Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES, E SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

8.1 - Introdução

A origem desta teoria se encontra em um trabalho de Joseph Fourier (1768-1830) sobre a teoria matemática do calor, apresentado em 1812. Posteriormente, Fourier escreveu o livro *Théorie Analytique da la Chaleur* em 1822. Nestes trabalhos é apresentada a idéia de que toda função pode ser escrita como uma série infinita de cossenos e senos. O esclarecimento de diversos pontos obscuros de tais trabalhos (já apontados à época por Lagrange, Laplace e Legendre) contribui enormemente com o desenvolvimento da análise no século XIX. Motivou, por exemplo, Dirichlet a apresentar uma definição de função já próxima da atual definição. Impulsionou também os estudos de integração, para solucionar os problemas de convergência apresentados por uma série de Fourier.

Cabe destacar que o último teorema muito importante sobre as séries de Fourier (caracterizando o conjunto dos pontos em que, dada uma função, a série de Fourier converge) foi demonstrado pelo sueco Lennart Carleson em 1966.

Ainda mais, o estudo das séries de Fourier levou ao desenvolvimento do campo em matemática hoje chamado Análise Harmônica.

8.2 - Definições e Notações.

Uma série trigonométrica e sua sequência das somas parciais $(S_N)_{\mathbb{N}}$, onde S_N é uma função, são dadas por

$$(8.2.1) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,,\ n \in \mathbb{Z},\ c_n \in \mathbb{C}\,, x \in \mathbb{R} \quad ; \qquad S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\ .$$

Tal série converge em $x \in \mathbb{R}$ se $\big(S_N(x)\big)$ converge e, o valor da série em x é,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

A série trigonométrica pode também ser apresentada na forma,

$$(8.2.2) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Escrevendo, para $n > 0$,

$$e^{inx} = \cos nx + i\operatorname{sen} nx \quad , \quad e^{-inx} = \cos nx - i\operatorname{sen} nx \quad ,$$

temos,

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (\ c_n + c_{-n}) \cos nx \ + \ (ic_n - ic_{-n})\operatorname{sen} nx = \ a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

se

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad , \quad b_n = i(c_n - c_{-n})\ .$$

Inversamente, para $n > 0$,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\ .$$

A notação em $a_{n's}$ e $b_{n's}$ é preferida nos casos das expansões das funções:

- Periódicas a valores reais.
- Pares, quando então a série é de cossenos.
- Ímpares, quando então a série é de senos.

Inicialmente, consideremos uma função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tal que a série abaixo convirja uniformemente [vide notação (8.2.1)],

$$(8.2.3) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx}.$$

Como as funções exponenciais e^{imx} são 2π-periódicas (doravante escreveremos, apenas, periódicas) e contínuas, a função f também o é. Assim, é lícito multiplicar (8.2.3) por e^{-inx} e integrarmos termo a termo, comutando o símbolo de somatório com o de integral, obtendo

$$(8.2.4) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx.$$

Como é fácil ver temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 2\pi\,, & n = 0 \\ 0\,, & n \neq 0. \end{cases}$$

Logo, por (8.2.4),

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\ .$$

Chamamos c_n de n-ésimo coeficiente de Fourier de f e indicamos $c_n = c_n[f]$. É fácil ver que

$$|c_n| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\,, \forall n \in \mathbb{Z}\ .$$

Sendo os coeficientes c_n bem definidos se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ é periódica e integrável, temos que a série de Fourier de f é a série trigonométrica com coeficientes de Fourier de f dados pela família $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, a qual é enumerável. Notamos, não supondo qualquer modo de convergência,

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

8.1 Notação. $\mathcal{R}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ \textit{tal que } f\ \textit{é Riemann integrável}\}$.

Se uma função $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ é 2π-periódica e a valores reais então, a série de Fourier de f é uma série trigonométrica como em (8.2.2), com coeficientes de Fourier de f dados pelas sequências (a_n) e (b_n), onde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\, nx\, dx \qquad , \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx.$$

Notamos, sem supormos qualquer convergência,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\, nx + b_n sen\, nx), a_n, b_n \in \mathbb{R} .$$

As questões mais importantes em séries de Fourier são:

(a) A série de Fourier converge em algum modo ? Simplesmente ? Uniformemente ? Em média ?, etc.

(b) A série de Fourier, se convergir, converge a f ?

(c) O que ocorre se f é contínua ?

(d) Duas funções com mesmos coeficientes de Fourier são iguais ?

Eis parte das respostas e alguns outros fatos importantes sobre séries de Fourier.

- Se f é Riemann integrável então sua série de Fourier converge em média quadrática a f.
- A série de Fourier de f, onde fé contínua, pode divergir em "vários" pontos.
- Duas funções integráveis com iguais coeficientes de Fourier são iguais, exceto num conjunto de conteúdo nulo (medida nula).
- A melhor classe de funções para analisar funções periódicas e Riemann integráveis é a classe de funções de variação limitada, $BV[-\pi, \pi]$.
- A teoria apropriada ao estudo geral das séries de Fourier é a da Integração de Lebesgue.

Nesta introdução omitiremos a prova da Fórmula de Parseval. Quanto ao teorema de Dirichlet-Jordan, veremos versões mais simples, dadas pelas Proposições 1 e 2 e Teorema 4, de Dini.

8.2 Teorema (A Melhor Aproximação em Média Quadrática). *Consideremos $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ e 2π-periódica. Então, a melhor aproximação em média quadrática da função f no espaço vetorial gerado pelas funções $e^{inx}, -N \leq n \leq N$, é a N-ésima soma parcial*

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad c_n = c_n[f],$$

da série de Fourier de f. Isto é, se $g = \sum\limits_{n=-N}^{N} d_n e^{inx}$, $d_{n's}$ arbitrários em $\mathbb{C}$, temos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \sum_{n=N}^{N}|c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(x)|^2dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx.$$

Prova.

Seja $d_n = c_n + \epsilon_n$. Então, a distância em média quadrática de f a g satisfaz:

$$d(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - \sum_{-N}^{N} d_n e^{inx}|^2dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \frac{1}{2\pi}2\mathrm{Re}\left(\sum_{-N}^{N}\overline{d_n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\right) + \sum_{-N}^{N}|d_n|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - 2\sum_{-N}^{N}\mathrm{Re}(\overline{d_n}c_n) + \sum_{-N}^{N}|d_n|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - 2\sum_{-N}^{N}|c_n|^2 - 2\sum_{-N}^{N}\mathrm{Re}(c_n\overline{\epsilon_n}) +$$

$$+ \left[\sum_{-N}^{N}|c_n|^2 + \sum_{-N}^{N}2\mathrm{Re}(c_n\overline{\epsilon_n}) + \sum_{-N}^{N}|\epsilon_n|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \sum_{-N}^{N}|c_n|^2 + \sum_{-N}^{N}|\epsilon_n|^2 = d(f;S_N) + \sum_{-N}^{N}|\epsilon_n|^2 \quad \blacksquare$$

8.3 Corolário (Desigualdade de Bessel). *Se $f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ então,*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx .$$

Prova. Pelo Teorema 8.2, $d(f;S_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx - \sum\limits_{-N}^{N}|c_n|^2 \geq 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Logo, tomando o limite para N tendendo a $+\infty$, segue a tese $\blacksquare$

Deixamos ao leitor verificar que em termos dos coeficientes da série trigonométrica de senos e cossenos a desigualdade de Bessel pode ser reescrita como,

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \ .$$

8.4 Lema de Riemann-Lebesgue. *Se $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ então,* $\lim\limits_{|n|\to+\infty} |c_n| = 0$.

Prova. Consequência imediata da desigualdade de Bessel ∎

Abaixo relacionamos a diferenciabilidade de f com o decrescimento dos coeficientes de Fourier de f e a convergência uniforme da série de Fourier de f, cujo limite será mostrado no Teorema de Dini.

8.5 Proposição. *Seja $f \in C^k(\mathbb{R})$ e 2π-periódica.*

(a) Existe $M > 0$ tal que $|c_n| \leq \frac{M}{n^k}, n \neq 0$.

(b) Se $k \geq 2$ a série de Fourier de f converge uniformemente.

Prova. Seja $c_n = c_n[f], n \neq 0$.

(a) Efetuando integração por partes k vezes e descartando parcelas nulas, graças a periodicidade das funções f, f',.., $f^{(k)}$ e e^{-inx}, obtemos

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = -(\frac{1}{-in}) \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = ... = (\frac{1}{in})^k \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{-inx}dx \ .$$

Logo, para $n \neq 0$,

$$|c_n e^{inx}| = |c_n| \ \leq \ \frac{M}{n^k} \quad , \ M = \frac{1}{2\pi} \max\left\{|f^{(k)}(x)| : x \in [-\pi,\pi]\right\} \ .$$

(b) Pelo teste M de Weierstrass e $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge uniforme/e ∎

8.6 Definição. *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, a variação de f segundo a partição Γ é,*

$$V_\Gamma = V_\Gamma[f;a,b] = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \ .$$

A variação de f sobre $[a,b]$ *é,*

$$V[f] = \sup\left\{V_\Gamma : \ \Gamma \text{ é partição de } [a,b]\right\}.$$

O conjunto das funções de variação limitada *é*

$$\mathsf{BV[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \text{tal que} \ V[f] < \infty\} \ .$$

Sabe-se que $V[f] < \infty$ se e somente se o gráfico de f têm comprimento finito. Logo, para $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$, temos $V[f] = +\infty$. Mas, existem f contínuas com $V[f] = +\infty$.

Ainda, temos $V[f] < \infty$ se e somente se f é diferença de duas funções monótonas limitadas. Logo, havendo descontinuidades, elas são removíveis ou de 1ª espécie; isto é, existem os limites laterais.

Assim, escolhemos uma subclasse das funções de variação limitada para esta introdução.

8.7 Definição. *Dado I, um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ é* monótona crescente, *ou* crescente, *se $\forall\, x_1, x_2 \in I$, é válica a implicação $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$; se é válida a implicação $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, dizemos que f é* estritamente crescente. *Analogamente, temos* monótona decrescente *e* estritamente decrescente. *Ainda, f é* monótona *se é crescente ou decrescente.*

8.8 Definição. *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f é* monótona por partes *se existe partição de $[a,b]$, $\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = b\}$, tal que $f_{|(x_{i-1},x_i)}$ é monótona, $i = 1, 2, ..., n$. Se $f_{|(x_{i-1},x_i)}$ é também contínua, $i = 1, 2, ..., n$, então f é* monótona contínua por partes. *A definição é análoga se $I = [a,b)$ ou $I = (a,b]$ ou $I = (a,b)$, é limitado.*

Dada $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{R}$, e $x \in X$ notamos $f(x^{\pm}) = \lim_{t \to x^{\pm}} f(t)$, se existir o limite.

É fácil verificar que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona por partes e limitada, então f é de variação limitada e existem os limites laterais, $f(x_i^-) = \lim_{x \to x_i^-} f(x)$ e $f(x_i^+) = \lim_{x \to x_i^+} f(x)$, dada $\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$.

8.9 Definição. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periódica, f é monótona contínua por partes se a restrição $f_{|[0,T]}$ o é.*

8.10 Teorema (Dirichlet-Jordan). *Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ monótona contínua por partes e $S[f]$ a série de Fourier de f. Então,*

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos,

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n sen nx) = \frac{1}{2}[\ f(x^+) + f(x^-)\ ]\ .$$

(b) $S[f]$ converge uniformemente a f em todo intervalo fechado no qual f é contínua.

Prova.

(a) Vide T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, 2nd ed., Ed. Reverté.

(b) Vide R. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Pure and Applied Mathematics.

8.11 Lema. *Para $f \in \mathcal{R}[a,b]$ temos,*

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \left((b-a)\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Prova. Se a integral do lado direito da inequação acima é nula o resultado é óbvio. Senão, pela desigualdade $|AB| \le \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ com $A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$ temos,

$$\frac{|f(x)|}{\sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}\ \le\ \frac{1}{2}\left(\frac{|f(x)|^2}{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\ +\ \frac{1}{b-a}\right),$$

que integrando sobre $[a,b]$ conduz a,

$$\frac{\int_a^b |f(x)|dx}{\left((b-a)\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{2}(1+1) = 1\ \blacksquare$$

O lema acima é um caso particular da desigualdade abaixo, com prova análoga.

8.12 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. *Para $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ temos,*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx\ \le\ \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Prova. Trivial, se uma das integrais à direita é nula. Senão, basta seguir os passos da prova do lema acima, novamente utilizando a desigualdade $|AB| \le \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$, com $A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ e $B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ ∎

8.13 Teorema. *Seja* $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ *e* 2π*−periódica. Suponhamos que* $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ *e* $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$. *Então,*

(a) $S_N(x)$ *converge a* f *em média quadrática:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \; dx = 0.$$

(b) **Fórmula de Parseval,**

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \; .$$

(c) As integrais de S_N *convergem uniformemente à integral de* f*, em* $[-\pi, x]$*,* $\forall x$*. Ainda mais,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)| dt \le \left[\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)|^2 dt \; \right]^{\frac{1}{2}} \; .$$

Prova.

(a) e e (b). Vide A. W. Knapp, *Basic Real Analysis*, Cornerstones, Birkhäuser, 2005, pp. 74-77.

(c) Pelo Lema 8.11 temos, $\int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)| dt \le \left[\; (x + \pi) \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)|^2 dt \; \right]^{\frac{1}{2}}$ que, dividindo por 2π, utilizando $(x + \pi) \le 2\pi$ e item (a), resulta na tese ∎

Em termos dos coeficientes $a_{n's}$ e $b_{n's}$ a fórmula de Parseval é:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \; .$$

Melhoremos o resultado, na Proposição 8.5, para a convergência uniforme da série de Fourier.

8.14 Proposição. *A série de Fourier de uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-periódica, converge uniformemente.*

Prova. Como na Proposição 8.5, integrando por partes a expressão para $c_n = c_n[f]$ temos,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{in}d_n \ , \quad d_n = d_n[f'] \, , n \neq 0 \ .$$

Pela desigualdade de Schwarz para $a = (a_j)$, $b = (b_j)$ sequências finitas de m números complexos temos,

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j|\,|b_j| \leq (\sum_{j=1}^{m} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{m} |b_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

que é extensível a somas infinitas. Assim, aplicando a desigualdade de Bessel para a função f', com $n \in \mathbb{Z}^*$, obtemos

$$\sum |c_n| = \sum \frac{1}{|n|}|d_n| \leq \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\sum |d_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Finalmente, pelo teste M de Weierstrass, segue a proposição ∎

8.15 Definição. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaz a* condição de Lipschitz no ponto *x se existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que,*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t| \ , \quad \forall \ t \, , \ |t| \leq \delta \ .$$

8.16 Exemplos. *Existindo $f'(x)$, então f satisfaz a condição de Lipschitz em x. Se houver um "salto" em x (isto é, uma descontinuidade de 1ª espécie), então f não satisfaz tal condição no ponto x. A função $\sqrt{x}$ não satisfaz a condição de Lipschitz em $x = 0$.*

8.17 Teorema (Dini). *Seja $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, 2π-periódica, satisfazendo a condição de Lipschitz em $x \in [-\pi, \pi]$. A série de Fourier de f, no ponto x, converge a $f(x)$.*

Prova. Fixando x, sejam δ e M como na condição de Lipschitz e,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t)-f(x)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, & 0 < |t| \leq \pi \ . \\ 0 \, , \ t = 0 \ . \end{cases}$$

Observemos que:

(1) A função $(\text{sen}\frac{t}{2})^{-1}$ é contínua em $\{t : \delta \le |t| \le \pi\}$ e g é aí integrável.

(2) Se $0 < |t| \le \delta$, então temos $|g(t)| \le \frac{M|t|}{|\text{sen}\frac{t}{2}|} = 2M\frac{\frac{|t|}{2}}{\text{sen}\frac{|t|}{2}}$ e, pelo primeiro limite fundamental, g é integrável em $[-\delta, \delta]$. Logo, g é integrável em $[-\pi, \pi]$.

É fácil ver que para $D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{int}$, e $S_N(f;x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ (vide Exercício.....),

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1\,, \\ \\ D_N(t) = \frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen}\frac{t}{2}}\,, t \notin 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ \\ S_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(x-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen}\frac{t}{2}}dt\,. \end{cases}$$

Assim, escrevendo $f(x) = f(x).1$ e trocando 1 pela média de D_N em $[-\pi, \pi]$ temos,

$$S_N(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen}\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen}\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\text{sen}(N+\frac{1}{2})t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\,g(t)\cos\frac{t}{2}\,]\text{sen}\,Nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\,g(t)\text{sen}\frac{t}{2}\,]\cos Nt\,dt\,.$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue os dois últimos termos tendem a zero ■

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 8

1. Verifique que a fórmula

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,, \quad f, g \in \mathcal{R}[-\pi, +\pi],$$

define sobre $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ um semi-produto interno que torna $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ um espaço vetorial semi-normado com semi-norma, a semi-norma 2,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

2. O conjunto das funções complexas $\{\ \varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,, x \in [-\pi,\pi] : n \in \mathbb{Z}\ \}$ é ortonormal:

   (a) $\|\varphi_n\|_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\langle\varphi_n\ ,\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$, δ_{nm} o delta de Kronecker.

3. O conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\,, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} :\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é ortonormal em $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. Isto é,

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

   (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\, dx = \pi\delta_{nm}$.

   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \pi\delta_{nm}$.

4. (Os coeficientes de uma série de Fourier) Verifique:

   (a) $2\cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $2i\operatorname{sen} nx = e^{inx} - e^{-inx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dados a_n e b_n $(n \geq 1)$ em $\mathbb{C}$, existem c_n e c_{-n} (ache-os) em $\mathbb{C}$ tais que:

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = c_n e^{inx} + c_n e^{-inx}\ .$$

   (c) O polinômio trigonométrico $S_N = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ é real se, e só se, $\overline{c_n} = c_{-n}$.

   (d) Vale a relação: $2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

5. Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ verifique as fórmulas abaixo.

$$(a) \qquad e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + \ldots + e^{nit} = \frac{e^{nit} - 1}{1 - e^{-it}} = \frac{\operatorname{sen}(n\frac{t}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})} e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \ .$$

$$(b) \qquad \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\operatorname{sen}\frac{nt}{2} \cos(n+1)\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{t}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \ ,$$

denominado n-ésimo núcleo de Dirichlet.

$$(c) \qquad \operatorname{sen} t + \ldots + \operatorname{sen} nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{nt}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}},$$

denominado n-ésimo núcleo conjugado de Dirichlet.

Sugestão: compute as partes real e a imaginária da expressão em (a).

6. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ convergem,
Sugestão: Utilize o exercício 5, acima, e o critério de Dirichlet.

7. Compute:

   (a) $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

   Sugestão: exercícios 14 e 15, Capítulo 7.

   A função zeta, de Riemann, é dada por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

8. Determine as séries de Fourier das funções abaixo.

   (a) $f(x) = -1$ se $-\pi \le x < 0$, $f(x) = 1$ se $0 \le x \le \pi$.

   (b) $f(x) = x^3$ se $-\pi \le x \le \pi$.

   (c) $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.

9. Compute F, a série de Fourier de f, de período 2π, e esboce seus gráficos.

   (a) $f(x) = 1$ se $-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$, $f(x) = 2$ se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = 1$ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

   (b) $f(x) = 1$, se $-\pi \le x < 0$ e, $f(x) = 2$ se $0 \le x < \pi$.

10. Determine uma função contínua em $[-\pi, +\pi]$ que gere a série de Fourier $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$. Compute então

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \ .$$

Sugestão: Utilize a fórmula de Parseval.

11. Encontre uma série de Fourier para computar, com a fórmula de Parseval,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \ .$$

12. Calcule a soma das séries abaixo via séries de Fourier.

(a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots\ldots\ldots$ (b) $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \ldots\ldots\ldots$

13. Determine a série de Fourier em $[-\pi, \pi]$ de:

(a) $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

14. Determine uma expansão em série de senos, no intervalo $(0, \pi)$, para as funções,

(a) $f(x) = 1$. (b) $f(x) = x^2 + x$.

15. Determine uma expansão em série de cossenos no intervalo $(0, \pi)$ para as funções,

(a) $f(x) = sen\, x$. (b) $f(x) = x + 2\pi$.

16. Seja $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, 2π-periódica, $(c_n)_{\mathbb{Z}}$ a família dos coeficientes de Fourier de f e a n-ésima soma parcial da série de Fourier de f: $S_N(f; x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Verifique:

$$(a) \qquad D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{sen(N + \frac{1}{2})t}{sen\,\frac{1}{2}t}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z} \ ,$$

denominado n-ésimo núcleo complexo de Dirichlet.

$$(b) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1 \ .$$

$$(c) \qquad S_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - s) D_N(s) ds \ .$$