

DETERMINANTE 2×2 : Geometria e Álgebra

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

Seja $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ o vetor em \mathbb{R}^2 representado pelo segmento com extremidade $(0, 0)$ e final (a, b) . Dois vetores $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d \rangle$, não paralelos e em \mathbb{R}^2 , determinam um paralelogramo \mathcal{P} que supomos, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a + c, b + d \rangle$. Consideremos a representação de \mathcal{P} [numa segunda representação as posições de \vec{u} e \vec{v} são trocadas]

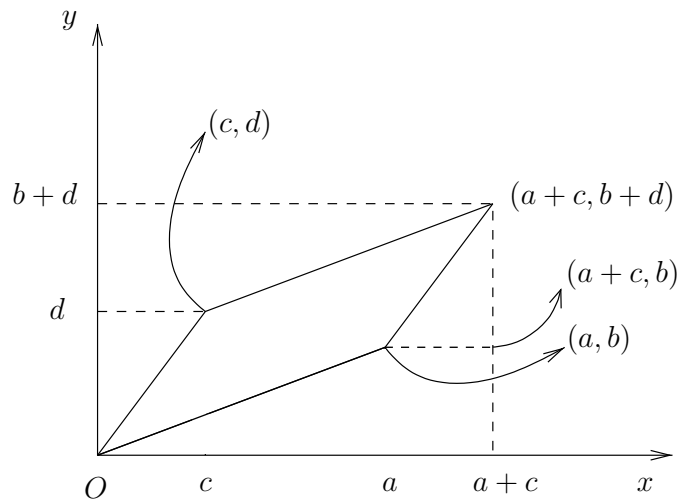


Figura 1: Determinante/Área

Pela figura, a área de \mathcal{P} é dada pela área do retângulo de vértices

$$O = (0, 0), (a + c, 0), (a + c, b + d) \text{ e } (0, b + d)$$

subtraindo-se a área de dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes.

Temos então,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}) &= (a + c)(b + d) - 2 \left[\frac{(a + c + c)b}{2} \right] - 2 \left(\frac{cd}{2} \right) \\ &= (ab + ad + bc + cd) - (ab + 2bc) - cd \\ &= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \clubsuit \end{aligned}$$

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA.

A equação geral de uma reta no plano \mathbb{R}^2 é

$$D : ax + by + c = 0, \text{ com } a \text{ ou } b \text{ não nulo.}$$

Dado um ponto $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é

$$\text{dist}(P_o; D) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prova.

Seja m_r o coeficiente angular de uma reta r qualquer. As retas, designadas por S , perpendiculares à reta D , tem coeficiente angular m_S tal que

$$m_S \cdot m_D = -1.$$

Logo, utilizando o parametro d , uma equação geral de tais retas é

$$S : -bx + ay + d = 0, \text{ onde } d \in \mathbb{R}.$$

Entre tais retas perpendiculares à reta D queremos a que passe por $P_o = (x_o, y_o)$.

Assim temos

$$-bx_o + ay_o + d = 0.$$

Donde determinamos o valor $d = bx_o - ay_o$ e obtemos então a reta

$$S_{P_o} : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0.$$

Para determinarmos o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ de intersecção entre as retas perpendiculares entre si D e S_{P_o} pasamos a resolver o sistema

$$(*) \begin{cases} ax + by = -c \\ -bx + ay = ay_o - bx_o. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a , a segunda por $-b$, e então somando-as temos

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2x_o - aby_o - ac).$$

A seguir, multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a e somando-as encontramos

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc).$$

Então, o quadrado da distância de $P_o = (x_o, y_o)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$ é

$$\begin{aligned}
 |P_o P_1|^2 &= (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 \\
 &= \left[x_o - \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 x_o - a b y_o - a c) \right]^2 + \left[y_o - \frac{1}{a^2 + b^2} (-a b x_o + a^2 y_o - b c) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 x_o + a b y_o + a c)^2 + (a b x_o + b^2 y_o + b c)^2] \\
 &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [a^2 (a x_o + b y_o + c)^2 + b^2 (a x_o + b y_o + c)^2] \\
 &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 + b^2) (a x_o + b y_o + c)^2] \\
 &= \frac{(a x_o + b y_o + c)^2}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

A prova está completa.

Elaboremos uma segunda prova.

Segunda Prova.

Reescrevendo o sistema (*) na notação matricial temos

$$(**) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ a y_o - b x_o \end{bmatrix}.$$

Observação. É fácil constatar que dada uma matriz inversível

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

sua inversa é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução do sistema (*) é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ a y_o - b x_o \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} (-a c - a b y_o + b^2 x_o)$$

e

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} (-b c + a^2 y_o - a b x_o)$$

e a demonstração segue como a anterior(a primeira) ♣