EDP's ELÍPTICAS - MAT5812 - IMEUSP - 2017

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas baseiam-se em Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (2001) e, como material de apoio, em G. B. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed, John Wiley & Sons. Agradeço particularmente às notas de aula do curso sobre os mesmos tópicos e ministrado por J. C. D. Fernandes.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E ALGUNS COMENTÁRIOS.

Definições e Notações.

- *Seja X um conjunto arbitrário. Escrevemos*

  $$B(X) = B(X,\mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C},\ \textit{tal que } f \textit{ é limitada (bounded)}\}.$$

  Este é um espaço vetorial complexo e normado, com a **norma uniforme**

  $$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

  O espaço vetorial real e normado das funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas é denotado $B(X,\mathbb{R})$, com a norma uniforme $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

- *Seja X um espaço topológico. Escrevemos*

  $$C(X) = C(X,\mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C},\ \textit{tal que } f \textit{ é contínua}\}.$$

  Este é um espaço vetorial complexo (não necessariamente normado).

  O espaço vetorial real das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ é denotado $C(X,\mathbb{R})$.

- *Seja X um espaço topológico. Escrevemos*

  $$BC(X) = BC(X,\mathbb{C}) = B(X) \cap C(X).$$

  Este espaço é $\mathbb{C}$-linear e normado, herdando a norma uniforme de $B(X)$.

  O espaço vetorial real enormado das funções contínuas e limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ é denotado $BC(X,\mathbb{R})$, com a norma uniforme herdada de $B(X,\mathbb{R})$.

- *Seja $(V,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Se $(v_n)_{\mathbb{N}}$ é uma sequência em V tal que (v_n) converge a $v \in V$, escrevemos*

  $$v_n \longrightarrow v \ \ \textit{ou}\ \ v_n \xrightarrow{V} v \ \ \textit{ou}\ \ v_n \xrightarrow{n\to+\infty} v \ \ \textit{ou}\ \ \textit{ou}\ \ \lim v_n = v \ \ \textit{ou}\ \ \lim_{n\to+\infty} v_n = v.$$

Comentários. O espaço $B(X)$ é metrizável e completo, com métrica

$$d(f,g) = \|f-g\|_u, \ \text{onde } f \in B(X) \text{ e } g \in B(X).$$

A convergência nesta métrica é a da convergência uniforme sobre X (cheque).

Se $f \in BC(X)$, então $\|f\|_u$ é a usual norma do sup, em vários textos indicada por $\|\cdot\|_\infty$. Neste texto, utilizamos o símbolo $\|\cdot\|_\infty$ para o espaço L^∞ (a ser introduzido). Como ficará claro, não há ambiguidade.

Definições e Notações. *Seja X um espaço topológico.*

- *Dado $Y \subset X$, o* **fecho** *de Y é* **o menor fechado** *(de X) que contém Y. Como intersecção de fechados é um fechado, segue que o fecho de Y é* **a intersecção de todos os fechados** *(de X) que contém Y. Escrevemos*

$$\overline{Y} \text{ para o fecho de } Y.$$

Atenção. Não confunda o fecho de $Y \subset \mathbb{C}$ com o conjunto $\{\overline{y} : y \in Y\}$.

- *Dizemos que O é um* **aberto relativamente compacto de** *X, se O é um aberto de X tal que $\overline{O}$ é compacto em X. Escrevemos então*

$$O \subset\subset X.$$

- *Dada $f : X \to \mathbb{C}$, o* **suporte** *de f é*

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}, \quad \text{o fecho de } f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

O suporte de f é o menor fechado fora do qual f é nula (cheque). Escrevemos

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : supp(f) \text{ é compacto}\}.$$

- *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ contínua. Dizemos que f é* **nula no infinito** *se*

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

O espaço das funções contínuas e nulas no infinito é

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \ f \text{ é nula no infinito}\}.$$

Comentários.

- É trivial ver que $C_c(X) \subset C_0(X)$.
- Temos $C_0(X) \subset BC(X)$. De fato, dada $f \in C_0(X)$ segue que o conjunto $\mathcal{X} = \{x : |f(x)| \geq 1\}$ é compacto e então $f(\mathcal{X})$ é limitado no plano complexo ao passo que no conjunto $X \setminus \mathcal{X}$ temos $|f(x)| < 1$. Logo, f é limitada.
- Resumindo, temos

$$C_c(X) \subset C_0(X) \subset BC(X).$$

Definições e Notações. *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e um $k \in \mathbb{N}$.*

- *O comprimento do multi-índice α é $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.*
- *O j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ é denotado e_j.*
- *A α-ésima derivada parcial de f é, se existir,*
$$(D^\alpha f)(x) = (\partial^\alpha f)(x) = \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right)(x) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f\right)(x) = (\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n} f)(x).$$
- *Dado $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, também escrevemos*
$$\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad e \quad \partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f.$$
- *O gradiente de f e o laplaciano de f são, respectivamente,*
$$\nabla f = Df = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \ \ e \ \ \Delta f = \sum D_{ii} f = \partial_{ii}^2 f.$$
- *Também escrevemos (quando $f = f(x,y)$ tal notação pode ser útil)*
$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$
- *A classe das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k são contínuas é*
$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ tal que } \partial^\alpha f \text{ existe e é contínua para todo } |\alpha| \leq k\}.$$
- *O espaço das funções em $C^k(\Omega)$ e de suporte compacto (contido em Ω) é*
$$C_c^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \ \ supp(f) \text{ é um compacto (contido em } \Omega)\}.$$
- *O espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω é*
$$C^\infty(\Omega).$$
- *O espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω e de suporte compacto (contido em Ω) é*
$$C_c^\infty(\Omega).$$
[No Capítulo 2 é mostrada a existência de tais funções.]
- *Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, é usual abreviar $C^k(\mathbb{R}^m)$, $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por*
$$C^k, \ \ C_c^k, \ \ C^\infty \ \ e \ \ C_c^\infty, \text{ respectivamente.}$$

Definições e Notações. *Fixemos* Ω *um aberto em* $\mathbb{R}^n$*, um índice* $k \in \mathbb{N}$ *e um expoente* $\gamma \in (0,1)$*. Sejam (arbitrários)* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e um multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*.*

- $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ é o sub-espaço das funções em $C^k(\Omega)$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k se estendem continuamente ao fecho $\overline{\Omega}$.

- Se Ω é limitado, o espaço $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ é normado e com norma (cheque)

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f|.$$

  Tal norma é equivalente à norma (cheque)

$$\max_{|\alpha| \le k} \sup_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f|.$$

- A função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é **Hölder-contínua** com expoente γ (ou γ-Hölder contínua ou **Hölder uniformemente contínua** com expoente γ) se

$$\sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty.$$

- O espaço das funções com derivadas parciais até ordem k **uniformemente Hölder contínuas** com expoente (ou ordem) γ no fecho $\overline{\Omega}$ é indicado

$$C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ f \in C^k(\overline{\Omega}) : \max_{|\alpha| \le k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f| < \infty \text{ e } \max_{|\beta| = k} \sup_{x \ne y} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty \right\}.$$

- Se $k = 0$, é usual escrever

$$C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) = C^\gamma\left(\overline{\Omega}\right), \text{ subentendendo } 0 < \gamma < 1.$$

- Se Ω é limitado então $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é normado e completo, com norma (cheque)

$$\boxed{\|f\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} = \sup_{\overline{\Omega}} |f| + \sup_{x \ne y} \tfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}.}$$

- Se Ω é limitado então $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é normado e completo, com norma (cheque)

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f| + \sum_{|\beta| = k} \sup_{x \ne y} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Definição. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é de **Lipschitz** se existe uma constante M (uma constante de Lipschitz para f) satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \text{ para quaisquer } x \in X \text{ e } y \in X.$$

Definição [O espaço $C^{0,1}(\Omega)$]. Fixemos Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$. Então, escrevemos $f \in C^{0,1}(\Omega)$ se a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é de Lipschitz (dizemos também que f é Hölder-contínua com expoente $\gamma = 1$). Definimos a norma

$$\|f\|_{C^{0,1}(\Omega)} = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Definições e Notações. *Seja $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$, um intervalo compacto, ou $I = (c, d)$ um intervalo aberto (limitado ou não). Uma função*

$$F : I \to \mathbb{R}$$

é dita **absolutamente contínua** *se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de sub-intervalos abertos e dois a dois disjuntos,*

$$(c_1, d_1) \ldots, (c_N, d_N),$$

todos contidos em I, vale a condição:

$$\sum_{j=1}^{N} (d_j - c_j) < \delta \quad \Longrightarrow \sum_{j=1}^{N} |F(d_j) - F(c_j)| < \epsilon.$$

Indicamos o espaço das funções absolutamente contínuas em I por

$$AC([a, b]) \quad \text{ou} \quad AC\big((a, b)\big), \text{ conforme o caso.}$$

Definição. Duas normas sobre um mesmo espaço vetorial X são **equivalentes** se existem constantes $c > 0$ e $C > 0$ tais que temos

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \text{ para todo } x \in X.$$

Definições. Introduzamos as funções **parte positiva** $x^+ = \max(x, 0)$, **parte negativa** $x^- = \max(-x, 0)$ e **módulo** $|x| = \max(x, -x)$, com x um número real.

São triviais as relações

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad \begin{cases} x^+ = \frac{|x|+x}{2} \\ x^- = \frac{|x|-x}{2}, \end{cases} \qquad \text{e} \quad x^- = (-x)^+.$$

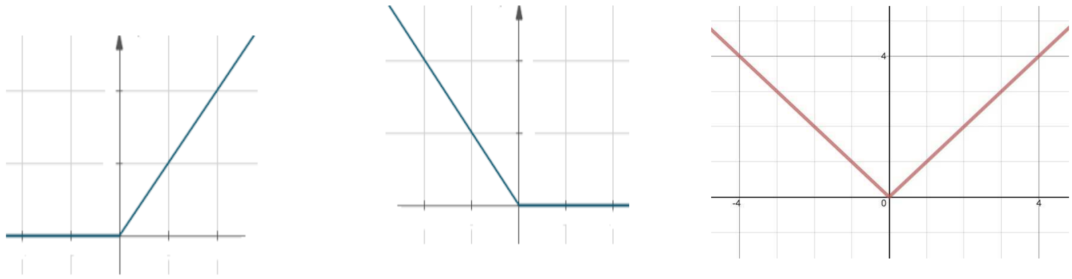

Figura 1: Os gráficos de x^+, x^- e $|x|$.

Estas três funções não são deriváveis em toda a reta mas são de Lipschitz e com constante de Lipschitz $L = 1$.

De fato, dados reais x e y, pela segunda desigualdade triangular a função módulo (de um número real) satisfaz

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq 1.|x - y|.$$

A função parte positiva (de um número real) satisfaz

$$|x^+ - y^+| = \left|\frac{|x| + x}{2} - \frac{|y| + y}{2}\right| \leq \frac{\big|\,|x| - |y|\,\big|}{2} + \frac{|x - y|}{2} \leq |x - y|.$$

Analogamente, temos

$$|x^- - y^-| = |(-x)^+ - (-y)^+| \leq |-x - (-y)| = |x - y|.$$

Definições. As **partes positiva e negativa de uma função** $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são respectivamente definidas por

$$f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big) \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\big(-f(x), 0\big).$$

[**Atenção.** Esta definição de f^- difere da de Gilbard & Trudinger, mas concorda com a de Adams, Folland, Royden & Fitzpatrick, Rudin e Wheeden & Zygmund.]

Seguem as relações

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-, \qquad \begin{cases} f^+ = \frac{|f|+f}{2} \\ \\ f^- = \frac{|f|-f}{2}, \end{cases} \qquad \text{e} \quad f^- = (-f)^+.$$

Ainda, $(-f)^- = f^+$ e $f^- = (-f)^+$. Ainda mais

$$|f|^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2.$$

Evidentemente,

$$f^+ = x^+ \circ f \quad \text{e} \quad f^- = x^- \circ f.$$

Capítulo 1

ESPAÇOS L^p e de Hilbert

1.1 Introdução

Apesar de não ser estritamente necessário, começamos listando e/ou provando (com técnicas de Cálculo I) vários fatos elementares sobre *funções convexas*. Espero que tal abordagem facilite e torne mais natural algumas das desigualdades clássicas dos espaços L^p, tais como a *Desigualdade de Young* e a *Desigualdade de Hölder* e, principalmente, os *Teoremas de Interpolação*.

Este texto é apresentado de tal forma que as provas destes vários fatos básicos sobre funções convexas podem ser consultados conforme o/a leitor/a considere necessário ao longo da leitura dos capítulos. Conforme surja a oportunidade, os mais relevantes destes resultados básicos são redemonstrados e/ou reinterpretados quando apropriado. Assim, para começar, é suficiente se familiarizar com as definições e com os enunciados das afirmações elementares sobre funções convexas nesta introdução. O estudo destas demonstrações (todas elementares) pode ser adiado por algumas seções.

Definição. *Uma função $f : X \to Y$ entre dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é de Lipschitz se existe uma constante $C > 0$ (uma* constante de Lipschitz*) tal que temos*

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq C d_X(x_1, x_2), \text{ quaisquer que sejam } x_1, x_2 \in X.$$

Definição. *Geometricamente, $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é* **convexa** *se restrita a cada intervalo $[x_1, x_2]$, contido em seu domínio, seu gráfico está sobre ou abaixo do segmento (*corda*) unindo o ponto $\big(x_1, \varphi(x_1)\big)$ ao ponto $\big(x_2, \varphi(x_2)\big)$.*

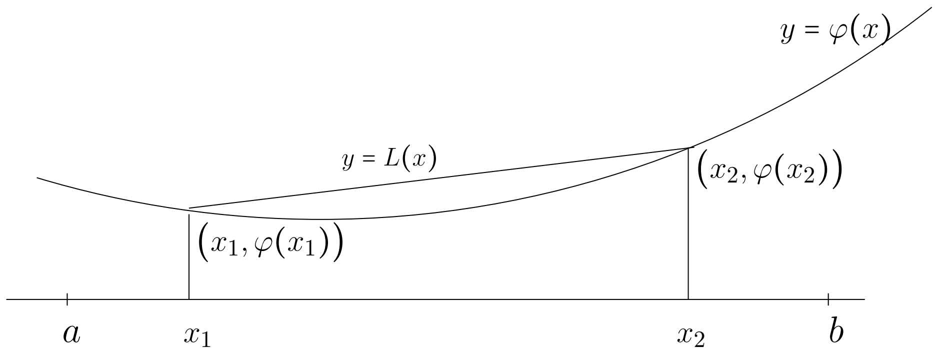

Figura 1.1: Gráfico de $y = \varphi(x)$ convexa e da *corda* $y = L(x)$.

Definição. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$, o seu* **epigráfico** *é o conjunto*

$$epi(f) = \{(x,y) : x \in X \text{ e } y \geq f(x)\}.$$

Temos então a seguinte definição equivalente para função convexa.

Definição. *Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é* **convexa** *se seu epigráfico é convexo.*

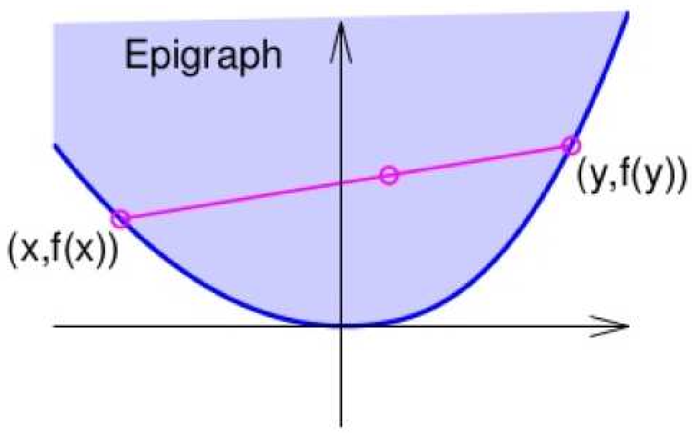

Figura 1.2: O epigráfico de uma função convexa f.

Notemos que uma função convexa não é necessariamente crescente e não é necessariamente decrescente. Vide ilustrações acima.

Proposição. *Sejam* $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *e* $[x_1, x_2]$ *variando em* (a,b). *Vale o que segue.*

(a) As seguintes definições de convexidade para φ são equivalentes.

(i) $\varphi\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

(ii) $\varphi(x) \le L(x) = \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \varphi(x_1)$, para todo $x \in [x_1, x_2]$.

(iii) $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(x)}{x_2 - x}$ para todo $x_1 < x < x_2$.

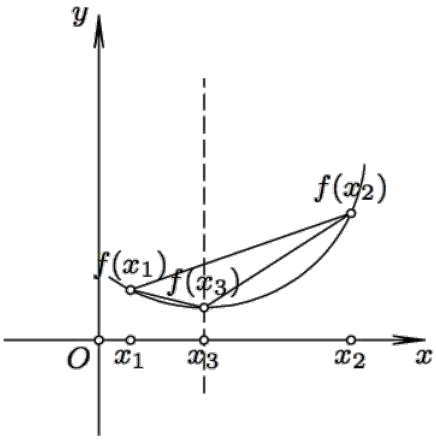

Figura 1.3: **Cordas**, sobre $[x_1, x_3]$ e $[x_3, x_2]$, de f convexa.

(iv) $\varphi\left(\dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2}\right) \le \dfrac{\varphi(x_1)}{p_1} + \dfrac{\varphi(x_2)}{p_2}$ para todos $p_1, p_2 > 1$ com $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = 1$.

(b) φ é convexa se e somente se

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(x_1)}{s - x_1} \le \frac{\varphi(x_2) - \varphi(t)}{x_2 - t}, \quad \text{se } s, t \in [x_1, x_2] \text{ com } s \neq x_1 \text{ e } t \neq x_2.$$

Leitura: a corda sobre $[t, x_2]$ tem maior inclinação que a corda sobre $[x_1, s]$.

(c) **Desigualdade (discreta) de Jensen.** Seja φ convexa em (a,b). Sejam as sequências $\{t_j\}_1^n \subset (a,b)$ e $\{p_j\}_1^n$, com $p_j \ge 0$ e $\Sigma p_j > 0$. Temos,

$$\varphi\left(\frac{\Sigma p_j t_j}{\Sigma p_j}\right) \le \frac{\Sigma p_j \varphi(t_j)}{\Sigma p_j}.$$

(d) Se φ é diferenciável, então φ é convexa se e só se φ' é crescente.

(e) φ é convexa se e somente se φ é contínua e

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}.$$

(f) Seja $\Gamma = \{\varphi : (a,b) \to \mathbb{R},\ \text{tal que } \varphi \text{ é convexa}\}$. Então, Γ é um **cone** (algebricamente fechado para soma e multiplicação por escalar positivo) fechado na topologia da convergência simples. O supremo, se finito, de uma família de funções convexas em (a,b) é uma função convexa. O mínimo de duas funções convexas não é necessariamente convexa.

(g) Seja φ duas vezes diferenciável. Então φ é convexa se e só se $\varphi'' \ge 0$.

(h) As seguintes funções são convexas

  (i) x^p, onde $p \ge 1$ e $x \in (0, +\infty)$

  (ii) e^{ax}, onde $x \in (-\infty, +\infty)$

  (iii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, onde $x \in (0, +\infty)$.

(i) Sejam $a \ge 0$ e $b \ge 0$ e sejam $p > 1$ e $p' > 1$ **expoentes conjugados**. Isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então, vale a **desigualdade de Young**

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Vale a igualdade na desigualdade de Young se e somente se $a^p = b^{p'}$.

(j) Seja φ convexa e ψ convexa e não decrescente em $\varphi\Big((a,b)\Big)$. Então,

$$\psi \circ \varphi \quad \text{é convexa em } (a,b).$$

Em particular, e^{φ} é convexa.

(k) Se $\varphi > 0$ e $\log \varphi$ é convexa, então φ é convexa.

(l) Se φ é convexa, então φ é de Lipschitz em subintervalos compactos.

(m) **Caracterização da convexidade.** *A função $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, φ é absolutamente contínua em subintervalos compactos e a derivada φ', no conjunto em que a derivada é finita, é crescente.*

Prova.

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Basta notar que escrevendo $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, temos

$$L(x) \;=\; \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}[\,\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_1\,]+\varphi(x_1) \;=\; \lambda\varphi(x_1)+(1-\lambda)\varphi(x_2)\,.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Basta substituir, em (iii), $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Substituindo $t = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ em (i) e achando λ, obtemos

$$\varphi(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2).$$

Logo,

$$\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2).$$

Donde segue

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iv). É evidente.

(b) (b) $\Rightarrow$ φ convexa. Basta provar (b) $\Rightarrow$ (a)(iii). Isto é óbvio, pondo $s = t = x$.

(a)(ii) $\Rightarrow$ (b). Consideremos $\lambda \in [0,1)$ tal que $s = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ e consideremos $\nu \in (0,1]$ tal que $t = \nu x_1 + (1-\nu)x_2$. Encontramos

$$\begin{cases} \varphi(s)-\varphi(x_1) \;\le\; \lambda\varphi(x_1)+(1-\lambda)\varphi(x_2)-\varphi(x_1) = (1-\lambda)[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)], \\ \varphi(x_2)-\varphi(t) \ge \varphi(x_2)-\nu\varphi(x_1)-(1-\nu)\,\varphi(x_2) = \nu[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]. \end{cases}$$

Donde segue

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(x_1)}{1-\lambda} \le \varphi(x_2)-\varphi(x_1) \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(t)}{\nu},\;\; 1-\lambda = \frac{s-x_1}{x_2-x_1} \;\text{ e }\; \nu = \frac{x_2-t}{x_2-x_1}.$$

(c) Ao ocorrer a letra Σ, a variável j percorre de 1 a $n-1$. Por indução segue

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\Sigma p_j x_j + p_n x_n}{\Sigma p_j + p_n}\right) &= \varphi\left(\frac{\Sigma p_j}{\Sigma p_j + p_n}\frac{\Sigma p_j x_j}{\Sigma p_j} + \frac{p_n x_n}{\Sigma p_j + p_n}\right) \\ &\le \frac{\Sigma p_j}{\Sigma p_j + p_n}\varphi\left(\frac{\Sigma p_j x_j}{\Sigma p_j}\right) + \frac{p_n\varphi(x_n)}{\Sigma p_j + p_n} \\ &\le \frac{\Sigma p_j}{\Sigma p_j + p_n}\frac{\Sigma p_j\,\varphi(x_j)}{\Sigma p_j} \;+\; \frac{p_n\varphi(x_n)}{\Sigma p_j + p_n} \\ &= \frac{\Sigma p_j\varphi(x_j) + p_n\varphi(x_n)}{\Sigma p_j + p_n}. \end{aligned}$$

(d) Se φ é convexa, então φ' crescente. Supondo $x_1 < x < x_2$, por definição temos

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}.$$

Computando separadamente os limites para $x \to x_1$ e para $x \to x_2$, segue

$$\varphi'(x_1) \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{e} \quad \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \le \varphi'(x_2).$$

Dada φ' crescente, φ é convexa. Pelo TVM em $[x_1,x]$ e em $[x,x_2]$, segue

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x)}{x_2-x}.$$

(e) A "ida". Fixemos $\overline{a} \in (a,x_1)$ e $\overline{b} \in (x_2,b)$. Supondo $x_1 < s < t < x_2$, temos

$$m_1 = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(\bar{a})}{x_1-\bar{a}} \le \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(\bar{b})-\varphi(x_2)}{\bar{b}-x_2} = m_2.$$

Donde segue $|\varphi(t)-\varphi(s)| \le M|t-s|$ e então φ é lipschtziana em $[x_1,x_2]$. Logo, φ é contínua.

A "volta". Podemos supor, e fixar, $[x_1,x_2]=[0,1]$ e $\varphi(0)=0$ [basta definir $s \to \varphi(x_1+s(x_2-x_1))-\varphi(x_1)$]. Mostremos

$$\varphi\left(\frac{j}{2^n}1\right) \le \frac{j}{2^n}\varphi(1), \text{ para } 0 \le j \le 2^n.$$

Se $n=1$, é óbvio. Supondo verdadeiro o caso n, seja

$$\frac{j}{2^{n+1}}, \text{ para } 0 < j \le 2^{n+1}.$$

Existe um único i tal que

$$\frac{i-1}{2^n} < \frac{j}{2^{n+1}} \le \frac{i}{2^n}, \text{ com } 1 \le i \le 2^n.$$

Se ocorre $\frac{j}{2^{n+1}} = \frac{i}{2^n}$, pela hipótese de indução segue

$$\varphi\left(\frac{j}{2^{n+1}}\right) = \varphi\left(\frac{i}{2^n}\right) \le \frac{i}{2^n}\varphi(1) = \frac{j}{2^{n+1}}\varphi(1).$$

Senão, ocorre $\frac{j}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(\frac{i-1}{2^n}+\frac{i}{2^n})$ e então segue

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{2^n}+\frac{i}{2^n}\right)\right) &\le \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{i-1}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{i}{2^n}\right)\\ &\le \frac{i-1}{2^{n+1}}\varphi(1)+\frac{i}{2^{n+1}}\varphi(1) = \frac{2i-1}{2^{n+1}}\varphi(1) = \frac{j}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Pela densidade de $\{\frac{j}{2^n}\}$ em $[0,1]$ e a continuidade de φ, segue a tese.

(f) , (g) e (h) são triviais (cheque).

(i) Escrevendo

$$c = a^p, \quad d = b^{p'} \;\text{ e }\; 0 < \lambda = \frac{1}{p} < 1,$$

provemos $c^\lambda d^{(1-\lambda)} \leq \lambda c + (1-\lambda)d$, com igualdade se e somente se $c = d$.

Dividindo por $d \neq 0$ ($d = 0$ é óbvio) reduzimos o problema a provar a desigualdade

$$\varphi(t) = t^\lambda - \lambda t \leq 1 - \lambda, \text{ para todo } t > 0,$$

valendo a igualdade se e somente se $t = 1$.

Entretanto, é trivial ver que temos

$$\varphi' = \lambda t^{\lambda-1}(1 - t^{1-\lambda}) > 0 \text{ em } (0,1) \text{ e, ainda, } \varphi' < 0 \text{ em } (1,+\infty).$$

Assim, $t = 1$ é o único ponto de máximo absoluto e, é óbvio, $\varphi(1) = 1 - \lambda$.

(j) A primeira afirmação é trivial.

A segunda afirmação segue da primeira e da observação $\exp(\log\varphi) = \varphi$.

(k) Resolvido em (e).

(l) Sugestão. Procure um argumento unificado para (d) e a "ida" de (e).

(m) Exercício (para quem está familiarizado com a teoria da diferenciação de Lebesgue). Dica, utilize o teorema da diferenciação de Lebesgue. Consulte Folland [8, p. 98] ou

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`♣

Mais resultados bastante relevantes sobre funções convexas podem ser encontrados em Wheeden & Zygmund [16, pp. 118–123].

Proposição. *Consideremos o espaço vetorial* $BC(\mathbb{R}^n)$ *e seus sub-espaços*

$$C_c(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \subset BC(\mathbb{R}^n),$$

com a norma uniforme. Então,

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} = C_0(\mathbb{R}^n).$$

Isto é, o fecho do espaço $C_c(\mathbb{R}^n)$ *em* $BC(\mathbb{R}^n)$ *é o espaço* $C_0(\mathbb{R}^n)$*.*

Prova.

($\subset$) Consideremos uma sequência (f_n) em $C_c(\mathbb{R}^n)$ que converge uniformemente a $f \in BC(\mathbb{R}^n)$. Seja $\epsilon > 0$. Existe k tal que $\|f_k - f\|_u < \epsilon$. Seja $r > 0$ tal que $\text{supp}(f_k) \subset D(0,r)$. Para todo $|x| > r$ temos $f_k(x) = 0$ e então

$$|f(x)| = |f_k(x) - f(x)| \leq \|f_k - f\|_u < \epsilon.$$

Isto mostra que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e também que $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

($\supset$) Sejam $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$. Por definição, existe $r > 0$ tal que temos

$$|f(x)| \leq \epsilon \text{ se } |x| \geq r.$$

É claro que $D(0,r) \subset [-r,r] \times \cdots \times [-r,r] = [-r,r]^n$. Seja $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ contínua e de suporte compacto dada por

$$g(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \in [-r,r], \\ 0 \text{ se } t \in (-\infty,-r-1] \cup [r+1,+\infty), \\ \text{linear em } [-r-1,-r] \text{ e em } [r,r+1]. \end{cases}$$

Dado $x = (x_1,\ldots,x_n)$, seja $\chi(x) = g(x_1)\cdots g(x_n) \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Então, temos $\chi f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ com $0 \leq \chi \leq 1$ e $\chi(x) = 1$ se $x \in D(0,r)$. Temos também

$$|f(x) - \chi(x)f(x)| = [1-\chi(x)]|f(x)| \leq \epsilon \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Donde segue $\|f - \chi f\|_u \leq \epsilon$. Isto mostra que $C_0(\mathbb{R}^n) \subset \overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ ♣

1.2 Fatos Básicos Sobre a Integral de Lebesgue

A medida que consideramos (a menos que avisado o contrário) é a medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}^n$, também denotada dm, dx ou dy conforme a conveniência. As funções consideradas são (Lebesgue) mensuráveis (a valores reais ou complexos).

A menos que avisado o contrário, X e Ω indicam subconjuntos mensuráveis arbitrários de $\mathbb{R}^n$. Na maior parte das vezes, Ω indica um aberto em $\mathbb{R}^n$. Alertaremos quando Ω indica um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$.

Indicamos a medida de um conjunto mensurável X por $m(X)$ ou por $|X|$.

Se $f : X \to \mathbb{C}$ é integrável, escrevemos $f \in L^1(X)$.

Recordemos os enunciados de alguns dos principais teoremas da Teoria da Integração de Lebesgue.

Definições e Notações. *Seja (a_n) uma sequência de números reais.*

- *Um valor $L \in [-\infty, +\infty]$ é um* **valor de aderência** *da sequência (a_n) se existe uma subsequência de (a_n) que converge a L.*

- *O* **limite inferior** *de (a_n) é o menor valor de aderência da sequência (a_n). Tal limite inferior, denotado $\liminf a_n$, existe e vale a fórmula*

$$\liminf a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

- *O* **limite superior** *de (a_n) é o maior valor de aderência da sequência (a_n). Tal limite superior, denotado $\limsup a_n$, existe e vale a fórmula*

$$\limsup a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Notação. *Dada uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, escrevemos*

$$(\liminf f_n)(x) = \liminf f_n(x) \quad e \quad (\limsup f_n)(x) = \limsup f_n(x).$$

Teorema da Convergência Monótona - TCM - (Beppo Levi). *Suponhamos $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ uma sequência crescente de funções mensuráveis definidas em X e não negativas, convergindo pontualmente para f. Então, f é mensurável e*

$$\int f\,dx = \lim \int f_n\,dx.$$

A seguir generalizamos o fato intuitivo "a menor função limita a menor área".

Lema de Fatou. *Seja $f_n : X \to [0,\infty)$ uma sequência de funções mensuráveis e não negativas. Então temos*

$$\int (\liminf f_n)\,dx \le \liminf \Big(\int f_n\,dx \Big).$$

Prova. Segue do TCM, de $\int (\inf_{k\ge n} f_k) dx \le \inf_{k\ge n} \int f_k\,dx$ e da fórmula para o $\liminf$♣

[Vide *remark* em Tao, T., *An introduction to measure theory*, AMS, p. 91.]

Definição e Notação. Dado X mensurável, dizemos que uma propriedade pontual P vale **em quase todo ponto** de X se o conjunto $\{x \in X : P \text{ não vale em } x\}$ tem medida nula. Escrevemos então que (a propriedade) P vale q.t.p. em X.

Teorema da Convergência Dominada - TCD - (Lebesgue). *Consideremos $f_n : X \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente para f em quase todo ponto. Suponhamos que exista uma função integrável $g : X \to [0,+\infty)$ satisfazendo $|f_n| \le g$ para todo n. Então, f é integrável e satisfaz*

$$\int f\,dx = \lim \int f_n\,dx.$$

Teorema da convergência Dominada Generalizado - TCDG. *No espaço $L^1(X)$, consideremos duas sequências de funções f_n e g_n e duas funções f e g. Suponhamos que*

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \ \text{ q.t.p.} \\ g_n \longrightarrow g \ \text{ q.t.p.} \\ |f_n| \le g_n \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \int g_n\,dx \longrightarrow \int g\,dx.$$

Então

$$\int f_n\,dx \longrightarrow \int f\,dx.$$

Prova. Como g_n é real, é trivial ver que podemos supor g real.

Temos $|f_n - f| \le g_n + |f|$. Logo, $g_n + |f| - |f_n - f| \ge 0$. O *lema de Fatou* mostra

$$\int \liminf \big(g_n + |f| - |f_n - f|\big)\,dx \ \le\ \liminf \int (g_n + |f| - |f_n - f|)\,dx.$$

Donde segue

$$\int (g + |f|)\,dx \le \int g\,dx + \int |f|\,dx + \liminf \int -|f_n - f|\,dx.$$

Portanto

$$\limsup \int |f_n - f|\,dx \le 0 \ \text{ e } \ \int |f_n - f|\,dx \longrightarrow 0 ♣$$

Teorema de Tonelli. *Sejam X mensurável em $\mathbb{R}^n$ e Y mensurável em $\mathbb{R}^m$. Consideremos uma função mensurável e não negativa*

$$f : X \times Y \to [0, +\infty].$$

Então,

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,y) \text{ é mensurável para todo ponto fixado } y \in Y \\ \text{e} \\ y \mapsto f(x,y) \text{ é mensurável para todo ponto fixado } x \in X. \end{cases}$$

Ainda, as funções

$$x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)dy \quad \text{e} \quad y \mapsto \int\limits_X f(x,y)\,dx$$

são mensuráveis e não negativas. Ainda mais, temos

$$\int\limits_{X\times Y} f\,dxdy = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema de Fubini. *Sejam X mensurável em $\mathbb{R}^n$ e Y mensurável em $\mathbb{R}^m$. Consideremos uma função integrável*

$$f : X \times Y \to \mathbb{C}.$$

Então,

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,y) \text{ é integrável para quase todo } y \in Y \\ \text{e} \\ y \mapsto f(x,y) \text{ é integrável para quase todo } x \in X. \end{cases}$$

Ainda, as funções

$$x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)dy \quad \text{e} \quad y \mapsto \int\limits_X f(x,y)\,dx$$

estão definidas em quase todo ponto e são ambas integráveis. Ainda mais, temos

$$\int\limits_{X\times Y} f\,dxdy = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema (Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração). *Sejam X mensurável em $\mathbb{R}^n$ e uma função $f : X \times (a,b) \to \mathbb{C}$ tal que $f(\cdot,t) : X \to \mathbb{C}$ é integrável para cada t fixado em (a,b). Consideremos*

$$F(t) = \int_X f(x,t)\,dx.$$

(a) **Continuidade.** *Suponhamos existir $g \in L^1(X)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, para todos x, t. Suponhamos também que $f(x,\cdot)$ é contínua em t_0, para cada x. Então, F é contínua em t_0. No caso em que $t \mapsto f(x,t)$ é contínua para cada x fixado, então F é contínua em (a,b).*

(b) **Derivação.** *Suponha que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe e que existe uma $g \in L^1(X)$ satisfazendo*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x), \text{ para quaisquer } x \text{ e } t.$$

Então, F é diferenciável e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Prova.

Podemos supor que f é uma função real [cheque].

Seja (t_n) uma sequência em (a,b) tal que $t_n \to t_0$, com cada $t_n \neq t_0$.

(a) Definindo $f_n(x) = f(x,t_n)$, temos que $f_n \xrightarrow{simples} f_0$ e $|f_n| \leq g$. Pelo teorema da convergência dominada concluímos que

$$F(t_n) = \int_X f(x,t_n)\,dx \to \int_X f(x,t_0)\,dx.$$

(b) São mensuráveis as seguintes funções (definidas em X),

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0).$$

Pela teorema do valor médio (pois f é real) temos

$$|h_n(x)| \leq \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| : t \in (a,b)\right\} \leq g(x).$$

Portanto, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0))\,dx = \lim \int_X h_n(x)\,dx = \lim \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = F'(t_0)\clubsuit$$

É importante notar que o teorema acima é de caráter local.

Teorema (Teorema da Mudança de Variável na Integral de Lebesgue). *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo [entre Ω e $\varphi(\Omega)$] de classe C^1. Seja $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ mensurável. Vale o que segue.*

(a) *A composição $f \circ \varphi$ é mensurável em Ω.*

(b) *Se $f \geq 0$ ou $f \in L^1\big(\varphi(\Omega)\big)$, então*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f\big(\varphi(y)\big)|\det J\varphi(y)|dy.$$

Prova. Vide Folland [8, p. 74–76] ou

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP2-2016.pdf`♣

Exemplifiquemos. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijetora e linear. Então temos

$$\int f(x)dx = |\det T| \int (f \circ T)(y)dy$$

para toda $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \geq 0$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, suponhamos $f = \chi_E$ com E um conjunto mensurável em R^n. Segue

$$m(E) = \int \chi_E dx = |\det T^{-1}| \int (\chi_E \circ T^{-1})dy = \frac{1}{|\det T|} \int \chi_{T(E)}dy = \frac{m\big(T(E)\big)}{|\det T|}.$$

Logo,

$$\boxed{m\big(T(E)\big) = |\det T| m(E).}$$

Teorema (Teorema da Mudança de Variável em Coordenadas Polares). *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável, com $f \geq 0$ ou f integrável. Então,*

$$\int f(x)dx = \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} f(ry)r^{n-1}d\sigma(y)dr,$$

com $d\sigma$ a medida de superfície em $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ (a esfera unitária centrada na origem).

Prova. Vide Folland [8, p. 79] ou

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP2-2016.pdf`♣

Notações. Sejam $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ e $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Indicamos

$$\omega_n = \text{volume}(B(0,1)) = \int\limits_{B(0,1)} 1dx$$

e

$$\sigma(S^{n-1}) = \text{área}(S^{n-1}) = \int\limits_{S^{n-1}} 1d\sigma.$$

Também indicamos a medida $d\sigma$ em S^{n-1} por $d\omega$. Isto é,

$$d\sigma = d\omega.$$

Proposição (Medidas da esfera e da bola unitárias). *Valem as relações*

$$\omega_n = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} \quad e \quad m\big(B(0,r)\big) = r^n\omega_n.$$

Prova. Exercício♣

Definições e Notações. Seja $I = [c,d] \subset \mathbb{R}$, um intervalo compacto, ou $I = (c,d)$ um intervalo aberto (limitado ou não). Uma função $F : I \to \mathbb{R}$ é dita **absolutamente contínua** se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de sub-intervalos abertos e dois a dois disjuntos, $(c_1,d_1)\ldots,(c_N,d_N)$, todos contidos em I, vale a condição:

$$\sum_{j=1}^{N}(d_j - c_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{N}|F(d_j) - F(c_j)| < \epsilon.$$

Indicamos o espaço das funções absolutamente contínuas em I por

$$\mathrm{AC}(I).$$

Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue. *Uma função $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se e somente se F é derivável q.t.p. (em quase todo ponto), $F' \in L^1\big([c,d]\big)$ e*

$$F(x) - F(c) = \int\limits_{c}^{x} F'(t)dt.$$

Prova. Vide Royden & Fitzpatrick [12] ou Folland [8, p. 106] ou
`https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`♣

Observação. Dada $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ absolutamente contínua, então f é absolutamente contínua nos sub-intervalos compactos de (a,b). Pelo teorema fundamental do cálculo concluímos que

$$\begin{cases} \text{existe } f' \text{ em quase todo ponto} \\ \text{e} \\ f' \in L^1\big([c,d]\big) \text{ para todo } [c,d]\subset(a,b). \end{cases}$$

Teorema (Fórmula de integração por partes na integral de Lebesgue). *Sejam f e g funções absolutamente contínuas em $[a,b]$. Vale o que segue.*

- *O produto fg é uma função absolutamente contínua em $[a,b]$.*
- *Vale a fórmula*

$$\int_a^b (fg'+f'g)(t)dt = f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

Prova. Wheeden & Zygmund [16, p. 108] ou Folland [8, p. 108, exercício 35]♣

Definição. Dizemos que uma função $f:\Omega\to\mathbb{C}$ é **localmente integrável** se para cada ponto $x\in\Omega$, existe uma bola aberta não degenerada $B(x,r)\subset\Omega$ tal que a restrição $f:B(x,r)\to\mathbb{C}$ é integrável. Isto é,

$$\int_{B(x,r)} f(y)\,dy \text{ é finita.}$$

Teorema da Diferenciação de Lebesgue. *Dada $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ localmente integrável, então*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \ \text{q.t.p.}.$$

Comentário 1. Podemos trocar a família de bolas $\{B(x,r)\}_r$ por uma família decrescente de cubos não degenerados $Q's$ centrados em x e que "encolhe" a x. Isto é, para todo $\epsilon>0$ existe um cubo na família e com diâmetro menor que ϵ.

Comentário 2. Interpretemos o teorema da diferenciação (Lebesgue) para $n=1$.

Consideremos uma função $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrável. Dado x no conjunto de Lebesgue de v, temos

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |v(t) - v(x)|dt \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Claramente segue

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |v(t) - v(x)|dt \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Encontramos então

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v(t)dt \xrightarrow{h\to 0} v(x).$$

Assim, o teorema da diferenciação de Lebesgue generaliza o *Segundo teorema fundamental do cálculo (para a integral de Riemann).*

Definição e Notação. Um ponto x pertence ao **Conjunto de Lebesgue** de uma função localmente integrável $f : \Omega \to C$ se

$$\frac{1}{m\left(D(0,r)\right)}\int_{D(0,r)} |f(x-y) - f(x)|dy \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

É trivial ver que para todo x em L_f, o conjunto de Lebesgue de f, temos (cheque)

$$\frac{1}{m\left(D(0,r)\right)}\int_{D(0,r)} f(x+y)dy \xrightarrow{r\to 0} f(x).$$

I.e., a média de f (se f é real) em $D(x, r)$ se aproxima de $f(x)$, se $r \to 0$ e $x \in L_f$.

O conjunto de Lebesgue L_f é "“grande” no sentido da teoria da medida.

Teorema (Tamanho de L_f). *Seja $f : \Omega \to C$ localmente integrável. Então,*

o complementar $\Omega \smallsetminus L_f$ tem medida nula.

Prova. Vide Folland [8, p. 98] ou `https://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP3-2016.pdf`.

1.3 Fatos Básicos Sobre L^p

Definimos a **reta estendida** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

Fixemos conjunto mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos uma função $f : X \to \mathbb{C}$ [ou mesmo uma $f : X \to [-\infty, +\infty]$] mensurável. Dado $0 < p < \infty$ definimos

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, dm \right]^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty] \quad \text{e}$$

$$L^p = L^p(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty \},$$

O caso $p = \infty$. Utilizemos a notação

$$\boxed{\inf(\emptyset) = \infty.}$$

Definimos então

$$\begin{cases} \|f\|_\infty = \inf\left\{ M \geq 0 : \ |f| \leq M \text{ q.t.p.} \right\} = \inf\left\{ M \geq 0 : m(\,\{x : |f(x)| > M\}\,) = 0 \right\} \\ \\ L^\infty = L^\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty \}. \end{cases}$$

Tal ínfimo é realizado (i.e., pertence ao conjunto sobre o qual é computado) pois

$$\left\{ x : |f(x)| > M \right\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ x : |\, f(x)\,| > M + \frac{1}{n} \right\}$$

e, se $M = \|f\|_\infty < \infty$, os conjuntos à direita têm medida nula. Assim, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ q.t.p.} \quad \text{(i.e., em quase todo ponto).}$$

Chamamos o valor $\|f\|_\infty$ de **supremo essencial** de $|f|$ e também escrevemos

$$\text{ess sup}\,|f| = \text{ess}\sup_X |f| = \|f\|_\infty \,.$$

Se $\|f\|_p = 0$, então $f = 0$ q.t.p. Por tal motivo, identificamos funções em L^p que são iguais q.t.p.

Se $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é mensurável e $|f|^p$ é integrável, então f é finita q.t.p. Neste caso podemos supor $f : X \to \mathbb{R}$, uma função real. Portanto, $f \in L^p(X)$.

Notação. Se A é um conjunto arbitrário, o conjunto das partes de A é

$$\wp(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Comentário (Espaços com *l* pequeno).

- Se A é um conjunto arbitrário não vazio, definimos $l^p(A)$ como o espaço $L^p(\mu)$ onde μ é a medida de contagem sobre $\mathcal{P}(A)$. [Notemos que μ é σ-finita (vide definição em Folland [8, p.25]) se e somente se A é enumerável.]

- Se $A = \mathbb{N}$ denotamos $l^p(\mathbb{N})$ abreviadamente por l^p. Assim (cheque),

$$l^p = \Big\{ x = (x_n)_{\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{C} : \|x\|_p = \big(\textstyle\sum |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}, \text{ se } 0 < p < \infty,$$

e

$$l^\infty = \Big\{ x = (x_n)_{\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{C} : \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty \Big\} \clubsuit$$

Mostremos que o conjunto de funções L^p é um espaço linear complexo. De fato, dado $p > 0$, duas funções $f, g \in L^p$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é evidente que

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

e, no caso $p < \infty$, a desigualdade

$$(a + b)^p \le \ [2 \max(a, b)]^p \le 2^p(a^p + b^p), \text{ onde } a \ge 0 \text{ e } b \ge 0,$$

mostra que $f + g \in L^p$. O caso $p = \infty$ é trivial (cheque).

No caso $p \in [1, \infty]$ veremos (no Teorema de Minkowski) que a função $\|\,.\,\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular e define uma norma sobre L^p.

No caso $0 < p < 1$, mostramos a seguir que a função $\|\cdot\|_p$ não é uma norma. Apesar que, como já vimos acima, o espaço de funções L^p é um espaço vetorial.

Se $0 < p < 1$, é elementar verificar a desigualdade

$$(1 + t)^p < 1 + t^p, \text{ se } t > 0.$$

De fato, a função $1 + t^p - (1 + t)^p$, para $t \ge 0$, se anula em $t = 0$ e tem derivada

$$pt^{p-1} - p(1 + t)^{p-1} \ = pt^{p-1}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{p-1}\right] > 0 \text{ se } t > 0.$$

Então, dados $a > 0$ e $b > 0$ e substituindo $t = a/b$ na desigualdade verificada tem-se

$$a^p + b^p > (a+b)^p\,, \quad \text{se} \quad a > 0,\ b > 0 \text{ e } 0 < p < 1.$$

Assim, supondo E e F dois subconjuntos de X, disjuntos e de medida estritamente positiva e finita, temos

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p = \left(\,|E| + |F|\,\right)^{\frac{1}{p}} > |E|^{\frac{1}{p}} + |F|^{\frac{1}{p}} = \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p,$$

o que mostra que a função $\|\,.\,\|_p$ não é uma norma e em consequência muito da teoria desenvolvida para o caso $p \geq 1$ não se presta ao caso $0 < p < 1$. Como os espaços L^p, com $p \geq 1$, são os mais usuais em análise focamos mais sobre estes, indicando alguns resultados válidos para o caso $0 < p < 1$.

No caso $0 < p < 1$, o espaço vetorial complexo $L^p(X)$ não é normado (isto é, $\|\cdot\|_p$ não é uma norma) mas é um espaço métrico com métrica (a desigualdade triangular é fácil, cheque)

$$d(f,g) = \|f - g\|_p^p = \int |f - g|^p dm.$$

Dada $f : X \to \mathbb{C}$, temos que $f \in L^p$ (com p arbitrário em $(0,\infty]$) se e só se

$$(\mathrm{Re}\, f)^{\pm} \in L^p \quad \text{e} \quad (\mathrm{Im}\, f)^{\pm} \in L^p.$$

Definição. *Dois valores p e p' são* **expoentes conjugados** *se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ \text{onde } 1 < p\,, p' < \infty.$$

Convencionamos $p' = 1$ se $p = +\infty$ e, vice-versa, $p' = +\infty$ se $p = 1$. Assim, os valores 1 e $+\infty$ também são ditos expoentes conjugados.

Sejam os expoentes conjugados finitos ou não, vale a identidade

$$\boxed{p + p' = pp'.}$$

No que segue, a menos que dito o contrário, todas as funções são mensuráveis.

Lema (Desigualdade de Young). *Sejam $a, b \geq 0$ e um par de expoentes conjugados $p > 1$ e $p' > 1$ (i.e., ambos finitos). Então temos*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \qquad [\textit{vale a igualdade se e só se } a^p = b^{p'}].$$

Prova.

A desigualdade de Young é trivial geometricamente. Vide gráfico abaixo.

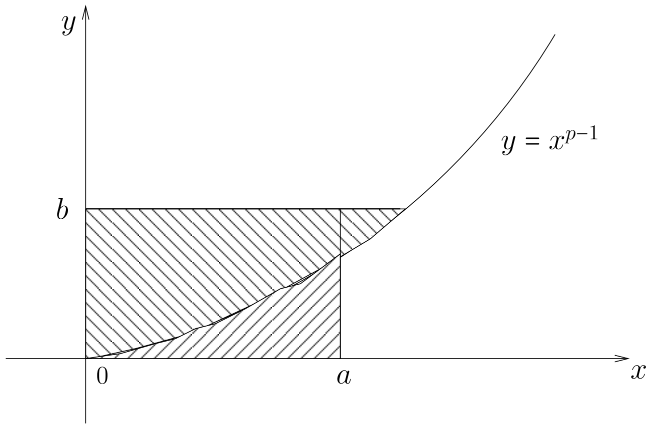

Figura 1.4: A área ab e as áreas abaixo de $y = x^{p-1}$ e de sua inversa $x = y^{p'-1}$.

Repetimos aqui a prova analítica já dada na introdução. Considerando

$$c = a^p, \; d = b^{p'} \text{ e } 0 < \lambda = \frac{1}{p} < 1$$

mostremos $c^{\lambda} d^{(1-\lambda)} \leq \lambda c + (1-\lambda)d$, com igualdade se e somente se $c = d$. O caso $d = 0$ é óbvio. Dividindo por $d \neq 0$ passamos a checar a desigualdade

$$\varphi(t) = t^{\lambda} - \lambda t \leq 1 - \lambda,$$

para $t > 0$, com igualdade se e só se $t = 1$. É claro que

$$\varphi' = \lambda t^{\lambda-1}(1 - t^{1-\lambda})$$

é estritamente positiva em $(0,1)$ com $\varphi' < 0$ em $(1, +\infty)$. Logo, $t = 1$ é o único ponto de máximo absoluto e, ainda, $\varphi(1) = 1 - \lambda$ ♣

Definição. A **função sinal** (vide figura) é definida por

$$\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|} \text{ se } z \in \mathbb{C}^* \quad \text{e} \quad \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

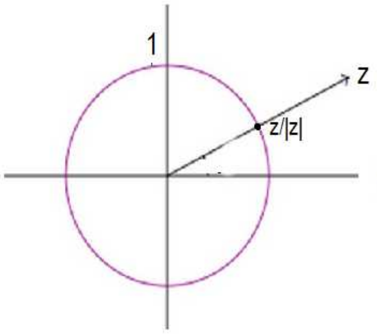

Figura 1.5: A função $\operatorname{sgn}(z)$ para $z \neq 0$.

Proposição (desigualdade triangular para integrais). *Se $f \in L^1(X)$, então*

$$\left|\int f\,dx\right| \leq \int |f|\,dx.$$

Prova.

Se f é real, temos

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

Se f é a valores complexos, consideremos o número complexo

$$\alpha = \overline{\operatorname{sgn}\Big(\int f\Big)}.$$

Se $\alpha = 0$, a desigualdade desejada é óbvia. Assim, podemos supor $\alpha \neq 0$.

Então

$$\left|\int f\right| = \alpha \int f = \int \alpha f$$

é um número real e α tem modulo 1. Portanto,

$$\left|\int f\right| = \int \operatorname{Re}(\alpha f) \leq \int |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f| \clubsuit$$

Teorema (Desigualdade de Hölder). *Sejam p e p' expoentes conjugados (finitos ou não). Dadas duas funções mensuráveis f e g (mesmo domínio), temos*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}.$$

Em particular, dadas $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ então temos $fg \in L^1$ e sob tais condições vale a igualdade na desigualdade acima se e somente

- *existem $\alpha, \beta \geq 0$, não ambos nulos, com $\alpha|f|^p = \beta|g|^{p'}$ q.tp. (p e p' finitos).*
- *$|fg| = |f| \, \|g\|_\infty$ q.t.p. ($p = 1$ e $p' = \infty$).*

Prova.

Admitamos $\|f\|_p$ e $\|g\|_{p'}$ não nulos e finitos, senão a desigualdade é óbvia.

O caso $p = 1$ (ou $p = \infty$). A desigualdade é novamente trivial, valendo a igualdade para $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$ se e somente se

$$\int (\|g\|_\infty - |g|)|f| \, dm = 0,$$

o que ocorre se e só se o integrando (o qual é maior ou igual a 0) é nulo q.t.p. Isto é, $|fg| = |f|\|g\|_\infty$ q.t.p.

O caso p e p' finitos. Pela *desigualdade de Young* (lema acima) segue

$$\int \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \, \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \, dm \leq \int \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \, dm + \int \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \, dm = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

valendo a igualdade (cheque) se e somente se

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \text{ q.t.p.} \clubsuit$$

No teorema a seguir, está implícito que as funções f e g são mensuráveis (a valores complexos) e estão definidas em um mesmo domínio (mensurável).

Teorema (Desigualdade de Minkowski). *Seja* $p \in [1,\infty]$. *Temos,*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prova.

Podemos supor $\|f\|_p$ e $\|g\|_p$ finitos e $\|f+g\|_p \neq 0$ (cheque).

O caso $p=1$ segue de $|f+g| \leq |f|+|g|$.

O caso $p=\infty$ segue de $|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ q.t.p.

Se $1<p<\infty$, as *desigualdades triangular e de Hölder* e $p'(p-1)=p$ nos dão

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| &\leq \int |f+g|^{p-1}\,|f| + \int |f+g|^{p-1}\,|g| \\ &\leq \|\,|f+g|^{p-1}\|_{p'}\,\|f\|_p \,+\, \|\,|f+g|^{p-1}\,\|_{p'}\,\|g\|_p \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}\,(\,\|f\|_p + \|g\|_p\,).\end{aligned}$$

Por fim, dividindo por $\|f+g\|_p^{p-1}$ encontramos

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \clubsuit$$

Lema. *Um espaço normado* $(V,\|\,.\,\|)$ *é completo se e somente se toda série absolutamente convergente é convergente.*

Prova.

$(\Rightarrow)$ Se V é completo e $\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\|$ é finita, então a sequência das somas parciais $s_n = v_1+\cdots+v_n$ satisfaz

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{j=n}^{j=m}\|v_j\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Logo, a sequência (s_n) é de Cauchy e portanto convergente.

$(\Leftarrow)$ Se (v_n) é uma sequência de Cauchy, sejam $n_1<n_2<\cdots$ tais que

$$\|v_n - v_m\| \leq \frac{1}{2^j}, \text{ para } m\,,n \geq n_j.$$

Definindo $w_1 = v_{n_1}$ e $w_j = v_{n_j} - v_{n_{j-1}}$, para $j>1$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = v_{n_k} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\|w_j\| \;\leq\; \|w_1\| + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} < \infty.$$

Assim, existe o limite $\lim v_{n_k} = (w_1+w_2+w_3+\cdots) \in V$. Isto é, a subsequência (v_{n_k}) converge em V e então a sequência de Cauchy (v_n) converge em V $\clubsuit$

Teorema (Completude de L^p, Fischer-Riesz). *O espaço $L^p(X)$ é de Banach, para todo $p \in [1, \infty]$.*

Prova.

Se $\|f\|_p = 0$, já vimos que $f = 0$ q.t.p. Já vimos que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p \in [1, \infty]$. Então, pela *desigualdade de Minkowski*, L^p é um espaço vetorial normado. Resta mostrar que L^p é completo.

- O caso p infinito. Se (f_n) é sequência de Cauchy em L^∞ então temos $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, exceto em Z_{nm}, com $m(Z_{nm}) = 0$. Logo, em $X \setminus \bigcup Z_{nm}$ a convergência é uniforme a uma função f limitada (cheque) e

$$f_n \xrightarrow{L^\infty} f.$$

- O caso p finito. Vejamos que toda série absolutamente convergente em L^p é convergente em L^p. Consideremos uma sequência $(f_j) \subset L^p$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_p = M < \infty$ e definamos as funções

$$G_n = |f_1| + \cdots + |f_n| \quad \text{e} \quad G = \sum |f_j|.$$

Então obtemos as desigualdades

$$\|G_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p \leq M, \ \text{para todo } n.$$

Pelo *teorema da convergência monótona* segue

$$\int G^p \, dx = \lim \int G_n^p \, dx \leq M^p.$$

Deduzimos então que $G \in L^p$ e portanto $G(x) < \infty$ q.t.p. e por conseguinte a série $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge q.t.p. É claro que $|F| \leq G \in L^p$ e também

$$\left| F - \sum_{j=1}^{n} f_j \right|^p \leq (2G)^p \in L^1.$$

Donde, pelo *teorema da convergência dominada*,

$$\left\| F - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\|_p^p = \int \left| F - \sum_{j=1}^{n} f_j \right|^p dx \xrightarrow{n \to \infty} 0 \clubsuit$$

Corolário. *Temos que $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ se e só se $f_n \xrightarrow{unif} f$ em algum Z^c com $m(Z) = 0$.*

Prova. Trivial (cheque).

Teorema (Convergência em L^p e convergência pontual). *Suponhamos que* $f_n \xrightarrow{L^p(X)} f$, *onde* $p \in [1, \infty]$. *Então, existe uma subsequência* (f_{n_j}) *tal que*

$$f_{n_j} \xrightarrow{\text{q.t.p.}} f.$$

Prova. O caso $p = \infty$ segue do corolário acima. A prova deste teorema inclui a prova do teorema anterior ($L^p(X)$ é completo). As duas provas são importantes.

- Caso $p < \infty$. Como $|f_n|^p$ é integrável, podemos supor f_n finita em todo ponto. A sequência (f_n) é de Cauchy em $L^p(X)$ [notemos o início da prova da completude] e existem índices $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que temos $\|f_n - f_m\|_p < 1/2^j$ se $n, m \geq n_j$. Donde segue

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \text{ para todo } j.$$

Consideremos

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Pela desigualdade de Minkowski segue

$$\|g_k\|_p \leq \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} < 1.$$

Então, $g_k \xrightarrow{\text{pontual}} g$ e $g_k^p \xrightarrow{\text{pontual}} g^p$. Pelo *Lema de Fatou* segue

$$\int g^p \, dx \leq 1.$$

Logo, g é finita q.t.p. Donde segue a convergência absoluta q.t.p. da série

$$F(x) = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{+\infty} [f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)]$$

e definimos $F = 0$ nos pontos de não convergência absoluta. Portanto

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \xrightarrow{\text{q.t.p.}} F.$$

Resta mostrarmos $F = f$ q.t.p. Dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ para todos $n > N$ e $m > N$. Considerando $m > N$, o *lema de Fatou* garante

$$\int |F - f_m|^p dx \leq \liminf_{i \to +\infty} \int |f_{n_i} - f_m|^p \, dx \leq \epsilon^p.$$

Logo, $F - f_m \in L^p$ e então $F \in L^p$. Ainda mais, $\|F - f_m\|_p \to 0$ [notemos o fim da prova da completude]. Logo, $F = f$ e concluímos que $f_{n_k} \xrightarrow{q.t.p.} f$ ♣

Definição. *Dizemos que f é uma* **função simples** *se f é uma combinação linear (finita) de funções características de conjuntos mensuráveis.*

Teorema (Densidade das Simples em $\mathbf{L^p}$). *Seja $p \in [1, \infty]$.*

(a) Se $p < \infty$, o conjunto das funções simples

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \text{ sob a condição } m(E_j) < \infty,$$

é denso em L^p.

(b) Se $p = \infty$, o conjunto das funções simples é denso em L^∞.

Prova.

Preparação. Escrevamos $L^p = L^p(X)$. Os conjuntos de funções citados são sub-espaços lineares do espaço linear complexo L^p. Desta forma, dada $f \in L^p$ podemos supor f real e $f \geq 0$. Seja $(\varphi_n)_{\mathbb{N}}$, com cada φ_n mensurável e simples, tal que $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente.

(a) Cada φ_n satisfaz $|\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$. Logo, $\varphi_n \in L^p$ e pelo teorema da convergência dominada $\|\varphi_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Para a representação

$$\varphi_n = \sum a_j \chi_{E_j}, \text{ com } E_{j's} \text{ disjuntos e } a_{j's} > 0,$$

temos $m(E_j) < \infty$ pois

$$\sum a_j^p m(E_j) = \int \varphi_n^p dm < \infty.$$

(b) Neste caso, a função f é limitada exceto em algum Z com $m(Z) = 0$. Logo, (φ_n) converge uniformemente a f em Z^c (cheque). Portanto

$$\varphi_n \xrightarrow{L^\infty} f \text{ sobre } X \clubsuit$$

Cubos Diádicos. A seguir, um cubo em $\mathbb{R}^n$ é um paralelepípedo fechado e limitado cujos lados tem igual comprimento. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $\mathcal{C}_k$ a coleção dos cubos cujos lados tem comprimento $1/2^k$ e cujos vértices pertencem à grade

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^k}\right)^n = \frac{\mathbb{Z}}{2^k} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{2^k}.$$

Isto é, o cubo

$$C = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \text{ pertence a } \mathcal{C}_k$$

se e somente se $2^k a_j$ e $2^k b_j$ são inteiros e

$$b_j - a_j = \frac{1}{2^k}.$$

O espaço todo é a reunião dos cubos na coleção $\mathcal{C}_k$ e tais cubos tem interiores disjuntos (i.e., "non-overlapping" ou sem sobreposição).

Os cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$, são subcubos dos cubos em $\mathcal{C}_k$ e são obtidos bisectando os lados dos cubos em $\mathcal{C}_k$.

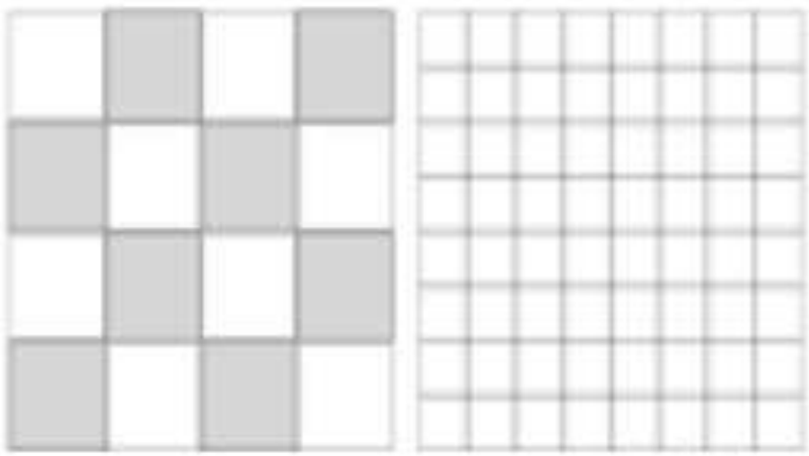

Figura 1.6: No plano cartesiano. Os dezesseis cubos (à esquerda) da coleção $\mathcal{C}_k$ geram, após bisecção, 64 cubos (sub-cubos à direita) na coleção $\mathcal{C}_{k+1}$.

A coleção dos cubos diádicos é a reunião

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k.$$

Fixado k e um cubo C em $\mathcal{C}_k$, então os cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$ ou são sub-cubos de C ou tem interior disjunto do interior de C.

Por conseguinte, dados dois cubos diádicos, ou um deles está contido no outro ou seus interiores são disjuntos.

Proposição. *Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$. Então, Ω é uma reunião enumerável de cubos diádicos com interiores dois a dois disjuntos (cubos " non-overlapping").*

Prova.

Consideremos as coleções $\mathcal{A}_k = \{C : C \in \mathcal{C}_k \text{ e } C \subset \Omega\}$. Seja $S_0 = \mathcal{A}_0$. Dado $j \geq 1$, seja S_j a coleção dos cubos em $\mathcal{A}_j$ que não são subcubos de nenhum cubo em $S_0 \cup \cdots \cup S_{j-1}$. Um cubo qualquer em $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, não é subcubo de um outro cubo em S. Logo, os cubos em S tem interiores disjuntos. Dado $x \in \Omega$, existe o menor k tal que $x \in \mathcal{A}_k$. Assim, x está em um cubo de S_k♣

Teorema (Separabilidade de $\mathbf{L}^p(X)$, onde X é um conjunto mensurável). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e seja $p \in [1, \infty)$. Então, $L^p(X)$ é separável.*

Prova.

- Suponhamos inicialmente $X = \mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de *cubos diádicos* em $\mathbb{R}^n$. Vejamos que

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^{k} z_j \chi_{I_j} \; : \; I_j \in \mathcal{C}, z_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ e } k \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) É fácil ver que $\overline{D}$ é um sub-espaço vetorial complexo de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Se $f_k \xrightarrow{q.t.p.} f$ e $|f_k| \leq \psi \in L^p$, então $\|f_k - f\|_p \to 0$. Isto segue de $|f_k - f|^p \xrightarrow{q.t.p.} 0$ e $|f_k - f|^p \leq (|f_k| + |f|)^p \leq (2\psi)^p$ e do teorema da convergência dominada.

(c) Se O é aberto e $m(O) < \infty$, então $\chi_O \in \overline{D}$. Pois, decompondo $O = \bigcup I_j$, com os $I_{j's}$ cubos diádicos de interiores disjuntos, temos

$$\chi_O = \sum \chi_{I_j} \text{ q.t.p.}$$

já que a união dos lados de tais cubos tem medida nula. Ainda mais,

$$D \ni \varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \chi_{I_j} \xrightarrow{q.t.p.} \chi_O \quad \text{e} \quad |\varphi_k| \leq \chi_O \in L^p.$$

Donde, por (b) segue $\varphi_k \xrightarrow{L^p} \chi_O$.

(d) Se G é um G_δ e $m(G) < \infty$, então $\chi_G \in \overline{D}$. De fato, seja (O_k) uma sequência de abertos decrescente a G, com $m(O_1) < \infty$. Então segue

$$\chi_{O_k} \xrightarrow{s} \chi_G \;\text{ e }\; 0 \leq \chi_{O_k} \leq \chi_{O_1} \in L^p.$$

Donde, por (b) segue

$$\chi_{O_k} \xrightarrow{L^p} \chi_G$$

e então por (c) segue $\chi_G \in \overline{D}$.

(e) Se $m(A) < \infty$ então $\chi_A \in \overline{D}$. Pois, existe $G \in G_\delta$ com $m(G) < \infty$, tal que $A = G \setminus N$ e $m(N) = 0$ e então $\chi_A = \chi_G$ q.t.p. A afirmação segue por (d).

Pelos itens (a) e (e), as combinações lineares de funções características de subconjuntos mensuráveis de medida finita pertencem a $\overline{D}$. A densidade das funções simples em L^p no caso p finito [teorema imediatamente anterior (a)] garante

$$\overline{D} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

Fim do caso $X = \mathbb{R}^n$.

◇ Para encerrar, seja X um subconjunto mensurável arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Vejamos que o conjunto enumerável

$$\left\{\varphi|_X : \varphi \in D\right\}$$

é denso em $L^p(X)$. De fato, dada $f \in L^p(X)$, a função f_1 definida por

$$f_1 = f \text{ em } X \;\text{ e }\; f_1 = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus X$$

pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ e assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in D$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1 - \varphi|^p dx < \epsilon$$

donde então segue

$$\int_X |f - \varphi|^p dx < \epsilon \clubsuit$$

Corolário (Separabilidade para $\mathbf{L}^p(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $p \in [1,\infty)$. Então, o conjunto de funções*

$$D_\Omega = \left\{ \sum_{j=1}^{k} z_j \chi_{I_j}, \ \text{com } I_j \text{ um cubo diádico dentro de } \Omega, \ z_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ e } k \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $L^p(\Omega)$.

Prova.

Mantenhamos a notação no teorema e em sua prova. Por esta segue que

$$\left\{ \varphi\Big|_\Omega : \varphi \in D \right\}$$

é denso em $L^p(\Omega)$. Fixemos uma função

$$\varphi\Big|_\Omega = \sum_{j=1}^{k} z_j \chi_{I_j}\Big|_\Omega = \sum_{j=1}^{k} z_j \chi_{I_j \cap \Omega}, \ \text{onde } I_j \text{ é cubo diádico}, z_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Basta então mostrar que dado um arbitrário cubo diádico I, a função $\chi_{I\cap\Omega}$ é L^p-aproximável por funções em D_Ω.

Seja $J = \text{int}(I)$ o interior de I. Então, J é um cubo aberto e temos a igualdade $\chi_{I\cap\Omega} = \chi_{J\cap\Omega}$ quase sempre.

◇ Logo, basta mostrarmos que $\chi_{J\cap\Omega}$ é L^p-aproximável por funções em D_Ω.

Notemos que $J \cap \Omega$ é aberto em Ω. Assim, pela última proposição provada acima, $J\cap\Omega$ é uma reunião enumerável de cubos diádicos, $J_1, J_2, \ldots$, contidos em Ω e com interiores dois a dois disjuntos. Donde segue

$$\chi_{J\cap\Omega} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{J_k}.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \chi_{J_k} - \chi_{J\cap\Omega} \right\|_p = 0 \clubsuit$$

Definição. *Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. O* **suporte** *de f é*

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \ \ [\text{o menor fechado de}\, \Omega \text{ que contém } f^{-1}(\mathbb{C}^*)].$$

O espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínuas e de suporte compacto em Ω é

$$C_c(\Omega) = \{ f \in C(\Omega) : \ supp(f) \text{ é um compacto contido em } \Omega \}.$$

Corolário (Densidade de $C_c(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$). *Consideremos $1 \le p < \infty$ e um aberto Ω contido em $\mathbb{R}^n$. Então, $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*
Prova. Seja $f \in L^p(\Omega)$

- Já vimos que existe uma sequência de funções da forma $\sum_{j=1}^{k} z_j \chi_{I_j}$ com cada I_j um cubo diádico em Ω e cada $z_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, que se aproxima de f em L^p.

- Basta então mostrar dado um cubo diádico I contido em Ω e um $\epsilon > 0$, então existe uma função $g \in C_c(\Omega)$ tal que $\|g - \chi_I\|_p < \epsilon$.

  Vejamos. Com $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, consideremos a função trapézio

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \le a_1 \text{ ou } t \ge b_1, \\ 1, \text{ se } a_1 + \epsilon \le t \le b_1 - \epsilon, \\ \text{linear no complementar.} \end{cases}$$

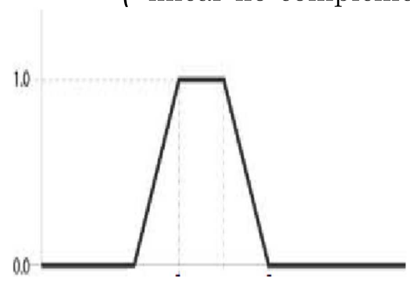

Figura 1.7: A "função trapezoidal" g_1.

Logo,

$$\int |\chi_{[a_1,b_1]} - g_1|^p dt \le 2\epsilon.$$

Sejam $g_2, \ldots, g_n$ análogas. Seja $g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n) \in C_c(\Omega)$.

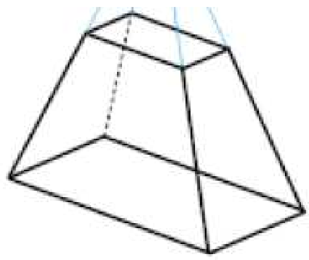

Figura 1.8: Parte do gráfico de $g(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$ no caso $n = 2$.

Notemos que $\chi_I(x) = \chi_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{[a_1,b_1]}(x_1) \cdots \chi_{[a_n,b_n]}(x_n)$.
É trivial ver que (cheque)

$$\int |g - \chi_I|^p dx \le \frac{2\epsilon \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)}{b_1 - a_1} + \cdots + \frac{2\epsilon \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)}{b_n - a_n} \clubsuit$$

Teorema [Continuidade da translação em L^p (Kolmogorov - M. Riesz - Fréchet)]. *Sejam $p \in (0,\infty)$ e $f = f(x)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, na variável x. Então,*

$$\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0.$$

Prova.

- O caso $p \in [1,\infty)$. Seja h arbitrário em $\mathbb{R}^n$. Seja

  $$V = V_p = \{f \in L^p : \|f(x+h) - f(x)\|_p \to 0 \text{ se } h \to 0\}.$$

  Pela desigualdade de Minkowski é claro que V é subespaço linear de L^p. É fácil ver que V é fechado. De fato, se $(f_j) \subset V$ e $f_j \xrightarrow{L^p} f$, então

  $$\|f(x+h)-f(x)\|_p \le \|f(x+h)-f_j(x+h)\|_p+\|f_j(x+h)-f_j(x)\|_p+\|f_j(x)-f(x)\|_p$$
  $$= \|f_j(x+h) - f_j(x)\|_p + 2\|f_j - f\|_p.$$

  Logo, fixando f_j e impondo $h \to 0$ encontramos

  $$\limsup_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p \le 2\|f_j - f\|_p$$

  e então, para $j \to \infty$, obtemos $\|f(x+h) - f(x)\|_p \longrightarrow 0$ se $h \to 0$.

  Evidentemente as funções características de cubos pertencem a V [de fato, $\chi_{Q+h}(x) = \chi_Q(x-h) \xrightarrow{q.t.p.} \chi_Q(x)$]. O espaço vetorial gerado por tais funções é denso em L^p (Teorema de Separabilidade, já provado) e concluímos $V = L^p$.

- O caso $0 < p < 1$. **Esboço da prova.** Complete os detalhes.

  1. No caso $p \in (0,1)$, como já visto, $\|\cdot\|_p$ não é norma. Entretanto $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e também um espaço métrico, com métrica

     $$d(f,g) = \|f - g\|_p^p = \int |f - g|^p dm.$$

  2. Adapte a prova do caso $1 < p < \infty$. O espaço vetorial gerado pelas características de conjuntos de medida finita (ou cubos diádicos) é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.
  3. Mostre que a afirmação é válida para as funções características já citadas e estenda o resultado a $L^p(\mathbb{R}^n)$, por densidade e continuidade ♣

Comentário. Comparada à hipótese de "equicontinuidade" no teorema de Ascoli–Arzelá [seção 3.9], a hipótese no teorema acima é de "equicontinuidade integral".

1.4 Desigualdades e Interpolações Básicas

Como regra geral temos $L^p \not\subset L^q$ para $p \neq q$.

Exemplos. *Consideremos, em* $(0,\infty)$, *a medida de Lebesgue e a função*

$$f(x) = \frac{1}{x^\lambda}, \text{ com } x \in (0,\infty) \text{ e } \lambda > 0.$$

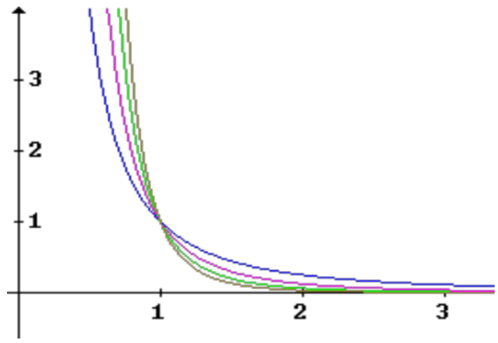

Figura 1.9: Gráficos para $\frac{1}{x^\lambda}$, com $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ e $\lambda > 1$.

As seguintes afirmações são verdadeiras.

- $f \in L^p((0,1))$ *se e somente se* $p < \frac{1}{\lambda}$.
- $f \in L^p((1,\infty))$ *se e somente se* $p > \frac{1}{\lambda}$.

Importante. Tais exemplos evidenciam duas razões para f não pertencer a L^p.

Primeiro, $|f|^p$ pode ir ao infinito muito rapidamente próximo a algum ponto. Segundo, $|f|^p$ pode não decair suficientemente rápido a zero no infinito.

Na primeira situação o comportamento de $|f|^p$ piora quando p cresce ao passo que na segunda situação tal comportamento melhora. Em outras palavras, se $p < q$, as funções em L^p podem ser localmente mais singulares que as funções em L^q (dito de outra forma, a exigência para f pertencer a L^q é maior que a exigência para f pertencer a L^p), ao passo que as funções em L^q podem ser globalmente mais esparramadas que as funções em L^p. Tais interpretações, expressas de forma ingênua, fornecem um guia razoável para a situação geral. Apoiados em tais idéias vejamos quatro resultados específicos. Os dois últimos resultados mostram que inclusões $L^p \subset L^q$ podem ser obtidas impondo condições sobre o espaço de medida que evitam um ou outro dos mal comportamentos descritos. Para um resultado mais geral, vide *Real Analysis*, G. B. Folland, Exercício 5, 6.1.

Proposição (Interpolação e soma). *Suponhamos* $0 < p \leq q \leq r \leq \infty$. *Então,*

$$L^q \subset L^p + L^r.$$

Prova. Dada $f \in L^q$, seja $E = \{x : |f(x)| > 1\}$. Então

$$\begin{cases} f\chi_E \in L^p \ \text{ e } \ f\chi_{E^c} \in L^r \\ \text{e} \\ f = f\chi_E + f\chi_{E^c} \clubsuit \end{cases}$$

Teorema (Interpolação e intersecção). *Suponhamos* $0 < p \leq q \leq r \leq \infty$. *Então temos*

$$L^p \cap L^r \subset L^q.$$

Ainda mais, dado $\lambda \in [0,1]$ *tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r},$$

temos

$$\|f\|_q \leq \ \|f\|_p^{\lambda} \ \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Prova.

- ⋄ Caso $r = \infty$, com p e q finitos. Encontramos $|f|^q = |f|^p\,|f|^{q-p} \leq |f|^p\,\|f\|_\infty^{q-p}$ que integrando acarreta

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^p \ \|f\|_\infty^{q-p}.$$

Donde segue, com $\lambda = p/q$, a desigualdade $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda}\|f\|_\infty^{1-\lambda}$.

- ⋄ Caso $r = q = \infty$. Trivial (cheque).

- ⋄ Caso $r < \infty$. Escrevendo $|f|^q = |f|^{\lambda q}|f|^{(1-\lambda)q}$ e aplicando a *desigualdade de Hölder* com o par de expoentes conjugados

$$\frac{p}{\lambda q} \ \text{ e } \ \frac{r}{(1-\lambda)q}, \text{ segue}$$

$$\int |f|^q dx \leq \|\,|f|^{\lambda q}\,\|_{\frac{p}{\lambda q}} \ \|\,|f|^{(1-\lambda)q}\,\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} = \|f\|_p^{\lambda q} \ \|f\|_r^{(1-\lambda)q}.$$

Por fim, extraindo a raiz q-ésima encerramos a prova$\clubsuit$

Corolário (Interpolando intersecção e soma). *Seja* $0 < p \leq q \leq r \leq \infty$. *Então,*

$$L^p \cap L^r \subset L^q \subset L^p + L^r.$$

Definição. Sejam J um arbitrário conjunto de índices e $(x_J)_J$ uma família de termos positivos e indexada em J. A **soma da família** (x_j) é

$$\sum_J x_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} x_j : F \text{ é subconjunto finito de } J\right\}.$$

Comentário (Espaços l^p, com l pequeno). *Seja A um conjunto de índices. Seja $f : A \to \mathbb{R}$. Dado $0 < p < \infty$, definimos*

$$\|f\|_p = \left(\sum_{a\in A} |f(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad l^p(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_p < \infty\}.$$

No caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_A |f(a)| \quad e \quad l^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Suponhamos $0 < p < q \le \infty$. Dado um conjunto A temos

$$l^p(A) \subset l^q(A) \quad e \quad \|f\|_q \le \|f\|_p.$$

Verificação. [Se A é não contável, a medida de contagem em A não é σ-finita. Então, não podemos aplicar de imediato teoremas clássicos da teoria da medida.]

- ◇ Caso $q = \infty$. É claro que

$$\|f\|_\infty^p = \sup_A |f(a)|^p \le \sum_A |f(a)|^p.$$

Logo, $\|f\|_\infty \le \|f\|_p$.

- ◇ Caso $q < \infty$. Segue do teorema acima, para uma família finita e com $r = \infty$ e $\lambda = p/q$. Dado um conjunto finito de índices $F \subset A$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_F |f(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\le \left[\left(\sum_F |f(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \left(\sup_F |f(a)|\right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &\le \left[\left(\sum_F |f(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \left[\left(\sum_F |f(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{1-\frac{p}{q}} \\ &= \left(\sum_F |f(a)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|f\|_p.\end{aligned}$$

Logo, variando o conjunto finito $F \subset A$ e computando o sup segue

$$\|f\|q \le \|f\|_p \clubsuit$$

Teorema (A inclusão $L^q \subset L^p$). *Suponhamos $0 < p < q \leq \infty$ e $m(X) < \infty$. Então,*

$$L^p \supset L^q \quad e \quad m(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq m(X)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Prova. [Notemos que então

$$\Phi(p) = m(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

é uma função crescente.]

- $\diamond$ Caso $q = \infty$. Trivial, pois

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p dm \leq \|f\|_\infty^p m(X).$$

- $\diamond$ Caso $q < \infty$. Utilizando a *desigualdade de Hölder* encontramos

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \cdot 1\, dx \leq \||f|^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_{\frac{1}{1-\frac{p}{q}}} = \left(\|f\|_q^q\right)^{\frac{p}{q}} |X|^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_q^p |X|^{1-\frac{p}{q}} \clubsuit$$

Comentário. Os três espaços L^p mais obviamente importantes são

$$L^1,\ L^2 \text{ e } L^\infty.$$

Com o espaço L^1 já estamos familiarizados.

O espaço L^2 é especial por ser um espaço de Hilbert.

A topologia de L^∞ é muito próxima da topologia da convergência uniforme. Infelizmente, L^1 e L^∞ são patológicos em muitos aspectos e é mais frutificante lidar com espaços L^p intermediários. Uma ilustração para tais comentários é que muitos operadores de interesse em equações diferenciais são limitados sobre L^p para $1 < p < \infty$ mas não sobre L^1 ou sobre L^∞.

O teorema que segue é útil para estudar a norma $\|\cdot\|_p$ como uma função de p.

Definição. *Uma função $\varphi : I \longrightarrow (0,+\infty)$, onde I é um intervalo na reta, é* **logarítmica convexa** *ou* **super convexa** *se a composição $\log\circ\varphi$ é convexa. [A função logaritmo reduz drasticamente a taxa de crescimento da função φ, portanto se a função $\log\circ\varphi$ ainda mantém a propriedade convexa então deve ocorrer que a função φ é "muito convexa", donde então a terminologia "super convexa".]*

Teorema (A função convexa $p \mapsto \|f\|_p^p$). *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável com $f \neq 0$ (isto é, $\|f\|_\infty > 0$). Definamos*

$$\varphi(p) = \int |f|^p\,dx = \|f\|_p^p \quad (0 < p < \infty) \quad e \quad I = \{p : \varphi(p) < \infty\}.$$

Verifique as propriedades abaixo.

(a) *I é um intervalo. Isto é, se $r \in I$ e $s \in I$ e $r < p < s$ então $p \in I$.*

(b) *φ e $\log\varphi$ são convexas no interior de I e contínuas em I.*

(c) *Se $r < p < s$, então*

$$\|f\|_p \leq \max\left(\|f\|_r, \|f\|_s\right) \quad e \quad L^r \cap L^s \subset L^p.$$

(d) *Se $\|f\|_r < \infty$ para algum $r < \infty$ então,*

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Prova.

(a) Segue imediatamente da desigualdade (já provada)

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^\lambda \|f\|_s^{1-\lambda}, \text{ onde } \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s}.$$

(b) Pela prova de (a) segue

$$\varphi(p) \leq \varphi(r)^{\frac{\lambda p}{r}} \varphi(s)^{\frac{(1-\lambda)p}{s}}.$$

Donde segue

$$\log\varphi(p) \leq \frac{\lambda p}{r}\log\varphi(r) + \frac{(1-\lambda)p}{s}\log\varphi(s), \quad \text{com} \quad p = \frac{\lambda p}{r} + \frac{(1-\lambda)p}{s}.$$

Isto mostra que $\log\circ\varphi$ é convexa. Assim, $\varphi = \exp\circ\log\circ\varphi$ é convexa. Já vimos que toda função convexa é contínua.

(c) Com a notação na prova de (a), é trivial ver que

$$\|f\|_p \le \|f\|_r^{\lambda}\|f\|_s^{1-\lambda} \le \max\big(\|f\|_r, \|f\|_s\big).$$

(d) ◇ Caso $\|f\|_\infty = +\infty$.

Então, todo $Y_n = \{x : |f(x)| > n\}$ tem medida $|Y_n| > 0$. Notemos que

$$Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots.$$

Para todo $p > 0$ temos

$$\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \ge n^p |Y_n| \quad \text{e} \quad \|f\|_p \ge n\sqrt[p]{|Y_n|}.$$

Se $|Y_n| = \infty$ para algum n, então temos $\|f\|_p = \infty$ para todo p. Caso contrário, temos

$$\liminf \|f\|_p \ \ge\ n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

◇ Caso $0 < \|f\|_\infty < \infty$.

Sejam $r < \infty$, com $\|f\|_r < \infty$, e M tal que $0 < M < \|f\|_\infty$. Então,

$$Y = \{x : |f(x)| > M\}$$

tem medida $|Y|$ maior que zero e

$$M^p\,|Y| \le \int_X |f|^p\, dx = \|f\|_p^p.$$

Ainda,

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \le 1$$

e para $p \ge r$ temos

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty}\right)^p \le \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty}\right)^r = \frac{|f(x)|^r}{\|f\|_\infty^r}.$$

Logo, $f \in L^p(X)$. Ainda mais, temos

$$M\sqrt[p]{|Y|}\ \le \|f\|_p\ \le\ \|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_r^r}{\|f\|_\infty^r}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donde obtemos

$$M\ \le\ \liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p\ \le\ \limsup_{p\to+\infty}\|f\|_p\ \le\ \|f\|_\infty, \quad \text{se}\ \ 0 < M < \|f\|_\infty.$$

Concluímos então que vale a identidade

$$\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty \ ♣$$

Corolário. *Mantidas as hipóteses no teorema, suponhamos* $|X| < \infty$. *Então,*

$$\Phi(p) = \left(\frac{1}{|X|}\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = |X|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$$

é uma função crescente e logarítmica convexa em $1/p$. *Isto é,*

$$\text{se } \; r < p < s \; \text{ e } \; \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s},$$

então temos

$$\log \Phi_p(f) \leq \lambda \log \Phi_r(f) + (1-\lambda)\log \Phi_s(f).$$

Prova.

- ◇ Já vimos que Φ é crescente em $(0, +\infty]$.

- ◇ Segue da desigualdade (já provada)

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^{\lambda}\|f\|_s^{1-\lambda}.$$

Por esta, temos

$$|X|^{\frac{1}{p}}\Phi_p(f) \leq |X|^{\frac{\lambda}{r}}\Phi_r(f)^{\lambda}|X|^{\frac{1-\lambda}{s}}\Phi_s(f)^{1-\lambda}.$$

Donde segue

$$\Phi_p(f) \leq \Phi_r(f)^{\lambda}\Phi_s(f)^{1-\lambda}$$

e então a desigualdade desejada♣

Lema (Desigualdade Elementar de Interpolação). *Sejam* p *e* q *expoentes conjugados finitos. Sejam* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$. *Seja* $\epsilon > 0$. *Então, temos*

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{\epsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q} \leq \epsilon a^p + \epsilon^{-\frac{q}{p}}b^q.$$

Prova.

Segue da desigualdade de Young com

$$A = \epsilon^{\frac{1}{p}}a \;\text{ e }\; B = \epsilon^{-\frac{1}{p}}b\,♣$$

Proposição (Desigualdade Básica de Interpolação para Espaços L^p). *Suponhamos $1 \le p \le q < r$. Temos,*

$$\|f\|_q \le \epsilon \|f\|_r + \epsilon^{-\mu} \|f\|_p, \quad \textit{onde } \mu = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}.$$

Prova.

Já verificamos a desigualdade

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}, \quad \text{onde } \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \text{ e } \lambda \in [0,1].$$

Pelo *lema elementar de interpolação* (imediatamente acima) segue

$$\|f\|_r^{1-\lambda} \|f\|_p^{\lambda} \le \epsilon \Big(\|f\|_r^{1-\lambda} \Big)^{\frac{1}{1-\lambda}} + \epsilon^{-\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{1-\lambda}}} \Big(\|f\|_p^{\lambda} \Big)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \epsilon \|f\|_r + \epsilon^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} \|f\|_p.$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1-\lambda}{\lambda} &= \lambda^{-1} - 1 \\ &= \left(\frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right)^{-1} - 1 \\ &= \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} - 1 \\ &= \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \clubsuit \end{aligned}$$

Desigualdade de Hölder Generalizada. *Sejam* $0 < p_1, \ldots, p_m, r \leq \infty$ *tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}.$$

Sejam $f_1, \ldots, f_m$ *funções mensuráveis. Então,*

$$\|f_1 \cdots f_m\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_m\|_{p_m}.$$

Prova.

- ◇ A afirmação é óbvia se $r = \infty$.

- ◇ O caso $r = 1$. A afirmação é óbvia se $m = 1$ e conhecida para $m = 2$.

  Supondo a afirmação válida para $m-1$ e provemo-la para m. Temos

  $$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{m-1}} = \frac{1}{p'_m}, \text{ com } p'_m \text{ o conjugado de } p_m.$$

  Se $p'_m = \infty$, então $p_m = 1$ e claramente $\|f_1 \cdots f_m\|_1 \leq \|f_1\|_\infty \cdots \|f_{m-1}\|_\infty \|f_m\|_1$.

  Se p'_m é finito, temos

  $$\frac{p'_m}{p_1} + \cdots + \frac{p'_m}{p_{m-1}} = p'_m\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = 1.$$

  Por hipótese de indução segue

  $$\Big\| |f_1|^{p'_m} \ldots |f_{m-1}|^{p'_m} \Big\|_1 \leq \Big\||f_1|^{p'_m}\Big\|_{\frac{p_1}{p'_m}} \cdots \Big\||f_{m-1}|^{p'_m}\Big\|_{\frac{p_{m-1}}{p'_m}} = \|f_1\|_{p_1}^{p'_m} \ldots \|f_{m-1}\|_{p_{m-1}}^{p'_m}.$$

  Isto é, $\|f_1 \cdots f_{m-1}\|_{p'_m} \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{m-1}\|_{p_{m-1}}$.

  A *desigualdade de Hölder* para a função $(f_1 f_2 \ldots f_{m-1})$ e a função f_m mostra

  $$\|(f_1 \cdots f_{m-1}) f_m\|_1 \leq \|f_1 \cdots f_{m-1}\|_{p'_m} \|f_m\|_{p_m} \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{m-1}\|_{p_{m-1}} \|f_m\|_{p_m}.$$

- ◇ O caso $r \notin \{1, \infty\}$. Temos

  $$\frac{1}{\frac{p_1}{r}} + \cdots + \frac{1}{\frac{p_m}{r}} = 1.$$

  Logo,

  $$\|f_1 \cdots f_m\|_r^r = \|\, |f_1|^r \cdots |f_m|^r \,\|_1 \leq \Big\| \, |f_1|^r \, \Big\|_{\frac{p_1}{r}} \cdots \Big\| \, |f_m|^r \, \Big\|_{\frac{p_m}{r}} = \|f_1\|_{p_1}^r \cdots \|f_m\|_{p_m}^r \; ♣$$

Corolário. *Se* $r = 1$ *e* $p_1 = \cdots = p_m = m$ *e, ainda,* $f_1 \geq 0, \ldots, f_m \geq 0$, *obtemos*

$$\int f_1^{\frac{1}{m}} f_2^{\frac{1}{m}} \cdots f_m^{\frac{1}{m}}\, dx \leq \left(\int f_1\, dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int f_2\, dx\right)^{\frac{1}{m}} \ldots \left(\int f_m\, dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

1.5 O dual de L^p

Seja $(V, |\cdot|)$ um espaço vetorial complexo e normado. Dizemos que um funcional linear $T : V \to \mathbb{C}$ é *contínuo*, ou *limitado*, se (cheque a boa definição)

$$\|T\| = \sup\left\{|T(v)| : |v| \le 1\right\} = \sup\{|Tv| : |v| = 1\} < \infty.$$

O espaço **dual** de V é espaço vetorial complexo

$$V^* = \{F : V \to \mathbb{C} \text{ tal que } F \text{ é linear e contínuo}\}.$$

É trivial verificar que V^* é normado e que $F \mapsto \|F\|$ define uma norma sobre V^*.

Dados dois espaços vetoriais normados V e W, uma **isometria** $T : V \to W$ é uma aplicação linear tal que $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$. Assim, uma isometria é necessariamente injetora mas não necessariamente sobrejetora.

Sejam p e q expoentes conjugados. Pela desigualdade de Hölder, a cada $g \in L^q$ corresponde um funcional linear contínuo Φ_g definido sobre L^p pela expressão

$$\Phi_g(f) = \int fg d\mu,$$

e que a norma do funcional

$$\Phi_g : L^p \longrightarrow \mathbb{C}$$

é no máximo $\|g\|_q$ [no caso específico $p = 2$, é bastante fácil ver que L^2 é um espaço normado completo munido de produto interno - isto é, um espaço de Hilbert - e então é mais apropriado definir

$$\Phi_g(f) = \int f\overline{g}d\mu].$$

De fato, como vemos a seguir, é trivial provar que é uma isometria a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L^q & \longrightarrow & (L^p)^* \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

de L^q em $(L^p)^*$. Porém, não é trivial ver que tal isometria é sobrejetora.

Observação. A medida de Lebesgue é **semi-finita**. Isto é, se $m(E) = \infty$ então existe

$$F \subset E \text{ tal que } 0 < m(F) < \infty \quad \text{(cheque)}.$$

Teorema (A norma do funcional Φ_g, no dual de L^p, e a isometria Φ). *Sejam p e q expoentes conjugados e uma função $g \in L^q(X)$. Seja*

$$\Phi_g : L^p \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \text{onde } \Phi_g(f) = \int gf\,dx \text{ se } f \in L^p.$$

As seguintes propriedades são verdadeiras.

- *O funcional Φ_g é linear contínuo (i.e., $\Phi_g \in (L^p)^*$). A aplicação*

$$\Phi : L^q \to (L^p)^*, \ \text{onde } \Phi(g) = \Phi_g,$$

  é uma isometria e

$$\|g\|_q = \|\Phi_g\| = \sup\left\{\left|\int fg\,dx\right| : \|f\|_p = 1\right\}.$$

- **Teorema de Representação de Riesz.** *Se p é finito, Φ é bijetora.*

- *Se $g \in L^q$, com q finito, então existe f com $\|f\|_p = 1$ e satisfazendo*

$$\|\Phi_g\| = \int fg\,dx \ \text{ e } fg \text{ real.}$$

- *Se $g \in L^\infty$, então*

$$\|\Phi_g\| = \sup_{\|f\|_1 = 1}\left\{\int fg\,dx : \ fg \text{ é real}\right\}.$$

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

◇ A igualdade $\|\Phi_g\| = \sup\{|\cdots| : \|f\|_p = 1\}$ é a definição da norma $\|\Phi_g\|$.

◇ A *desigualdade de Hölder* garante $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$.

◇ A igualdade $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ é óbvia se $g = 0$ (q.t.p.) e podemos supor $g \neq 0$.

◇ Caso $q < \infty$. Podemos assumir que g é finita em todo ponto (pois $g \in L^q$).

◇ Sub-caso $q = 1$. Definindo $f = \overline{\operatorname{sgn}(g)}$ temos $\|f\|_\infty = 1$ e $fg = |g|$ real. Ainda,

$$\|\Phi_g\| \geq \int fg = \|g\|_1 \geq \|\Phi_g\|.$$

◇ Sub-caso $1 < q < \infty$. Definindo

$$g^* = \frac{|g|^{q-1}\overline{\operatorname{sgn}(g)}}{\|g\|_q^{q-1}} \qquad (\textbf{a conjugada} \text{ de } g \text{ em } L^q)$$

obtemos g^*g real e, ainda,

$$\|g^*\|_p^p = \frac{\int |g|^{p(q-1)}}{\|g\|_q^{p(q-1)}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = 1 \quad \text{e} \quad \|\Phi_g\| \geq \int g^*g = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q \geq \|\Phi_g\|.$$

◇ Caso $q = \infty$. Consideremos

$$A = \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \epsilon\} \quad \text{e} \quad B \subset A \text{ com } 0 < m(B) < \infty.$$

Então, a função

$$f = \frac{\chi_B \overline{\operatorname{sgn}(g)}}{m(B)}$$

satisfaz

$$fg \text{ real}, \quad \|f\|_1 = 1 \quad \text{e} \quad \|\Phi_g\| \geq \int fg = \frac{\int_B |g|}{m(B)} \geq \|g\|_\infty - \epsilon.$$

◇ Para a sobrejetividade de Φ, provada via *teorema de Radon-Nikodym*, vide Folland [8] ou `http://www.ime.usp.br/~oliveira/MEDIDACAP4-2016.pdf`. Vide prova elementar (isto é, utilizando tão somente a medida de Lebesgue n-dimensional) em Adams [1, pp. 45–47]♣

Se g é tal que o funcional linear integral

$$\Phi_g(f) = \int fg\,dx, \text{ onde } f \in L^p,$$

é contínuo, então $g \in L^q$ (cheque). Mostremos uma versão (mais forte) de tal propriedade. O corolário a seguir é bastante prático.

Corolário (Reverso da Desigualdade de Hölder). *Sejam $g : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Seja q o expoente conjugado de p. Então,*

$$(a) \qquad \|g\|_p = \sup_{\|f\|_q = 1} \left\{ \int gf dx < \infty : fg \text{ é real} \right\} = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left\{ \int gf dx < \infty : fg \text{ é real} \right\}.$$

Também vale (o enunciado usual)

$$(b) \qquad \|g\|_p = \sup_{\|f\|_q = 1} \left\{ \left| \int gf dx \right| < \infty \right\} = \sup_{\|f\|_q \leq 1} \left\{ \left| \int gf dx \right| < \infty \right\}.$$

Prova.

(a) A igualdade dos supremos é trivial (cheque).

◇ O caso $\|g\|_p < \infty$. Pelo teorema segue (seja p infinito ou finito) a igualdade

$$\|g\|_p = \|\Phi_g\| = \sup_{\|f\|_q = 1} \left\{ \int fg < \infty : fg \text{ real} \right\}.$$

◇ O caso $\|g\|_p = \infty$. Neste caso, notemos que

$$\begin{cases} \text{dada } f, \text{ temos } gf = |g|h \text{ onde } h = f\,\mathrm{sgn}(g) \text{ e } \|h\|_q \leq \|f\|_q, \\ \\ \text{dada } h, \text{ temos } |g|h = gf \text{ onde } f = h\,\overline{\mathrm{sgn}(g)} \text{ e } \|f\|_q \leq \|h\|_q. \end{cases}$$

Donde segue

$$\sup_{\|f\|_q \leq 1} \left\{ \int gf < \infty : gf \text{ é real} \right\} = \sup_{\|h\|_q \leq 1} \left\{ \int |g|h < \infty : |g|h \text{ é real} \right\}.$$

Logo, podemos supor $g \geq 0$.

◇ O sub-caso $1 \leq p < \infty$. Definamos a sequência de funções positivas

$$g_k(x) = \begin{cases} \min(g(x), k) & \text{se } |x| \leq k, \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq k. \end{cases}$$

Logo, $g_k \nearrow g$ e $g_k \in L^p$ (cheque). Pelo *teorema da convergência monótona* segue

$$\|g_k\|_p \to \|g\|_p = \infty.$$

O teorema "a norma do funcional Φ_g e a isometria Φ" (para p finito) garante existir $f_k \geq 0$ tal que

$$\|f_k\|_q = 1 \text{ e } \int_X f_k g_k = \|\Phi_{g_k}\| = \|g_k\|_p.$$

Donde segue

$$\sup_{\|f\|_q=1} \left\{ \int_X fg < \infty : fg \text{ é real} \right\} \geq \int_X f_k g \geq \int_X f_k g_k = \|g_k\|_p \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty.$$

◇ O sub-caso $p = \infty$. A hipótese $\|g\|_\infty = \infty$ garante (para k grande o suficiente)

$$E_k \subset \left\{ x : g(x) > k \right\} \text{ tal que } 0 < m(E_k) < \infty.$$

Definindo

$$f_k = \frac{\chi_{E_k}}{m(E_k)}$$

segue

$$\|f_k\|_1 = 1 \text{ e } \int_X g f_k \geq k \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty.$$

(b) Pelo item (a), segue de

$$\begin{aligned}
\|g\|_p &= \sup_{\|f\|_q=1} \left\{ \int_X gf dx < \infty : fg \text{ é real} \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_q=1} \left\{ \left| \int_X gf dx \right| < \infty \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_q\leq 1} \left\{ \left| \int_X gf dx \right| < \infty \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_q\leq 1} \left\{ \|g\|_q \right\} \\
&= \|g\|_p \clubsuit
\end{aligned}$$

Corolário (Reflexividade de L^p). *Suponhamos $1 < p < \infty$. Então, temos*

$$(L^p)^{**} = L^p \text{ isometricamente.}$$

Neste caso, dizemos que L^p é **reflexivo**.

Prova. Trivial (cheque)♣

Definição. Sejam V e W espaços vetoriais normados. Seja V^* o conjunto dos funcionais lineares contínuos sobre V (o dual topológico de V). Consideremos uma sequência $(v_j) \subset V$ e um vetor $v \in V$.

- Então, (v_j) **converge fracamente** a v se para todo funcional $f \in V^*$ temos
$$f(v_j) \to f(v).$$
- Suponhamos $V = W^*$. Então, (v_j) **converge na topologia fraca*** a v se
$$v_j(w) \to v(w) \text{ para todo } w \in W.$$

Exemplos Práticos. Sejam $V = L^p(\Omega)$, uma função $f \in L^p(\Omega)$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$.

(a) Se $1 \leq p < \infty$, então $\big(L^p(\Omega)\big)^* = L^{p'}(\Omega)$ pelo teorema de Riesz. Neste caso,
$$f_n \xrightarrow{\text{fracamente}} f \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega f_n g\, dx \to \int_\Omega f g\, dx \text{ para toda } g \in L^{p'}(\Omega).$$
A topologia fraca em $L^p(\Omega)$ é induzida por $L^{p'}(\Omega)$, se p é finito (e $p \geq 1$).

(b) Se $p = \infty$, então $V = L^\infty(\Omega) = \big(L^1(\Omega)\big)^*$. Neste caso,
$$f_n \xrightarrow{\text{topologia fraca*}} f \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega f_n g\, dx \to \int_\Omega f g\, dx \text{ para toda } g \in L^1(\Omega).$$
A topologia fraca* em $L^\infty(\Omega)$ é induzida por $L^1(\Omega)$.

Teorema (Compacidade fraca em L^p e compacidade fraca* em L^∞). *Consideremos $1 < p \leq \infty$ e uma sequência (f_j) limitada em $L^p(X)$.*

- *Se $1 < p < \infty$, então (f_j) contém uma subsequência fracamente convergente.*
- *Se $p = \infty$, então (f_j) contém uma subsequência fraca* convergente.*
- *Se $\|f_j\|_p \leq c$ para todo j e*

$$\begin{cases} f_j \xrightarrow{\text{fracamente}} f \text{ em } L^p(X) \text{ com } 1 < p < \infty, \\ \text{ou} \\ f_j \xrightarrow{\text{fracamente*}} f \text{ em } L^\infty(X), \end{cases}$$

então $\|f\|_p \leq c$.

Prova.

◇ Seja $(f_j) \subset L^p(X)$ satisfazendo $\|f_j\|_p \leq c$ para todo j e algum $c > 0$. Seja

$$\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$$

um subconjunto enumerável e denso no separável $L^{p'}(X)$ [separabilidade provada na seção 1.3 - fatos básicos sobre L^p]. Fixado m, pela *desigualdade triangular para integrais* e a *desigualdade de Hölder* segue que a sequência

$$\int f_j \varphi_m \, dx.$$

é limitada (pelo número $c\|\varphi_m\|_{p'}$).

A seguir, utilizemos o **método da diagonalização de Cantor**.

Fixado $m = 1$, existem $N_1 = \{1_1 < 1_2 < 1_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ e um escalar β_1 tais que

$$\int f_{1_k} \varphi_1 \, dx \xrightarrow{k \to \infty} \beta_1.$$

Por indução, dado l existe $N_l = \{l_1 < l_2 < \cdots\} \subset N_{l-1}$ e um escalar β_l tais que

$$\int f_{l_k} \varphi_l \, dx \xrightarrow{k \to \infty} \beta_l.$$

Portanto

$$\int f_{k_k} \varphi_m \, dx \xrightarrow{k \to \infty} \beta_m, \text{ qualquer que seja } m \in \{1, 2, \ldots\}.$$

◇ Seja $V = \operatorname{span}\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ o espaço vetorial gerado (combinações lineares finitas) pelas funções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Definamos em V o funcional linear

$$T(\varphi) = \lim \int f_{k_k} \varphi \, dx.$$

A função T é bem definida e linear. De fato, se $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_N \varphi_N$ então

$$\int f_{k_k} \varphi = \lambda_1 \int f_{k_k} \varphi_1 + \cdots + \lambda_N \int f_{k_k} \varphi_N \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_N \beta_N.$$

Ainda, $T : (V, \|\cdot\|_{p'}) \to \mathbb{R}$ é contínuo. Pois, pela definição de c temos

$$|T(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_{p'}, \text{ para toda } \varphi \in V.$$

Donde $\|T\| \leq c$.

Claramente T envia sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Por densidade, T se estende linearmente e continuamente a $\overline{V} = L^{p'}(X)$ com

$$T(\psi) = \lim_{j \to \infty} T\left(\varphi_{m_j}\right), \text{ onde } \varphi_{m_j} \xrightarrow{L^{p'}(X)} \psi.$$

Tal extensão satisfaz $\|T\| \leq c$.

Logo, $T \in \left(L^{p'}(X)\right)^* = L^p(X)$ isometricamente pelo *teorema da representação de Riesz*. Assim, existe $f \in L^p(X)$ tal que vale a fórmula integral

$$T(\psi) = \int f \psi \, dx, \text{ para toda } \psi \in L^{p'}(X), \quad \text{com} \quad \|f\|_p = \|T\| \leq c.$$

◇ A convergência. Seja $\psi \in L^{p'}(X)$. Dado $\epsilon > 0$, seja φ_m tal que

$$\|\varphi_m - \psi\|_{p'} < \epsilon.$$

Pela definição de T no espaço V, existe um natural K satisfazendo

$$\left| \int f_{k_k} \varphi_m - T(\varphi_m) \right| < \epsilon, \text{ para todo } k > K.$$

Com a desigualdade triangular e a fórmula integral para T, se $k > K$ temos

$$\left| \int f_{k_k} \psi - \int f \psi \right| \leq \left| \int f_{k_k} (\psi - \varphi_m) \right| + \left| \int f_{k_k} \varphi_m - T(\varphi_m) \right| + \left| \int f(\varphi_m - \psi) \right|.$$

$$\leq c\epsilon + \epsilon + c\epsilon ♣$$

1.6 Algumas Desigualdades Úteis

Estimativas e desigualdades são parte central das aplicações de espaços L^p em análise. As mais básicas são as *desigualdades de Hölder e Minkowski*. Nesta seção apresentamos uns poucos e importantes resultados adicionais. O primeiro é quase uma trivialidade, mas é útil o suficiente para merecer atenção especial.

Teorema (Desigualdade de Chebyshev). *Consideremos uma função $f \in L^p$, com $0 < p < \infty$, e $\alpha > 0$. Então,*

$$m\Big(\big\{x : |f(x)| > \alpha\big\}\Big) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Prova.

É claro que

$$\|f\|_p^p \geq \alpha^p m\Big(\big\{x : |f(x)| > \alpha\big\}\Big)\clubsuit$$

A próxima desigualdade é um teorema razoavelmente geral sobre estimativas para operadores integrais em espaços L^p. A desigualdade que segue generaliza a chamada desigualdade de Young para o produto de convolução (que provamos no Capítulo 2 - seção 2.2 - produto de convolução).

Teorema (Desigualdade de Young Generalizada). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ e seja $K : X \times Y \to \mathbb{C}$ mensurável e tal que exista um real $C > 0$ satisfazendo*

$$\int |K(x,y)|\, dx \leq C \text{ q.t.p. em } Y \quad \text{e} \quad \int |K(x,y)|\, dy \leq C \text{ q.t.p. em } X.$$

Seja $p \in [1, \infty]$. Dada $f \in L^p(Y)$, segue que a integral

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$$

é finita q.t.p., a função Tf então definida está em $L^p(X)$ e

$$\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Prova.

◇ Por hipótese, temos $f : Y \to \mathbb{C}$ e então f é finita em todo ponto.

◇ Caso $1 < p < \infty$. Seja q conjugado a p. Aplicando *Hölder* ao produto

$$|K(x,y)f(y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{q}}.|K(x,y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|$$

encontramos

$$\int |K(x,y)f(y)|\,dy \leq \left[\int |K(x,y)|\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)|\,|f(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)|\,|f(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{q.t.p. em } X.$$

Por *Tonelli*, a integral inicial é uma função mensurável em X. Elevando a desigualdade a p, integrando em x e mudando a ordem de integração (Tonelli) na integral final encontramos

$$\int \left[\int |K(x,y)f(y)|dy\right]^p dx \leq C^{\frac{p}{q}} \int\int |K(x,y)||f(y)|^p dx\,dy$$

$$\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int |f(y)|^p dy.$$

Como a última integral é finita, vemos que

$$K(x,\cdot)f(\cdot) \in L^1(Y) \text{ q.t.p. em } X.$$

Logo, Tf é finita q.tp.. A mensurabilidade de Tf segue por *Tonelli*, no caso $K \geq 0$ e $f \geq 0$. Em geral, como Tf é finita q.t.p., basta decompor K e f em suas partes real e imaginária e estas em partes positivas e negativas. Assim,

$$\int |Tf(x)|^p dx \leq C^{\frac{p}{q}+1}\|f\|_p^p.$$

Extraindo a raiz p-ésima encontramos o resultado desejado.

◇ Caso $p = 1$. Basta utilizar (cheque, é trivial)

$$\int |K(x,y)|\,dx \leq C.$$

◇ Caso $p = \infty$. Basta utilizar (cheque, é trivial)

$$\int |K(x,y)|\,dy \leq C \clubsuit$$

Ingenuamente supondo y um parâmetro discreto variando em um conjunto finito e escrevendo $f^y(x) = f(x,y)$, temos a família de funções $\{f^y\}$. A forma discreta da desigualdade de Minkowski diz que

$$\left\| \sum_y f^y \right\|_p \leq \sum_y \|f^y\|_p.$$

Passando para a variável contínua y, e então integrando na variável y, vislumbramos a *desigualdade integral de Minkowski* abaixo ("cheque").

Teorema (Desigualdade de Minkowski para Integrais). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ mensuráveis e seja $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ mensurável.*

(a) Seja $p \in [1,\infty)$. Se $f \geq 0$, temos

$$\left[\int \left(\int f(x,y)dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} dy.$$

(b) Seja $p \in [1,\infty]$. Suponhamos que $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_p$ é integrável em Y. Então,

$$x \mapsto \int f(x,y)dy \text{ é finita em quase todo ponto, mensurável e}$$

$$\left\| \int f(\cdot,y)dy \right\|_p \leq \int \|f(\cdot,y)\|_p dy < \infty.$$

[Note que (b) "é" (a) reescrita para funções e p arbitrários e integrais finitas.]

Prova.

(a) Analisemos os casos $p = 1$ e $p \in (1,\infty)$.

- Caso $p = 1$. Este é imediato do *teorema de Tonelli*.
- Caso $1 < p < \infty$. Seja $g \in L^{p'}(X)$. Então, com o *teorema de Tonelli* e a *desigualdade de Hölder* em X obtemos

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]|g(x)|dx = \int_Y \left[\int_X f(x,y)|g(x)|dx\right]dy$$
$$\leq \|g\|_{p'} \int_Y \left[\int_X f(x,y)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} dy.$$

Assim, (a) segue do *reverso da desigualdade de Hölder* (cheque). (Para uma prova direta, vide Wheeden & Zygmund [16, p. 143].)

(b) Analisemos os casos p finito e $p = \infty$.

◇ Caso p finito. Aplicando (a) à função $|f|$ temos, pelas hipóteses,

$$\left[\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_p dy < \infty.$$

Logo, a função $f(x,\cdot)$ é Y-integrável para quase todo x e então a função

$$x \mapsto \int f(x,y)dy$$

é finita q.t.p. Decompondo f em $\mathrm{Re}(f)^{\pm}$ e $\mathrm{Im}(f)^{\pm}$ vemos que a função

$$x \mapsto \int f(x,y)dy$$

é mensurável. Agora é claro que (segue da desigualdade triangular para integrais)

$$x \mapsto \int f(x,y)dy \in L^p(X)$$

e que tal função satisfaz a desigualdade anunciada.

◇ Caso $p = \infty$. Dado y em Y notemos que

$$\|f(\cdot,y)\|_\infty = \|f(\cdot,y)\|_{L^\infty(X)}.$$

Por hipótese temos

$$\int \|f(\cdot,y)\|_\infty dy < \infty.$$

Logo, $\|f(\cdot,y)\|_\infty$ é finita exceto para y em algum conjunto $\mathcal{Y} \subset Y$, tal que $m(\mathcal{Y}) = 0$. Redefinindo a função f pelo valor 0 no conjunto $X \times \mathcal{Y}$ [com $(m \times m)(X \times \mathcal{Y}) = 0$], podemos supor que a função mensurável $\|f(\cdot,y)\|_\infty$ é finita para todo $y \in Y$.

Notemos que o conjunto

$$E = \{(x,y) : |f(x,y)| > \|f(\cdot,y)\|_\infty\}$$

é mensurável e $E^y = \{x : (x,y) \in E\}$ tem medida zero. Logo,

$$(m \times m)(E) = \int m(E^y)dy = 0.$$

Assim, redefinindo f pelo valor 0 no conjunto E temos a desigualdade funcional $|f(x,y)| \leq \|f(\cdot,y)\|_\infty$, em $X \times Y$, e a desigualdade integral

$$\int |f(x,y)|dy \leq \int \|f(\cdot,y)\|_\infty dy ♣$$

1.7 O Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

Seja Ω um domínio (limitado ou não) no espaço $\mathbb{R}^n$. A **função distribuição** $\mu = \mu_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ de f é definida por

$$\mu(t) = \mu_f(t) = |\{x \in \Omega : f(x) > t\}|, \text{ onde } t > 0.$$

A função distribuição de f mede o tamanho relativo de f. Ainda, μ é decrescente.

Lema. *Para todo* $0 < p < \infty$ *e* $|f|^p \in L^1(\Omega)$, *temos*

$$\mu(t) \leq \frac{1}{t^p} \int_\Omega |f|^p dx \quad e$$

$$\int_\Omega |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt.$$

Prova.

- ⋄ É claro que
$$t^p \mu(t) \leq \int_{\{x:|f(x)|>t\}} |f|^p dx \leq \int_\Omega |f|^p dx.$$

- ⋄ Pelo *teorema de Tonelli* segue

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p dx &= \int_\Omega \int_0^{|f(x)|^p} dt dx \\
&= \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} dt dx \\
&= \int_\Omega \int_{(0,|f(x)|)} p t^{p-1} dt dx \\
&= \int_0^\infty p t^{p-1} \int_{\{x:|f(x)|>t\}} dx dt \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt \clubsuit
\end{aligned}$$

Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (forma restrita). *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^n$. *Seja*

$$T : L^q \cap L^r \to L^q \cap L^r, \text{ onde } 1 \leq q < r < \infty,$$

linear injetora e suponha que existem constantes T_1 *e* T_2 *tais que*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_1 \|f\|_q}{t}\right)^q \quad e \quad \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_2 \|f\|_r}{t}\right)^r$$

para toda $f \in L^q \cap L^r$ *e* $t > 0$. *Então,* T *se estende a uma aplicação linear injetora*

$$T : L^p \to L^p, \text{ para todo } q < p < r,$$

que é contínua e satisfaz

$$\|Tf\|_p \leq C\, T_1^{\alpha}\, T_2^{1-\alpha}\, \|f\|_p, \text{ para toda } f \in L^q \cap L^r,$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r}$$

e C *depende apenas de* p, q *e* r.

Prova.

◇ Dada $f \in L^q \cap L^r$ e um arbitrário $s > 0$, escrevamos

$$f = f_1 + f_2,$$

onde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| > s, \\ 0, & \text{se } |f(x)| \leq s \end{cases} \qquad \text{e} \quad f_2 = f - f_1.$$

Temos então (pontualmente)

$$|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$$

e portanto

$$\mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leq \mu_{Tf_1}\left(\frac{t}{2}\right) + \mu_{Tf_2}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_{\Omega} |f_1|^q dx + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_{\Omega} |f_2|^r dx.$$

Pelo lema imediatamente anterior segue

$$\int_\Omega |Tf|^p \, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt$$

$$\leq p(2T_1)^q \int_0^\infty t^{p-1-q} \left(\int_{|f|>s} |f|^q \, dx \right) dt + p(2T_2)^r \int_0^\infty t^{p-1-r} \left(\int_{|f|\leq s} |f|^r \, dx \right) dt.$$

A seguir, escolheremos s como uma função de t. Optaremos por $t = As$ para alguma constante $A > 0$ a ser fixada. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Tf|^p dx \ &\leq \ p(2T_1)^q A^{p-q} \int_0^\infty s^{p-1-q} \left(\int_{|f|>s} |f|^q \, dx \right) ds \\ &\quad + \ p(2T_2)^r A^{p-r} \int_0^\infty s^{p-1-r} \left(\int_{|f|\leq s} |f|^r \, dx \right) ds. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{p-1-q} \left(\int_{|f|>s} |f|^q \, dx \right) ds &= \int_\Omega |f|^q \int_0^{|f|} s^{p-1-q} ds \, dx \\ &= \frac{1}{p-q} \int_\Omega |f|^p dx \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{p-1-r} \left(\int_{|f|\leq s} |f|^r \, dx \right) ds &= \int_\Omega |f|^r \int_{|f|}^\infty s^{p-1-r} ds \, dx \\ &= \frac{1}{r-p} \int_\Omega |f|^p dx. \end{aligned}$$

Donde segue

$$\int_\Omega |Tf|^p dx \leq \left[\frac{p}{p-q} (2T_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p} (2T_2)^r A^{p-r} \right] \int_\Omega |f|^p dx$$

para toda constante $A > 0$. Escolhemos então A minimizando a expressão entre colchetes.

Notemos que a expressão tende a $+\infty$ se $A \to 0^+$e também tende a zero se $A \to +\infty$. Derivando tal expressão e igualando a zero obtemos (cheque),

$$A = 2T_1^{-\frac{q}{r-q}} T_2^{\frac{r}{r-q}}.$$

Substituindo tal A na expressão entre colchete encontramos

$$\frac{p}{p-q}(2T_1)^q 2^{p-q} T_1^{-\frac{q(p-q)}{r-q}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r 2^{p-r} T_1^{-\frac{q(p-r)}{r-q}} T_2^{\frac{r(p-r)}{r-q}}$$

$$= 2^p \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right) T_1^{\frac{q(r-p)}{r-q}} T_2^{\frac{r(p-q)}{r-q}}.$$

Por hipótese temos

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} = \frac{q(r-p)}{p(r-q)}.$$

É trivial ver que

$$\frac{q(r-p)}{p(r-q)} + \frac{r(p-q)}{p(r-q)} = 1.$$

Donde então segue

$$\|Tf\|_p \leq 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right)^{\frac{1}{p}} T_1^{\alpha} T_2^{1-\alpha} \|f\|_p.$$

Assim, como desejado, encontramos

$$\|Tf\|_p \leq C\, T_1^{\alpha} T_2^{1-\alpha} \|f\|_p, \text{ onde } C = 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

com a constante C dependendo somente de p, q e r ♣

1.8 O Lema de Lax-Milgram e a Alternativa de Fredholm

Indiquemos o produto interno em um arbitrário espaço (real) de Hilbert H por "$\langle\, , \,\rangle$", para diferenciá-lo do produto interno usual "$\cdot$" em $\mathbb{R}^n$.

Nesta seção os espaços vetoriais são reais e assumimos o resultado abaixo.

Teorema da representação de Riesz (para espaços de Hilbert). *Seja H um espaço de Hilbert real e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um único vetor $y \in H$ satisfazendo*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \ \textit{ para todo } x \in H.$$

Ainda mais, temos $\|f\| = \|y\|$.

Prova. Vide Gilbard e Trudinger [10, p. 82]♣

Definição. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma **forma bilinear** no espaço de Hilbert H.

- Dizemos que B é **contínua** se existe uma constante c satisfazendo

$$|B(x,y)| \leq c\|x\|\,\|y\|, \ \text{para quaisquer } x \in H \text{ e } y \in H.$$

- Dizemos que B é **coerciva** (ou **elíptica**) se existe um $m > 0$ satisfazendo

$$B(x,x) \geq m\|x\|^2, \ \text{para todo } x \in H.$$

Um exemplo de forma bilinear contínua e coerciva é o próprio produto interno

$$B(x,y) = \langle x, y\rangle\,.$$

Teorema (Lema de Lax-Milgram). *Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H. Então, para todo funcional linear contínuo $f \in H^*$ (o dual topológico de H), existe um único $y \in H$ satisfazendo*

$$B(x,y) = f(x), \ \textit{ para todo } x \in H.$$

Prova.

- Fixado $y \in H$, a aplicação $x \mapsto B(x,y)$ é claramente contínua, com norma majorada por $c\|y\|$ (mantida a notação acima). Pelo *Teorema da representação de Riesz (espaços de Hilbert)*, existe um único $Ty \in H$ tal que
$$B(x,y) = \langle x, Ty\rangle \text{ para todo } x \in H, \text{ com } \|Ty\| \leq c\|y\|.$$
Logo, $T : H \to H$ é limitado (é claro que T é linear).

- Pela coercividade de B segue
$$m\|y\|^2 \leq B(y,y) = \langle y, Ty\rangle \leq \|y\|\,\|Ty\|.$$
Logo, $m\|y\| \leq \|Ty\|$.
Tal desigualdade mostra que T é injetora. Ainda, se $T(y_n)$ é uma sequência de Cauchy então (y_n) também. Assim, como H é completo, $T(H)$ é fechado. Ainda mais, $T^{-1} : T(H) \to H$ satisfaz $m\|T^{-1}(z)\| \leq \|z\|$ e é contínuo.

- Suponhamos $T(H) \neq H$. Então, existe um vetor z ortogonal ao fechado $T(H)$ (vide *Teorema da Projeção*, Gilbard-Trudinger [10, p. 81]). Isto é,
$$\langle z, Tx\rangle = 0, \text{ para todo } x \in X.$$
Substituindo $x = z$ nesta identidade encontramos $\langle z, Tz\rangle = B(z,z) = 0$.
Pela coercividade de B segue $z = 0$. Logo,
$$T : H \to H \text{ é inversível com inversa contínua.}$$

- Então, com a notação no enunciado e aplicando o *teorema da representação de Riesz*, existe um único $w \in H$ satisfazendo
$$f(x) = \langle x, w\rangle = B(x, T^{-1}w), \text{ para todo } x \in X.$$

- O vetor $y = T^{-1}w$ satisfaz o desejado♣

Corolário. *Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ como no lema acima. Então, a aplicação*
$$\begin{aligned} \mathcal{B} : H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto B(\cdot, y) \end{aligned}$$
é linear, contínua, sobrejetora e injetora. Ainda, $\mathcal{B} : H \to H^*$ é bicontínua.

[Se preferir, escreva $\mathcal{B}(y) = B_y$, onde $B_y(x) = B(x,y)$.]

Prova. Exercício. Vide Lista 5 de Exercícios♣

Teorema (Alternativa de Fredholm em espaços reais e normados). Consideremos $T : V \to V$ uma aplicação linear compacta, com V um espaço vetorial real e normado. Então, vale uma das duas alternativas a seguir.

(a) A equação homogênea $x - Tx = 0$ tem uma solução não trivial $x \in V$.

(b) Para cada $y \in V$ a equação
$$x - Tx = y$$
tem uma solução única $x = x(y) \in V$. Neste caso, está bem definido o operador $(I - T)^{-1}$ e este é contínuo.

Prova. Vide Gilbard-Trudinger [10, pp. 75–78]♣

Definições e Comentários. Sejam $T : V \to V$ um operador linear compacto e $I : V \to V$ o operador identidade.

- Um número real λ é um **auto-valor** de T se existe em V um vetor $v \neq 0$ (dito um **auto-vetor** associado a λ) tal que
$$Tv = \lambda v.$$
É trivial ver que auto-vetores associados a distintos auto-valores são linearmente independentes (cheque).

- Dado um auto-valor λ, o conjunto dos auto-vetores associados a λ é um sub-espaço vetorial de V e é chamado **auto-espaço associado a** λ ou, brevemente, λ **auto-espaço**. É claro que tal auto-espaço é o **núcleo (ou** ***kernel*****)** do operador
$$S_\lambda = \lambda I - T.$$

- A **multiplicidade** do auto-valor λ é a dimensão do λ auto-espaço.

- Se um número real $\lambda \neq 0$ não é um auto-valor, então pela *alternativa de Fredholm* está bem definido e é linear contínuo o operador
$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} : V \to V.$$
Tal operador é chamado **resolvente**.

Definição. Seja $T : H \to H$ um operador linear contínuo em um espaço (real) de Hilbert. Então, o **adjunto** de T é o operador $T^* : H \to H$ que satisfaz

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,, \text{ para todos } x \in H \text{ e } y \in H.$$

A existência do adjunto T^* é garantida pelo *teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert* (cheque). É trivial ver que $T^* : H \to H$ é contínuo (cheque).

Vale também o resultado abaixo.

Teorema (Alternativa de Fredholm em espaços reais e de Hilbert). Sejam H um espaço (real) de Hilbert e um operador linear e compacto

$$T : H \to H.$$

Vale o que segue.

(a) Existe um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ sem pontos de acumulação, exceto possivelmente $\lambda = 0$, tal que para cada
$$\lambda \notin \Lambda \cup \{0\}$$
as equações
$$\begin{cases} \lambda x - Tx = y \\ \lambda x - T^*x = y, \end{cases}$$
tem uma única solução $x \in H$ para cada $y \in H$ e as aplicações inversas
$$(\lambda I - T)^{-1} \quad \text{e} \quad (\lambda I - T^*)^{-1} \text{ são contínuas.}$$

(b) Se $\lambda \in \Lambda$, então os auto-espaços das aplicações
$$\lambda I - T \quad \text{e} \quad \lambda I - T^*$$
tem dimensão finita e não nula. Ainda mais,
$$\begin{cases} \lambda x - Tx = y \text{ é solúvel (em } x\text{) se e somente se } y \in \text{Ker}(\lambda I - T^*)^{\perp} \\ \lambda x - T^*x = y \text{ é solúvel (em } x\text{) se e somente se } y \in \text{Ker}(\lambda I - T)^{\perp} \end{cases}$$

Prova. Vide Gilbard-Trudinger [10, pp. 84–85]♣

1.9 O Conjunto Lebesgue-L^p de uma função

Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n$. Na seção 1.2 (fatos básicos sobre a integral de Lebesgue) definimos que um ponto x pertence ao **Conjunto de Lebesgue** de uma função localmente integrável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se

$$\frac{1}{m\left(D(0,r)\right)} \int\limits_{D(0,r)} |f(x-y) - f(x)| dy \xrightarrow{r \to 0} 0.$$

Vimos que a média de f em $D(x,r)$ se aproxima de $f(x)$, se $r \to 0$ e $x \in L_f$.

Comentamos então que o conjunto de Lebesgue é "'grande" no sentido da teoria da medida. De fato, tem-se

$$m\big(\Omega \setminus L_f\big) = 0.$$

A seguir, estendemos a noção de conjunto de Lebesgue para funções p-integráveis.

A definição abaixo também é usual para o conjunto de Lebesgue de f.

Definição. Sejam $p \in (0,\infty)$ e uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto Lebesgue-L^p de f se

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \text{ q.t.p..}$$

Notação. O símbolo $Q \searrow x$ indica uma família decrescente de cubos não degenerados $Q's$ centrados em x e que "encolhe" a x. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um cubo na família com diâmetro menor que ϵ. Como usual, $|Q| = m(Q)$.

Nesta seção utilizamos o seguinte resultado básico.

Teorema da Diferenciação de Lebesgue. *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localmente integrável, então*

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = f(x) \textit{ q.t.p..}$$

A seguir, enunciemos e provamos o teorema desta seção.

Teorema (O conjunto Lebesgue-L^p). *Sejam $p \in (0,\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \ q.t.p..$$

Prova.

◇ Sejam $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Se $p \geq 1$, temos $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Se $0 < p \leq 1$, temos $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ [cheque (segue uma dica), com $b = \lambda a \geq 0$ reduza a $(1+\lambda)^p \leq 1 + \lambda^p$ e então com

$$q = \frac{1}{p} \geq 1 \quad \text{e} \quad \lambda = x^q$$

reduza para $1 + x^q \leq (1+x)^q$ e verifique $\varphi(x) = (1+x)^q - x^q \geq 1$, mostrando que φ é crescente e $\varphi(0) = 1$].

Em suma, dado um arbitrário $0 < p < \infty$, existe $c_p > 0$ tal que

$$(a+b)^p \leq c_p(a^p + b^p).$$

◇ Sejam $\{r_n\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$ e Z_j o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy \ \neq \ |f(x) - r_j|^p \ .$$

Como

$$|f(y) - r_j|^p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

pelo *teorema da diferenciação de Lebesgue* segue que $|Z_j| = 0$. Seja então

$$Z = \bigcup Z_j.$$

É óbvio que $|Z| = 0$.

◇ Para todos cubos Q (vide hipóteses), pontos x e racionais $r_{j's}$ temos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p \, dy \ \leq \ \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy \ + \ \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(x) - r_j|^p \, dy$$

$$= \ \frac{c_p}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_j|^p \, dy \ + \ c_p |f(x) - r_j|^p.$$

Portanto, dado $x \notin Z$ temos

$$\limsup_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|^p \, dy \ \leq \ 2c_p |f(x) - r_j|^p, \quad \text{para todo } r_j \in \mathbb{Q}.$$

Nos pontos de Z^c em que f é finita, e ela o é q.t.p., o $\limsup$ acima é 0♣

REFERÊNCIAS

[1.] R. A. Adams and Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003.

[2.] A. Bressan, *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, 2012, Univ. of Pennsylvania. `https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/sobolev-notes.pdf`

[3.] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2011, Springer.

[4.] M. M. Cavalcanti e V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Ed. Universidade Estadual de Maringá, 2009.

[5.] Driver, B. K., *Lecture Notes on PDE*, University of California (San Diego).

[6.] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010. `http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/lecture_notes.htm`

[7.] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, second edition, Princeton University Press, 1995.

[8.] —-, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[9.] Giglioli, A., *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, 10 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975, IMPA.

[10.] Gilbard D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, reprint of the 1998 edition, 2001.

[11.] Hunter, J. *Lecture Notes on Sobolev Spaces*, Univ. of California (Davis). See `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/ch3.pdf`
On PDE, see `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/pdes.html`

[12.] Royden, H. L. - Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, 4th ed, Prent. Hall, 2010.

[13.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[14.] —, *Functional Analysis*, 2nd ed., Int. Ser. Pure and Appl. Math., 1991.

[15.] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1980.

[16.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, M. Deker, 1977.