subset \overline{\Omega_{1/j}}$. Já vimos que $\overline{\Omega_{1/j}} \subset \Omega$. Logo, $\overline{O_j}$ é um compacto de Ω.

É clara a condição: $O_j \subset O_{j+1}$. Ainda, dado $x \in \Omega$ existe j tal que

$$d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad |x| < j.$$

Destacamos que valem as duas condições (o símbolo "$\nearrow$" indica "crescente a")

$$\boxed{\Omega = \bigcup O_j \quad \text{e} \quad O_j \nearrow \Omega}.$$

Mostremos $\overline{O_j} \subset O_{j+1}$. Dado $\omega \in \overline{O_j}$ existe $(x_j) \subset O_j$ com $x_j \to \omega$. Donde segue

$$|\omega| \leq j < j + 1 \quad \text{e} \quad d(\omega, \partial\Omega) = \lim d(x_j, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} > \frac{1}{j+1} \text{ e portanto } \omega \in O_{j+1}.$$

Destacamos que vale a condição

$$\boxed{O_j \subset\subset O_{j+1}.}$$

As três condições destacadas caracterizam (O_j) como uma sequência exaustiva de abertos (relativamente compactos) para Ω.

Teorema (Partição da Unidade, para um aberto e uma exaustão). *Seja $O_j \nearrow \Omega$, onde $j \geq 1$, uma sequência exaustiva de abertos para o aberto Ω. Então, existe uma sequência (ψ_j) em $C_c^\infty(\Omega)$ que satisfaz as três condições abaixo.*

- *Para cada $j \geq 1$ temos $0 \leq \psi_j \leq 1$ e supp$(\psi_j) \subset O_j$.*
- *Para cada $x \in \Omega$ existe uma bola aberta B contendo x tal que, exceto para uma quantidade finita de índices j, toda ψ_j se anula identicamente em B.*
- *Para cada $x \in \Omega$ temos (com soma finita de termos)*

$$\sum_j \psi_j(x) = 1.$$

Podemos supor supp$(\psi_j) \subset O_j \setminus \overline{O_{j-3}}$ para cada $j \geq 4$.

Prova.

◇ [*Siga a prova imaginando $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $O_j = B(0,j)$.*] Seja O_0 tal que $O_0 \subset\subset O_1$.

◇ Pelo lema de Urysohn, para cada $j \geq 0$ existe $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ tal que

$$\chi_j \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } \overline{O_j} \quad \text{e} \quad \text{supp}(\chi_j) \subset O_{j+1}.$$

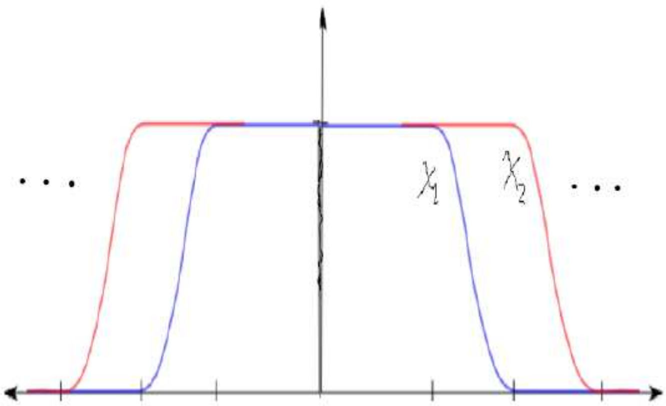

Figura 2.15: Seções verticais dos gráficos de χ_1 e χ_2, no caso $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Ainda no conjunto $C_c^\infty(\Omega, [0,1])$, temos a sequência (cheque)

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2 - \chi_0, \chi_3 - \chi_1, \chi_4 - \chi_2, \ldots.$$

Dado $x \in \Omega$, existe o menor j tal que $x \in O_j$. Se $j \leq 1$ temos $\chi_j(x) = 1$. Se $j \geq 2$, temos $x \in O_j \setminus O_{j-1}$ e supp$(\chi_{j-2}) \subset O_{j-1}$. Logo, $\chi_j(x) - \chi_{j-2}(x) = 1 - 0$. Assim, ao menos uma entre $\chi_0, \chi_1, \chi_2 - \chi_0, \chi_3 - \chi_1, \ldots$ não é nula em x.

- Seja $D(x,r)$ em Ω. Como $O_j \nearrow \Omega$, existe um índice N tal que $D(x,r) \subset O_N$. Para todo $j \geq N$ segue $D(x,r) \subset O_j \subset O_{j+2}$ e $\chi_j \equiv \chi_{j+2} \equiv 1$ em $D(x,r)$. Donde segue $\{j : \chi_{j+2} - \chi_j$ não é a função nula em $B(x,r)\} \subset \{1,\ldots,N-1\}$.

- A soma
$$\Psi = \chi_0 + \chi_1 + \sum_{j\geq 2}(\chi_j - \chi_{j-2})$$
é então localmente finita. Logo, $\Psi : \Omega \to (0,+\infty)$ é infinitamente derivável.

- Para a terceira condição, basta definir
$$\psi_1 = \frac{\chi_0}{\Psi}, \quad \psi_2 = \frac{\chi_1}{\Psi} \quad \text{e} \quad \psi_j = \frac{\chi_{j-1} - \chi_{j-3}}{\Psi} \text{ se } j \geq 3.$$

- Seja $j \geq 4$. Por construção temos $\chi_{j-1} - \chi_{j-3} \equiv 0$ numa vizinhança de $\overline{O_{j-3}}$. Donde segue $\operatorname{supp}(\psi_j) = \operatorname{supp}(\chi_{j-1} - \chi_{j-3}) \subset O_j \smallsetminus \overline{O_{j-3}}$ (cheque)♣

No caso de uma cobertura arbitrária enumerável (O_j), se o suporte de cada ψ_j está contido em ao menos um dos abertos $O_1, O_2, \ldots$ (não necessariamente exatamente o aberto O_j - na situação do teorema provado o suporte de ψ_j está contido em uma quantidade infinita dos abertos da cobertura), então dizemos que (ψ_j) é uma **partição da unidade (de classe C^∞ e de suporte compacto) para Ω e subordinada à cobertura $\Omega = \bigcup O_j$**.

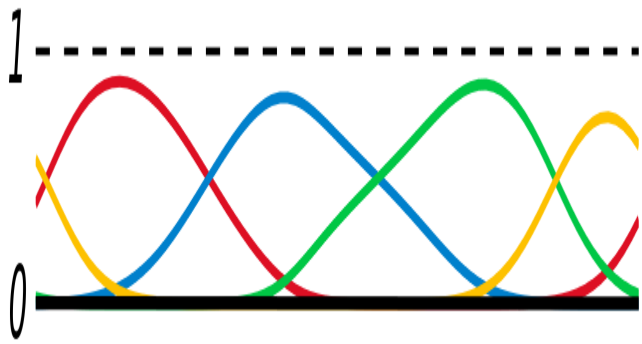

Figura 2.16: Partição da unidade com 4 funções: verde, amarela, vermelha e azul.

Teorema de Tietze. *Seja $f \in C(K)$, com K um compacto no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então, f tem uma extensão $F \in C_c(\Omega)$.*

Prova. (Extraída de Rudin [13, pp. 389-390].)

Decompondo f em suas partes real e imaginária, podemos supor f real. Como $f(K)$ é compacto, podemos supor $-1 \le f \le 1$. Seja O aberto tal que

$$K \subset O \subset\subset \Omega.$$

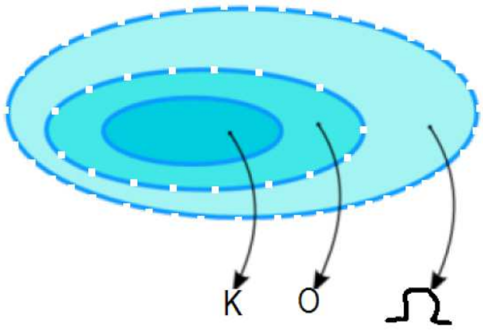

Figura 2.17: Ilustração para $K \subset O \subset \Omega$.

Sejam

$$K^- = \left\{x \in K : f(x) \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]\right\} \quad \text{e} \quad K^+ = \left\{x \in K : f(x) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\}.$$

Então, K^- e K^+ são compactos, disjuntos e contidos em $K \subset O$.

Existem abertos disjuntos O^- e O^+ com $K^\pm \subset O^\pm \subset O$ (cheque). Vide figura.

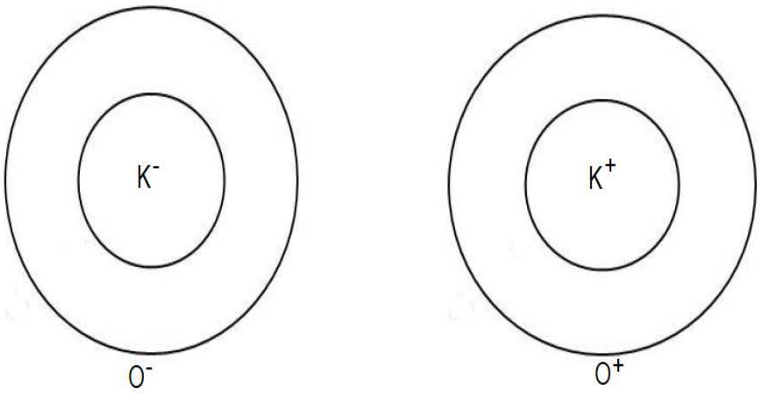

Figura 2.18: Ilustração para $K^\pm \subset O^\pm \subset O$.

Pelo lema de Urysohn é trivial ver que existe $f_1 \in C_c(O)$ tal que (cheque)

$$f_1 \equiv -\frac{1}{3} \text{ em } K^-, \quad f_1 \equiv \frac{1}{3} \text{ em } K^+, \quad -\frac{1}{3} \leq f_1 \leq \frac{1}{3}.$$

Segue (cheque)

$$|f - f_1| \leq \frac{2}{3} \text{ em } K^- \cup K^+ \quad \text{e} \quad |f - f_1| \leq \frac{2}{3} \text{ em } K \setminus (K^- \cup K^+).$$

Portanto

$$|f - f_1| \leq \frac{2}{3} \text{ em } K \quad \text{e} \quad |f_1| \leq \frac{1}{3} \text{ em } O.$$

A seguir, trocando a função f por

$$\frac{3}{2}f - \frac{3}{2}f_1.$$

e iterando obtemos $f_2 \in C_c(O)$ tal que (cheque)

$$|f - f_1 - f_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ em } K \quad \text{e} \quad |f_2| \leq \frac{2}{3^2} \text{ em } O.$$

Por indução encontramos $f_n \in C_c(O)$ tal que

$$|f - f_1 - \cdots - f_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad |f_n| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n} \text{ em } O.$$

Definamos

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots, \text{ no aberto } \Omega.$$

Por construção, tal série converge para f no compacto K. Isto é, temos

$$F(x) = f(x) \text{ para todo } x \in K.$$

Ainda mais, pelo teste-M de Weierstrass vemos que tal série converge uniformemente em todo o aberto Ω. Logo, F é contínua em Ω.

Para completar, temos

$$\text{supp}(F) \subset \overline{O}$$

com $\overline{O}$ compacto e contido em Ω♣

2.5 Regularização e Aproximação em $L^p_{\mathbf{loc}}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$

Definição. *Um* **regularizador (molificante)** *é uma função não-negativa*

$$\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

de classe C^∞ *(infinitamente derivável), com supp*$(\rho) \subset D(0,1)$ *e tal que*

$$\int \rho(x)dx = 1.$$

Destaquemos que $\|\rho_\epsilon\|_1 = \|\rho\|_1 = 1$.

Definições e notações. *Seja* Ω *aberto em* $\mathbb{R}^n$*. Então,*

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ tal que } f\Big|_K \in L^p(K) \text{ para todo } K \text{ compacto em } \Omega \right\}.$$

[Os espaços vetoriais $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *não são normados porém admitem uma topologia.]*
Uma sequência (f_n) *de funções mensuráveis converge a* f no sentido $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *se*

$$f_n\Big|_K \xrightarrow{L^p(K)} f\Big|_K \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Escrevemos então

$$f_n \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}(\Omega)} f.$$

Alerta. *Não é necessário* $f_n \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *[vide exemplos abaixo e a demonstração do Lema de regularização e aproximação em* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *a seguir].*
Uma sequência $(g_n) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *converge a* $g \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$*, na topologia de* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$*, se* g_n *converge a* g *no sentido* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$*. Escrevemos então*

$$g_n \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}(\Omega)} g.$$

Exemplo (Uma função positiva $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tal que $f \notin L^1_{\mathbf{loc}}([a,b])$ para todo intervalo limitado e não degenerado $[a,b]$. Ainda, f é descontínua em todo ponto e ilimitada em tais $[a,b]$). Extraído de Folland [8, pp. 59–60].

- Seja $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos

$$\int g(t)dt = 2\sqrt{t}\Big|_0^1 = 2 < \infty.$$

◇ Enumeremos $\mathbb{Q} = \{r_j : j \geq 1\}$. Definamos $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ por
$$h(t) = \sum \frac{g(t - r_j)}{2^j}.$$
Pelo *teorema da convergência monótona* segue
$$\int h(t)dt = \sum \int \frac{g(t - r_j)}{2^j} dt = \sum \frac{1}{2^{j-1}} = 2 < \infty.$$
Logo, $h \in L^1(\mathbb{R})$ e portanto h é finita q.t.p. Redefinamos h por $h = 0$, no conjunto de medida nula em que h assume o valor ∞.

◇ Consideremos a função positiva, e finita em todo ponto,
$$f = h^2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty).$$
Então, f é mensurável e satisfaz
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_j \sum_k \int_a^b \frac{g(t - r_j)}{2^j} \frac{g(t - r_k)}{2^k} dt.$$
Seja r_k no intervalo (a, b). Segue
$$\int_a^b f(t)dt \geq \frac{1}{4^k} \int_{r_k}^{\min(b, r_k + 1)} \frac{1}{t - r_k} dt = \infty.$$
Solicito ao leitor mostrar que f é descontínua em todo ponto ♣

Exemplo (Uma sequência (f_n) que converge no sentido de $L^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R})$, porém com cada $f_n \notin L^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R})$).

◇ Seja f como no exemplo acima. É trivial ver que
$$f_n = f\chi_{(n, +\infty)} \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})} 0 \quad \text{com cada} \quad f_n \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})♣$$

A seguir, observemos a inclusão [a flecha "$\hookrightarrow$" indica inclusão contínua]
$$\boxed{L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega).}$$
Identifiquemos $L^p(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : u \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega\}$. Então,
$$\boxed{L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \text{ isometricamente.}}$$

Sejam $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e K compacto em Ω. A desigualdade de Hölder mostra
$$\left\| f\big|_K \right\|_1 \leq \left\| f\big|_K \right\|_p \|\chi_K\|_{p'}.$$
Então segue
$$\boxed{L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega).}$$
Donde, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é o maior dos espaços (definidos em Ω) até aqui considerados.

Dado $O \subset\subset \Omega$, temos $d(O, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = d(O, \partial\Omega) = d(\overline{O}, \partial\Omega) > 0$.

Notação. *Dado Ω aberto, indicamos (vide figura) o aberto*

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : D(x, \epsilon) \subset \Omega\}.$$

Se Ω é limitado, então temos $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$ e também $d(\Omega_\epsilon, \partial\Omega) = d(\overline{\Omega_\epsilon}, \partial\Omega) = \epsilon$. Cheque as várias afirmações acima (cinco no total).

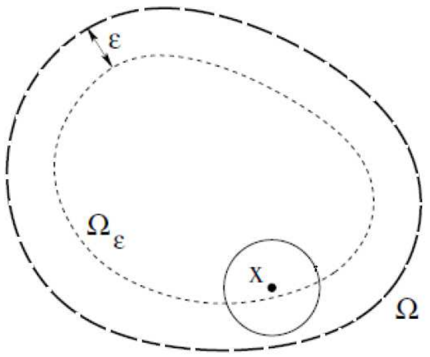

Figura 2.19: Os abertos Ω e Ω_ϵ, com Ω limitado.

Definição. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Uma* **regularização** *de u é*

$$u_\epsilon(x) = \int\limits_\Omega u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy = (u * \rho_\epsilon)(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\int\limits_\Omega u(y)\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy, \text{ onde } x \in \Omega_\epsilon,$$

com ρ um regularizador. [Sabidamente $x \in \Omega_\epsilon$ se só se $d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \epsilon$.]

Notemos que Ω_ϵ é o domínio (aberto) da regularização $u_\epsilon = u * \rho_\epsilon$.

Atenção. Neste texto utilizamos o sub-índice ϵ com dois sentidos diferentes: ρ_ϵ para o regularizador ρ e u_ϵ para a regularização de u. É necessária a atenção.

A hipótese $d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \epsilon$ é uma **condição de existência da integral** pois garante que $\{y : |y - x| \le \epsilon\} = D(x, \epsilon)$ é um disco (compacto) contido em Ω e por hipótese a função u é integrável nos compactos de Ω. Geometricamente e aritmeticamente, tal hipótese assegura que estamos estimando a média (ponderada) de u sobre todos os pontos de um disco de centro x. Notemos que a medida de tal disco é um múltiplo de ϵ^n. De fato, $|D(x, \epsilon)| = |D(0, \epsilon)| = \epsilon^n|D(0,1)| = \epsilon^n\omega_{n-1}$.

Como $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, não podemos garantir que u_ϵ está definida em $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$.

Para $x \in \Omega_\epsilon$ temos também as expressões (cheque, use $x - y = \epsilon t$)

$$u_\epsilon(x) = \int_{D(x,\epsilon)} u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy = \int_{D(0,1)} u(x-\epsilon t)\rho(t)dt.$$

Mostremos que a expressão de u_ϵ como uma integral sobre $D(x,\epsilon)$ implica em

$$u_\epsilon \in C^\infty(O) \text{ para todo } O \subset\subset \Omega_\epsilon.$$

Notemos que $d(\overline{O}, \partial\Omega) > \epsilon$ (cheque). Dado $x \in O$, vale

$$D(x,\epsilon) = x + D(0,\epsilon) \subset K = \overline{O} + D(0,\epsilon), \text{ com } K \text{ compacto em } \Omega.$$

Segue

$$u_\epsilon(x) = \int_K u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy, \text{ para todo } x \in O.$$

Como $u \in L^1((K)$ e ρ_ϵ e suas derivadas são contínuas e limitadas (note-se ϵ fixo), o *teorema da continuidade e derivação sob o signo de integral* [seção 1.2 - fatos básicos sobre a integral] revela $u_\epsilon \in C^\infty(O)$. Cheque, notando que para todo multi-índice $\alpha \in \{0\} \cup \mathbb{N}^n$ vale

$$\left|\partial_x^\alpha[\rho_\epsilon(x-y)]\right| = \left|\partial^\alpha(\rho_\epsilon)(x-y)\right| \leq C_\alpha, \text{ para alguma constante } C_\alpha.$$

A seguir, observando que (cheque)

$$\Omega_\epsilon = \bigcup_{O \subset\subset \Omega_\epsilon} O$$

concluímos que

$$\boxed{u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon).}$$

Vejamos alguns casos exemplares.

O caso $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ [dizemos que u é localmente limitada q.t.p.]. Então segue

$$\boxed{|u_\epsilon(x)| \leq \left\| u\Big|_{D(x,\epsilon)} \right\|_\infty \text{ e } \{u_\epsilon\} \text{ é localmente (em } \Omega_\epsilon\text{) uniformemente limitada.}}$$

Por favor, cheque.

O caso $u \in L^1(\Omega)$. Meste caso u_ϵ está definida em $\mathbb{R}^n$ e

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy \ \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Cheque, use o teorema *continuidade e derivação sob o signo da integral*, a continuidade de $x \mapsto \partial_x^\alpha[u(y)\rho_\epsilon(x-y)]$ e a desigualdade $|\partial_x^\alpha[u(y)\rho_\epsilon(x-y)]| \leq C_\alpha|u(y)|$.

Para $x \in \Omega$ e x próximo a $\partial\Omega$, a regularização desconsidera parte de $D(x,\epsilon)$. Notemos que

$$u_\epsilon(x) = \int\limits_{\Omega\cap D(x,\epsilon)} u(y)\rho_\epsilon(x-y)dy.$$

Nesta situação, $D(x,\epsilon)\cap\Omega^c$ [onde $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$] é descartado (vide figura).

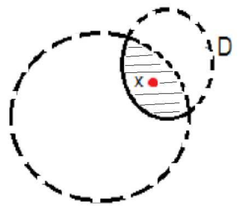

Figura 2.20: O ponto $x \in \Omega$ e $D\cap\Omega$, com $D = D(x,\epsilon)$ e $D\cap\Omega^c \neq \varnothing$.

O Caso $u \in L^1(\Omega)$ e Ω limitado. Então $u_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(u_\epsilon) \subset \overline{\Omega} + D(0,\epsilon)$. De fato, pelo caso anterior segue $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Quanto ao (esperado) suporte, se $u_\epsilon(x) \neq 0$, então segue $D(x,\epsilon)\cap\Omega \neq \varnothing$ (vide última fórmula integral acima) e por fim encontramos $x \in \Omega + D(0,\epsilon) \subset \overline{\Omega} + D(0,\epsilon)$.

O Caso $u \in L^p(\Omega)$. Nese caso u_ϵ está definida em $\mathbb{R}^n$ e

$$u_\epsilon(x) = \int\limits_\Omega u(y)\rho_\epsilon(x-y)\,dy = \int\limits_{D(x,\epsilon)\cap\Omega} u(y)\rho_\epsilon(x-y)\,dy \ \in \ C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Notemos que u_ϵ é bem definida, pois $|D(x,\epsilon)\cap\Omega| < \infty$ e a função u está em $L^1(X)$ se ocorrem $X \subset \Omega$ e $|X| < \infty$ [cheque].

Vejamos que $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Seja O um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, consideremos

$$X = [O + D(0,\epsilon)]\cap\Omega \qquad [\text{logo, } |X| < \infty].$$

Se $z \in O$, então $D(z,\epsilon) \subset O + D(0,\epsilon)$. Cheque $D(z,\epsilon)\cap\Omega = D(z,\epsilon)\cap X$. Assim,

$$u_\epsilon(z) = \int_X u(y)\rho_\epsilon(z-y)\,dy \ \text{ se } \ z \in O.$$

Como $u \in L^1(X)$ e toda $\partial^\alpha\rho_\epsilon$ é contínua e limitada, segue $u_\epsilon \in C^\infty(O)$. Portanto, $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Comentário (Extensão e Regularização). Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos a **extensão**

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{fora de } \Omega. \end{cases}$$

- Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, **é falso** (em geral) que $\widetilde{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Como exemplo trivial, a função
$$u(t) = \frac{1}{t}, \text{ para } t \in (0,\infty),$$
pertence a $L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty)\big)$. Entretanto, sua extensão $\widetilde{u} = u$ em $(0,\infty)$ e $\widetilde{u} = 0$ em $(-\infty, 0]$ não pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

- Seja $u \in L^p(\Omega)$, onde $p \in [1,\infty]$. É trivial ver que (a extensão) $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. O corolário *o produto de convolução em* $L^p(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (seção 2.2) mostra
$$(\widetilde{u})_\epsilon = \widetilde{u} * \rho_\epsilon \ \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$
A aplicação $u \mapsto \widetilde{u}$ determina uma injeção isométrica $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.

  Observemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos
$$\begin{aligned}(\widetilde{u})_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}(y)\rho_\epsilon(x-y)\,dy \\ &= \int_{\Omega} u(y)\rho_\epsilon(x-y)\,dy \\ &= u_\epsilon(x).\end{aligned}$$
Destaquemos a importante (e trivial) propriedade
$$\boxed{(\widetilde{u})_\epsilon = u_\epsilon \text{ em } \mathbb{R}^n, \text{ para toda } u \in L^p(\Omega).}$$
Porém, para $x \in \Omega$ e próximo a $\partial\Omega$, a convolução/regularização $(\widetilde{u} * \rho_\epsilon)(x)$ leva em consideração a identidade $\widetilde{u} \equiv 0$ em $D(x,\epsilon) \smallsetminus \Omega$. Vide Figura 2.21 abaixo.

Generalizemos, para um x próximo a $\partial\Omega$. A figura abaixo mostra três possibilidades para que o disco $D = D(x, \epsilon)$ intersecte a fronteira $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \text{com } x \text{ fora de } \overline{\Omega}, \\ \text{com } x \text{ em } \Omega, \\ \text{com } x \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

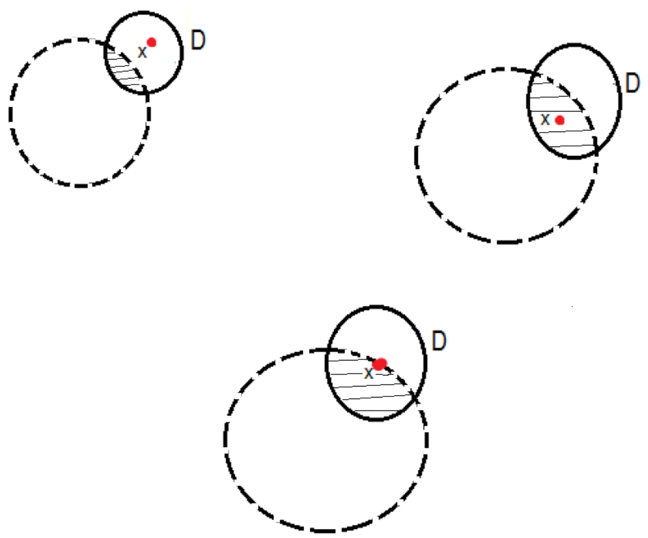

Figura 2.21: Três possibilidades para $D \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ (hachurada), com $D = D(x, \epsilon)$.

Com isto encerramos o segundo comentário, dado para $u \in L^p(\Omega)$♣

Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ em um espaço local [e.g. $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e outros que veremos no capítulo 3], interpretamos de forma um tanto imprecisa que suas regularizações u_ϵ, onde $\epsilon > 0$, se aproximam de u na topologia deste espaço local.

Se $u \in L^p(\Omega)$, muitas das propriedades para u_ϵ podem ser provadas através da extensão $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Já no segundo lema a seguir [o lema *regularização e aproximação nos espaços $L^p_{loc}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$*] utilizamos tal característica.

O (primeiro) lema abaixo segue trivialmente de "propriedades para a aproximação da identidade (c)", enunciadas para funções definidas em todo o $\mathbb{R}^n$ e a família $\{\varphi_\epsilon\}$ não necessariamene constituída de funções de suporte compacto. Entretanto, é útil (e até mais fácil) uma prova independente de tal propriedade.

Lema [Regularização e aproximação em $C(\Omega)$ e $C(\overline{\Omega})$].

(a) Se $u \in C^0(\Omega)$, então $u_\epsilon \xrightarrow{uniforme} u$ em cada compacto $K \subset \Omega$.

(b) Se $u \in C^0(\overline{\Omega})$, com Ω limitado, então u tem uma extensão $v \in C^0(O)$ para todo aberto O contendo $\overline{\Omega}$. Ainda mais, $v_\epsilon \xrightarrow{uniforme} u$ em $\overline{\Omega}$.

Prova.

(a) Seja $2\epsilon_1 = d(K, \partial\Omega) > 0$. Dado $\eta > 0$, seja o correspondente $\epsilon_2 > 0$ dado pela continuidade uniforme de u no compacto $K + D(0, \epsilon_1)$ contido em Ω.

Sejam x arbitrário em K, um regularizador ρ e $0 < \epsilon < \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Segue

$$|(u * \rho_\epsilon)(x) - u(x)| \leq \int_{D(0,1)} |u(x - \epsilon y) - u(x)|\rho(y)dy \leq \eta \int \rho(y)\, dy = \eta.$$

(b) Segue do *Teorema de Tietze* (vide seção anterior) e do item (a)♣

Lema [Regularização e aproximação em $L^p(\Omega)$ e $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$]. *Seja $p \in [1, \infty)$.*

(a) Se $u \in L^p(\Omega)$, então $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $u_\epsilon \in L^p(\Omega)$, e

$$u_\epsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} u.$$

Ainda mais, se supp(u) é compacto em Ω então $u_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ para ϵ pequeno.

(b) Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ então $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ e

$$u_\epsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(\Omega)} u.$$

Prova. (Desnecessariamente árdua em Gilbard & Trudinger [10, pp. 148–149].)

(a) Já comentamos que $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, que $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e que $(\widetilde{u})_\epsilon = u_\epsilon$ em $\mathbb{R}^n$. Pela *propriedade da aproximação da identidade (c)* [vide seção 2.3] segue $(\widetilde{u})_\epsilon \to \widetilde{u}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Logo, $u_\epsilon \to u$ em $L^p(\Omega)$.

A afirmação sobre o suporte é trivial.

(b) Então, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e (já comentamos) $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Seja K compacto em Ω e $r > 0$ tal que $\widehat{K} = K + D(0, r) \subset \Omega$. Definamos $v = u$ no compacto $\widehat{K}$ e $v = 0$ no complementar de $\widehat{K}$. Logo, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$v_\epsilon(x) = \int v(y)\rho_\epsilon(x - y)dy = u_\epsilon(x), \text{ para quaisquer } 0 < \epsilon < r \text{ e } x \in K.$$

Já mostramos que $v_\epsilon \to v$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Restringindo a K segue $u_\epsilon \xrightarrow{L^p(K)} u$♣

Teorema [Densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e em $L^p(\Omega)$]. *Seja $p \in [1,\infty)$.*

(a) O espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p_{loc}(\Omega)$.

(b) O espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

Prova.

- Consideremos o aberto $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Já mostramos (vide seção anterior 2.4 - sobre partição da unidade) que os abertos limitados

$$O_n = \Omega_{\frac{1}{n}} \cap B(0,n)$$

dão uma *sequência exaustiva de abertos (relativamente compactos) para* Ω.

- Pelo *Lema de Urysohn*, dado $n \geq 2$ existe $\chi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ satisfazendo (cheque)

$$0 \leq \chi_n \leq 1 \ \text{ e } \ \chi_n \equiv 1 \text{ em } \overline{O_{n-1}} \qquad [\text{e } \operatorname{supp}(\chi_n) \subset O_n].$$

(a) O lema imediatamente acima (*regularização e aproximação em $L^p_{loc}(\Omega)$*) garante existir $u_n \in C^\infty(O_n)$ tal que

$$u_n \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}(\Omega)} u.$$

Mostremos que

$$\chi_n u_n \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad \chi_n u_n \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}(\Omega)} u.$$

A primeira afirmação é óbvia. Para a segunda, fixemos K compacto em Ω. Então, existe N tal que $K \subset O_N$. Para $n \geq N+1$, garantimos acima que

$$(\chi_n u_n)\Big|_K = u_n \xrightarrow{L^1(K)} u.$$

(b) Temos

$$|\chi_n u - u|^p \leq 2^p |u|^p \ \text{ e } \ \chi_n u \xrightarrow{\text{q.t.p.}} u.$$

Pelo *teorema da convergência dominada* segue $\|\chi_n u - u\|_p \to 0$. Então, dado $\eta > 0$ existe N tal que $\|\chi_N u - u\|_p < \eta$. O suporte de $\chi_N u$ é compacto em Ω.

Por fim, a conclusão segue do último lema acima, item (c)♣

REFERÊNCIAS

[1.] R. A. Adams and Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003.

[2.] A. Bressan, *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, 2012, Univ. of Pennsylvania. `https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/sobolev-notes.pdf`

[3.] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2011, Springer.

[4.] M. M. Cavalcanti e V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Ed. Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[5.] Driver, B. K., *Lecture Notes on PDE*, University of California (San Diego).

[6.] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010. `http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/lecture_notes.htm`

[7.] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, second edition, Princeton University Press, 1995.

[8.] —-, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[9.] Giglioli, A., *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, 10 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975, IMPA.

[10.] Gilbard D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, reprint of the 1998 edition, 2001.

[11.] Hunter, J. *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, Univ. of California (Davis). See `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/ch3.pdf`
On PDE, see `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/pdes.html`

[12.] Royden, H. L. - Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, 4th ed, Prent. Hall, 2010.

[13.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[14.] —, *Functional Analysis*, 2nd ed., Int. Ser. Pure and Appl. Math., 1991.

[15.] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1980.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, M. Deker, 1977.