Números Complexos

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES/CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES E SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES E, SÉRIES DE POTÊNCIAS

7.1 - Introdução

7.2 - Sequências de Funções

Neste capítulo X indica um subconjunto de $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.1 Definição. *Para uma* sequência de funções, (f_n), $f_n : X \to \mathbb{K}$, *temos:*

(a) (f_n) converge simplesmente *a* $f : X \to \mathbb{K}$ *se,* $\lim f_n(x) = f(x)\,, \forall x \in X.$

(b) (f_n) converge uniformemente *a* $f : X \to \mathbb{K}$ *se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe um natural* N *tal que* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$.

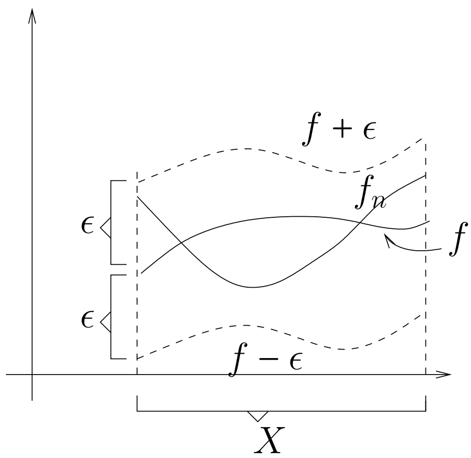

Figura 7.1: Convergência Uniforme sobre $X \subset \mathbb{R}$.

Se (f_n) converge uniformemente a f então (f_n) converge simplesmente a f.

7.2 Exemplo. *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, seja*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n\,, & se\ 0 \leq x < 1\,, \\ 1\,, & se\ 1 \leq x \leq 2\ . \end{cases}$$

É claro que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & se\ 0 \leq x < 1\,, \\ 1\,, & se\ 1 \leq x \leq 2\ . \end{cases}$$

A sequência (f_n) *é de funções contínuas mas* $f(x)$*,* $x \in [0,2]$*, não é contínua.*

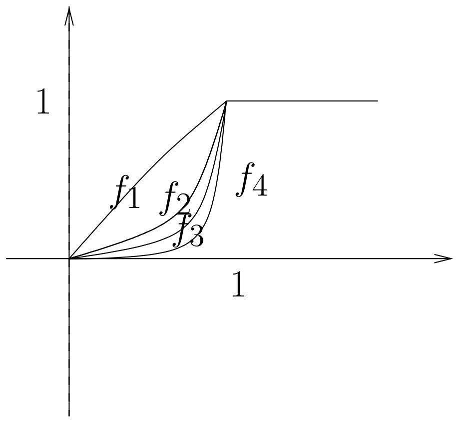

Figura 7.2: Ilustração ao Exemplo 7.2.

7.3 Proposição. *Sejam* (f_n) *e* (g_n) *duas sequências de funções definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{C}$*, convergindo uniformemente às funções* f *e* g*, respectivamente. Seja ainda* λ *uma constante em* $\mathbb{C}$*. Então, as sequências de funções* $(f_n + g_n)$ *e* (λf_n) *convergem uniformente sobre* X *às funções* $f + g$ *e* λf*, respectivamente.*

Prova. É fácil e a deixamos ao leitor ∎

7.4 Teorema. *Se* (f_n) *é uma sequência de funções, em* X*, contínuas em* x_0 *e convergindo uniformemente a* $f : X \to \mathbb{K}$ *então,* f *é contínua em* x_0*.*

Prova.

Seja $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe um natural N tal que para todo $n \geq N$ temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$. Desta forma, como f_N é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ então $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$. Logo, $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$ ∎

7.5 Corolário. *Se* (f_n) *é uma sequência de funções contínuas, em* X*, convergindo uniformemente a* $f : X \to \mathbb{K}$ *então* f *é contínua.*

Prova. Imediata consequência do teorema acima ∎

7.6 Teorema. *Se* (f_n) *é uma sequência de funções contínuas em* $[a.b] \subset \mathbb{R}$*, a valores reais e convergindo uniformemente a* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *então,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Prova.

Pelo Teorema 7.4, f é contínua e, assim, integrável como toda f_n. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,, \forall x \in [a, b]$. Assim sendo, para todo $n \geq N$ temos

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \epsilon\, dx = \epsilon(b-a) \;\blacksquare$$

A hipótese da convergência uniforme para a validade da afirmação no Teorema 7.6 acima é mostrada necessária pelo exemplo abaixo.

7.7 Exemplo. *Seja* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *a sequência de funções dada por,*

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x\,, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x\,, \quad \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0\,, \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1\ . \end{cases}$$

Temos $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$. Computando áreas de triângulos é fácil verificar que $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vide Figura 7.3 a seguir.

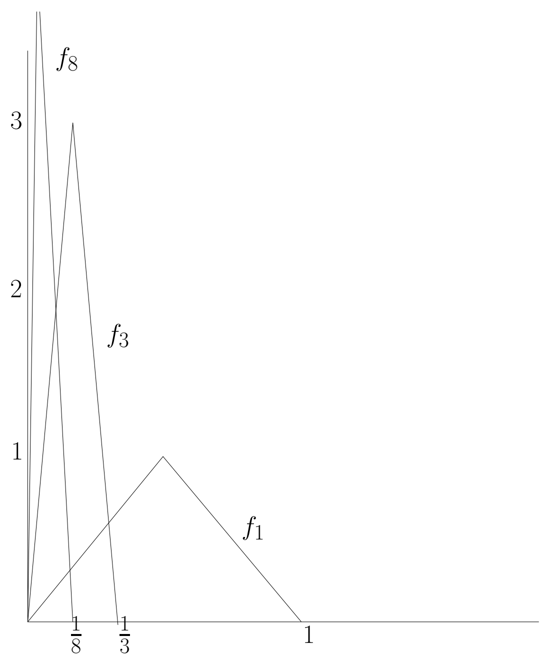

Figura 7.3: Ilustração ao Exemplo 7.7

7.8 Definição. *Seja $C^n([a,b],\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ tais que para todo $k\in\mathbb{N}$, com $0\le k\le n$, a k-ésima derivada $f^{(k)}$ existe no intervalo aberto (a,b) e se estende contínuamente ao intervalo fechado $[a,b]$.*

7.9 Teorema. *Seja $(f_n)\subset C^1([a,b],\mathbb{R})$ tal que (f_n') converge uniformemente a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e, ainda, (f_n) converge simplesmente a uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. Então, F é derivável e $F'=f$. Isto é,*

$$\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

Prova.

Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)dt\,,\ \ \forall x\in[a,b]\ .$$

Pelas hipóteses e pelo Teorema 7.6, tomando o limite para $n\to+\infty$, temos

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt\,.$$

Logo, pelo $2^{\underline{o}}$ Teorema Fundamental do Cálculo, F é derivável e $F'=f$ ■

O exemplo a seguir mostra que não é suficiente a convergência uniforme da sequência de funções (f_n) à função f, com f e f_n de classe C^1, para todo $n\in\mathbb{N}$, para concluirmos que a sequência (f_n') converge simplesmente a f'.

7.10 Exemplo. *A sequência de funções $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx$, com $x\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$, converge uniformemente à função nula dada por $f(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Verificação. De fato, dado $\epsilon>0$ existe um natural N tal que $\frac{1}{N}<\epsilon$ e assim temos $|f_n(x)-0|\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\epsilon$ se $n\ge N$. Mas, a sequência de funções (f_n'), onde $f_n'(x)=\cos nx$, não converge simplesmente pois a sequência $\big(\cos n\frac{\pi}{2}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

7.11 Critério (de Cauchy, para convergência uniforme de uma sequência de funções). *A sequência (f_n) de funções definidas em X e a valores em $\mathbb{K}$ converge uniformemente a $f:X\to\mathbb{K}$ se e somente se para todo $\epsilon>0$ existe um natural N tal que*

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon\,,\forall n,m\ge N,\forall x\in X\ .$$

Prova.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ dado pela convergência uniforme. Então, se $n, m \geq N$ e $x \in X$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Portanto,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \;\leq\; |f_n(x) - f(x)| \;+\; |f_m(x) - f(x)| \;<\; \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\ .$$

($\Leftarrow$) Neste caso, para todo $x \in X$, a sequência numérica $\big(f_n(x)\big)$ é de Cauchy e, convergente. Seja $f(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)$. Dado $\epsilon > 0$ consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$, $\forall x \in X$. Tomando o limite nesta desigualdade para $m \to +\infty$ temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, $\forall n > N$, $\forall x \in X$ ∎

7.3 - Séries de Funções

7.12 Definição. *Seja (f_n) uma sequência de funções em X e a valores em $\mathbb{K}$. Então,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ é a série de funções *cujas somas parciais são as funções*

$$s_n = f_1 + \ldots.. + f_n = \sum_{j=1}^{n} f_j :\; X \to \mathbb{K},\; n \in \mathbb{N}\ .$$

7.13 Definição. *A* série de funções $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge*, sobre seu domínio X, para a função $s : X \to \mathbb{K}$ se, para cada $x \in X$ temos,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$.

7.14 Definição. *Dada a série de funções* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$*, definidas no conjunto X, a função* $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *definida sobre o conjunto dos pontos $x \in X$ em que a série de funções converge é chamada a* soma *da série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

7.15 Definição. *A série de funções* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$*, definidas em X e a valores em $\mathbb{K}$,* converge uniformemente *à função $s : X \to \mathbb{K}$ se a sequência (s_n) de suas somas parciais, onde $s_n = f_1 + \ldots\ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a $s : X \to \mathbb{K}$.*

7.16 Teorema. (Integração termo a termo) *Seja* $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a,b]$, *uma série de funções em* $C([a,b],\mathbb{R})$, *uniformemente convergente. Então, a função* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx \ .$$

Prova. Consequência imediata do Corolário 7.5 e do Teorema 7.6 ■

7.17 Teorema. (Derivação termo a termo) *Seja* $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a,b]$, *uma série de funções de classe* C^1, *a valores reais, tal que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ *converge uniformemente em* $[a,b]$. *Então, a função* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1 *e,*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\,, \forall x \in [a,b] \ .$$

Prova. Segue trivialmente do Teorema 7.9 aplicado à sequência de funções $(s_n) = (f_1 + ... + f_n)$■

7.18 Teorema (Critério de Cauchy para convergência uniforme de uma série de funções). *A série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, *definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{K}$, *converge uniformemente à função* $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *se e somente se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big| < \epsilon\,,\ \ \forall n,m \geq N\,,\ \ \forall x \in X \ .$$

Prova. Consequência imediata do critério de Cauchy para sequências de funções aplicado à sequência $(s_n) = (f_1 + ... + f_n)$ das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ pois,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = |s_m(x) - s_n(x)| \ \ ■$$

7.19 Teorema (Teste M de Weierstrass). *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *uma série de funções, definidas em* X *e a valores em* $\mathbb{K}$, *satisfazendo*

$$|f_n(x)| \leq M_n\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \forall x \in X\,, \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < \infty \ .$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente, em* X, *à função* $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Prova. Pelo Critério 5.16 (Critério de Cauchy para uma série numérica), dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ e $p \in \mathbb{N}$ temos $M_{n+1} + M_{n+2} + ... + M_{n+p} < \epsilon$. Logo, a sequência (s_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ satisfaz: se $n > m > N$ então,

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + ... + f_n(x)| < M_{m+1} + M_{m+2} + ...M_n < \epsilon \ .$$

Tomando o limite na expressão acima para m tendendo a $+\infty$ obtemos então, é fácil ver, $|s_n(x) - s(x)| \leq \epsilon$, para todo $n > N$, para todo $x \in X$ ■

7.4 - Derivada Complexa

A derivada complexa é definida através do limite de quocientes de Newton, como no caso real. Voltaremos a este tópico na seção dedicada às equações de Cauchy-Riemann. Abaixo, os conjuntos Ω, Ω_1 e Ω_2 são abertos em $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função na variável complexa z e z_0 um ponto em Ω.

7.20 Definição. *Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, e $z_0 \in \Omega$, f é* derivável *em z_0 se existir o limite abaixo, dito então a* derivada de f em z_0,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \ .$$

Analogamente ao caso real, a função $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, é derivável em todo ponto e $f'(z) = 2z$. Mas, $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, não é derivável em nenhum z_0. Se $z_0 = 0$, os quocientes $\frac{\overline{z}}{z}$, $z \neq 0$, não tendem a nenhum número se $z \to 0$, o que é óbvio escolhendo $z = x$, $x \neq 0$ e $z = iy$, $y \neq 0$. Se $z_0 \neq 0$ a argumentação é similar.

7.21 Proposição. *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é derivável em $z_0 \in \Omega$ então f é contínua em z_0.*

Prova. Trivial pois,

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = f'(z_0)(z - z_0) = 0 \quad ■$$

7.22 Proposição. *Se $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ são deriváveis em z_0 então, as funções $f+g$, fg, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$), e $\frac{f}{g}$ (supondo $g(z_0) \neq 0$) são deriváveis em z_0. Ainda mais,*

(a) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(b) $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.

(c) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.

Prova.

(a) e (b) Seguem da Definição 7.20 e Proposição 3.57 (a) e (b), respectivamente.

(c) Dividindo $f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0) = [f(z) - f(z_0)]g(z) + f(z_0)[g(z) - g(z_0)]$ por $z - z_0$, $z \neq z_0$, e então computando o limite para $z \to z_0$ da equação

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + f(z_0)\frac{g(z) - g(z_0)}{z_- z_0} \ ,$$

obtemos pela Definição 7.20 e Proposição 7.21 o resultado desejado.

(d) Se $f = 1$, dividindo $\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} = -\frac{g(z) - g(z_0)}{g(z)g(z_0)}$ por $z - z_0$, $z \neq z_0$, obtemos,

$$\frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = -\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \, ,$$

cujo limite para $z \to z_0$ é, pela Definição 7.20 e Proposição 7.21, $-\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}$. Aplicando tal fórmula e o ítem (c) à fatoração $\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$ obtemos (d) ■

Evidentemente então, como $p(z) = z$ é derivável, todo polinômio é derivável.

7.23 Proposição. *Sejam $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ com $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $f(z_0)$ então $g \circ f$ é derivável em z_0 e,*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big)f'(z_0) \ .$$

Prova. Como g é derivável em $w_0 = f(z_0)$, é contínua em $w_0 = f(z_0)$ a função

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & \text{se } w \neq w_0 \, , \\ 0 & \text{se } w = w_0 \ . \end{cases}$$

Escrevendo $g(w) - g(w_0) = [h(w) + g'(w_0)](w - w_0)$, e substituindo $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$ e dividindo por $z - z_0$, $z \neq z_0$, obtemos o quociente de Newton de $g \circ f$,

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \big[h(f(z)) + g'(f(z_0))\big]\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, , z \neq z_0 \ .$$

Analisemos o limite do segundo membro quando $z \to z_0$. Utilizando que f é derivável em z_0 [logo, f é contínua em z_0 e $(h \circ f)$ é contínua em z_0] concluímos que $\lim\limits_{z\to z_0}(h \circ f)(z) = h\big(f(z_0)\big) = h(w_0) = 0$. Logo, o limite citado é $g'(f(z_0))f'(z_0)$ ■

7.5 - Séries de Potências e Propriedades Operatórias

7.24 Definição. *Dada uma sequência* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in \mathbb{C}$*, a série de funções complexas* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$*,* $z \in \mathbb{C}$*, é a* série de potências com coeficientes (a_n), centrada em z_0, ou em torno de z_0.

A série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ é convergente (divergente) no ponto $z = w \in \mathbb{C}$ se a série numérica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(w-z_0)^n$ é convergente (divergente). Através da translação $w = z - z_0$ passamos da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ para a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$. Desta forma, simplificamos a exposição supondo a série centrada em $z_0 = 0$.

Doravante z denotará tanto a variável z como o número $z \in \mathbb{C}$. O contexto indicará o sentido.

7.25 Teorema. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *uma série de potências centrada na origem e*

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty],$$

com $\rho = +\infty$ *se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *e* $\rho = 0$ *se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

(a) Se $|z| < \rho$ *a série converge absolutamente.*

(b) Se $|z| > \rho$ *a série diverge.*

(c) Se $|z| = \rho$ *o critério é inconclusivo sobre a convergência ou divergência.*

(d) A série converge absolutamente e uniformemente em todo disco fechado $\overline{D}(0;r)$ *tal que* $0 < r < \rho$.

Prova. Notemos que, se $z \neq 0$ então

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \ [> 1] \ \text{ se e somente se } \ |z| < \rho \ [> \rho] \ .$$

(a) Se $|z| < \rho$ então $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$ e pelo Critério da Raíz $\sum^{+\infty} |a_n z^n| < \infty$.

(b) Se $|z| > \rho$ então $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$ e pelo Critério da Raíz, $\sum^{+\infty} |a_n z^n| = +\infty$.

(c) Deixamos ao leitor encontrar exemplos ilustrativos.

(d) Segue do ítem (a) e do Teste M de Weierstrass pois é fácil ver que temos $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, para todo $z \in \overline{D}_r(0)$, e $\sum |a_n| r^n < \infty$ ∎

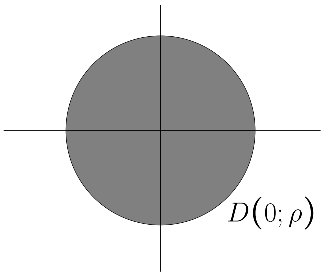

Figura 7.4: O Disco (aberto) de Convergência.

7.26 Definição. *(Hadamard) O raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *é*

$$\rho = \frac{1}{\lim sup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] .$$

Observação. Dada uma sequência (a_n) em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que existe $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, pelo Teorema 5.28 existe $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ e $\rho = \frac{1}{\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Fixada uma série de potências indicamos por ρ o seu raio de convergência.

7.27 Definição. *Dada a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*, com raio de convergência* $\rho > 0$*, o disco aberto* $D(0;\rho)$ *é o* disco de convergência *da série.*

Se $\rho = 0$ temos o disco degenerado $\{z = 0\}$. Se $\rho > 0$ e z pertence ao disco $D(0;\rho)$, pelo Teorema 7.25, a série $\sum^{+\infty} a_n z^n$ converge absolutamente e portanto a sequência $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é somável. Assim sendo, escrevemos brevemente $\sum a_n z^n$ para indicarmos a série de potências $\sum^{+\infty} a_n z^n$.

A seguir mostramos que toda série de potências pode ser desenvolvida como uma série de potências em torno de cada ponto em seu domínio. É importante observar que este fato não é evidente.

7.28 Teorema (Translação). *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$ *convergente em* $D(0;\rho)$*, com* $\rho > 0$*. Então, fixado* $z_0 \in D(0;\rho)$*, existe uma sequência complexa* (b_n) *tal que*

$$f(z) = \sum b_n (z - z_0)^n\,, \quad \forall\, z \in D(z_0; \rho - |z_0|).$$

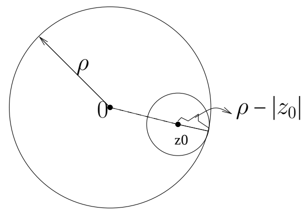

Figura 7.5: Translação.

Prova. Seja z, com $|z_0| + |z - z_0| < \rho$. Como a série de potências dada converge absolutamente em $D_\rho(0)$, são iguais e finitos os valores das somas (não ordenadas)

$$\sum_n |a_n| \big(\, |z_0| + |z - z_0|\,\big)^n \;=\; \sum_n \sum_{0 \le p \le n} |a_n| \binom{n}{p} |z_0|^{n-p}\, |z - z_0|^p.$$

Pela associatividade para somas (não ordenadas) seguem as identidades

$$\sum_n \sum_{0 \le p \le n} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p}\,(z - z_0)^p \;=\; \begin{cases} \sum\limits_n a_n (z_0 \,+\, z - z_0)^n = \sum\limits_n a_n z^n = f(z) \\ \\ \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} \right) (z - z_0)^p \quad \blacksquare \end{cases}$$

Analogamente aos polinômios podemos multiplicar e compor séries de potências. Ainda, vantajosamente, podemos computar o recíproco de uma série de potências.

7.29 Teorema (Produto de Cauchy). *Sejam* $\sum a_n z^n$ *e* $\sum b_n z^n$ *convergentes no disco* $D(0;R)$*, com* $R > 0$*. A série*

$$\sum_{n \ge 0} c_n z^n\,, \quad \textit{com} \;\; c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k\,,\;\; \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

é convergente em $D(0;R)$ *e satisfaz* $\sum c_n z^n = \big(\sum a_n z^n\big)\big(\sum b_n z^n\big)$.

Prova. Seja $z \in D(0;R)$. Como

$$\sum_{n,m} |a_n z^n b_m z^m| = \Big(\sum_n |a_n z^n|\Big) \Big(\sum_m |b_m z^m|\Big) < \infty\,,$$

pela associatividade para somas (não ordenadas) segue,

$$\sum_{n,m} a_n z^n b_m z^m \quad = \quad \begin{cases} (\sum\limits_n a_n z^n)(\sum\limits_m b_m z^m) \\ \\ \sum\limits_n (\sum\limits_{j+k=n} a_j b_k)\, z^n \qquad \blacksquare \end{cases}$$

7.30 Corolário (Potenciação). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$ convergente no disco $D(0;R)$ e p fixo em $\mathbb{N}$. Então, para todo $z \in D(0;R)$ vale*

$$f(z)^p \;=\; \sum b_n z^n\,, \qquad com \;\; b_n = \sum_{n_1+\ldots+n_p=n} a_{n_1}\ldots a_{n_p}\ .$$

Prova. Seja $z \in D(0;R)$. Então temos

$$\infty > \Big(\, \sum |a_n||z|^n \,\Big)^p \;=\; \sum_{n_1\in\mathbb{N}\ldots,n_p\in\mathbb{N}} |a_{n_1}||z|^{n_1}\ldots|a_{n_p}||z|^{n_p}\ .$$

Logo, pela Lei Associativa para somas não ordenadas segue,

$$\sum_{n_1\in\mathbb{N},\ldots,n_p\in\mathbb{N}} a_{n_1}z^{n_1}\ldots a_{n_p}z^{n_p} \;=\; \begin{cases} \big(\sum\limits_{n_1} a_{n_1}z^{n_1}\big)\ldots\big(\sum\limits_{n_p} a_{n_p}z^{n_p}\big) \;=\; \big(\sum\limits_n a_n z^n\,\big)^p \\ \\ \sum\limits_n \Big(\sum\limits_{n_1+\ldots+n_p=n} a_{n_1}\ldots a_{n_p}\Big) z^n \quad \blacksquare \end{cases}$$

7.31 Teorema (Composição). *Sejam $f(z) = \sum a_n z^n$ e $g(z) = \sum b_m z^m$ convergentes em $D(0;R), R > 0$. Se $|g(0)| < R$, então existe $r > 0$ tal que*

$$f(g(z)) = \sum c_m z^m\,, \quad \forall z \in D(0;r)\ .$$

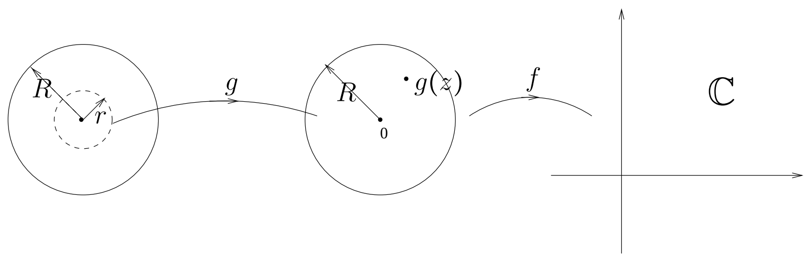

Figura 7.6: Teorema (Composição).

Prova. Por hipótese temos $|b_0| = |g(0)| < R$. Logo, por continuidade podemos escolher $0 < r < R$, tal que $\sum |b_m||z|^m < R$ se $z \in D(0;r)$. Assim, fixando um tal z, devido à convergência absoluta da série $\sum a_n z^n$ em $D(0;R)$ obtemos

$$\infty > \sum_n |a_n| \Big(\sum_m |b_m||z|^m \Big)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \sum_{m_1 \in \mathbb{N}, \ldots, m_n \in \mathbb{N}} |b_{m_1}||z|^{m_1} \ldots |b_{m_n}||z|^{m_n} \ .$$

Então, pela associatividade para somas não ordenadas segue,

$$\sum_n a_n \sum_{m_1, \ldots, m_n} b_{m_1} z^{m_1} \ldots b_{m_n} z^{m_n} = \begin{cases} \sum\limits_n a_n \Big(\sum\limits_m b_m z^m \Big)^n = f\big(g(z)\big) \\ \\ \sum\limits_m \Big(\sum\limits_n a_n \sum\limits_{m_1 + \ldots + m_n = m} b_{m_1} \ldots b_{m_n} \Big) z^m \end{cases} \blacksquare$$

7.32 Proposição (Recíproco). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, $z \in D_r(0)$, $r > 0$, tal que $a_0 \neq 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que vale o desenvolvimento em série de potências*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum b_n z^n \ , \ \forall z \in D_\delta(0) \ .$$

1ª Prova.

Dividindo $f = f(z)$ por a_0 se necessário, supomos $a_0 = 1$. Por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{n \geq 1} |a_n z^n| < 1$ se $|z| < \delta$. Indiquemos $c_n = -a_n$, $\forall n \geq 1$, e $-\sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum c_n z^n$. Assim, se $|z| < \delta$, temos as identidades finitas

$$1 + \sum |c_n z^n| + \Big(\sum |c_n z^n| \Big)^2 + \ldots = \sum_p \Big(\sum_n |c_n||z|^n \Big)^p = \sum_p \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p} |c_{n_1}||z|^{n_1} \ldots |c_{n_p}||z|^{n_p} \ .$$

Então, pela associatividade para somas (não ordenadas) seguem as identidades,

$$\sum_p \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p} c_{n_1} z^{n_1} \ldots c_{n_p} z^{n_p} = \begin{cases} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum c_n z^n \Big)^p = \frac{1}{1 - \sum c_n z^n} = \frac{1}{1 + \sum a_n z^n} = \frac{1}{f(z)} \ , \\ \\ \sum\limits_{N=0}^{+\infty} b_N z^N \ , \qquad b_N = \sum\limits_{n_1 + \ldots + n_j = N} c_{n_1} \ldots c_{n_j} \ . \end{cases}$$

2ª Prova.

Suponhamos $a_0 = 1$. Então, $g(z) = 1 - f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ e $h(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$ estão definidas em torno de zero e $g(0) = 0$. Pelo Teorema 7.31 existe $\delta > 0$ tal que $h(g(z)) = \frac{1}{1 - [1 - f(z)]} = \frac{1}{f(z)}$ é uma série de potências sobre o disco $D_\delta(0)$ $\blacksquare$

Abusando da notação escrevemos por praticidade $\sum n a_n z^{n-1}$ para uma série de potências $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ visto que $0 a_0 = 0$, qualquer que seja $a_0 \in \mathbb{C}$.

7.33 Teorema (Derivação). *As séries* $f(z) = \sum a_n z^n$ *e* $g(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ *tem mesmo disco de convergência* $D(0;\rho)$*. Se* $\rho > 0$ *temos,*

$$f'(z) = g(z)\,, \ \forall z \in D(0;\rho)\ .$$

Prova. Dividamos a prova em duas partes complementares.

(a) Da desigualdade $\sum_{n\geq 1} |a_n z^n| \leq |z| \sum_{n\geq 1} |n a_n z^{n-1}|$ segue: o disco de convergência de g está contido no disco de convergência de f. Ainda, se o disco de convergência de f é degenerado então o de g também o é (fim do caso trivial).

(b) Suponhamos f convergente em $D(0;\tau)$, $\tau > 0$. Fixemos $R > 0$ e z satisfazendo $|z| < R < \tau$. Seja h tal que $0 < |h| < r = R - |z|$. Para $n \geq 2$ obtemos

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n z^{n-1} + h \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} h^{p-2}$$

e portanto,

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} |z|^{n-p}\, r^p \leq \frac{|h|}{r^2} R^n\ .$$

Logo, $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente e g converge em $D(0;\tau)$. Por fim,

$$\left| \sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum |a_n| R^n \xrightarrow{h\to 0} 0 \ \blacksquare$$

7.34 Corolário. *Seja* $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *com raio de convergência* $\rho > 0$*. Então,* f *é infinitamente derivável no seu disco de convergência e,*

(a) $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n\geq k} n(n-1)....(n-k+1) a_n z^{n-k} = \sum\limits_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

(b) f *é dada por sua série de Taylor centrada em* 0*,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\ .$$

(c) Se $f(z) = 0, \forall z \in D_\rho(0)$*, então* $a_n = 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

Prova. Do Teorema 7.33 segue, por recursão, que f é infinitamente derivável no seu disco de convergência e também o ítem (a).

(b) Substituindo $z = 0$ em (a) obtemos $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Logo, $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

(c) Segue de (b) $\blacksquare$

7.35 Teorema (Taylor). *Seja* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *com raio de convergência* $\rho > 0$. *Dado* $z_0 \in D(0;\rho)$, *é válida a propriedade*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \ , \ \forall\, z \in D(z_0; \rho - |z_0|).$$

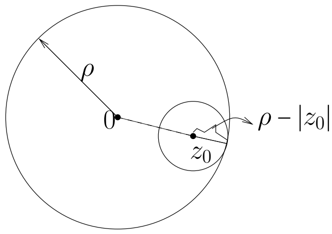

Figura 7.7: Teorema de Taylor.

Prova.

Segue do Teorema 7.28 (Teorema de Translação) e do Corolário 7.34 ■

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ é a série de Taylor de f em torno de z_0.

7.36 Corolario. *Seja* $f(z) = \sum a_n z^n$ *uma série de potências com disco de convergência* $D(0;\rho)$, $\rho > 0$, *e* $z_0 \in D(0;\rho)$ *tal que* $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \geq 0$. *Então, f é identicamente nula e* $a_n = 0\,, \forall n \geq 0$.

Prova. Consideremos $X = \{w \in D_\rho(0) : f^{(n)}(w) = 0, \forall n \geq 0\}$.

Se $w \in X$, pelo Teorema 7.35 temos $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n = 0$, se $z \in D(w;r)$, para algum $r > 0$. Portanto segue que $D(w;r) \subset X$ e, assim, X é aberto.

Também $D(0;\rho) \setminus X$ é aberto: se $\omega \in D(0;\rho) \setminus X$ existe m tal que $f^{(m)}(\omega) \neq 0$ e então, pela continuidade de $f^{(m)}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $f^{(m)}(z) \neq 0$, $\forall z \in D_\epsilon(\omega)$ e portanto $D_\epsilon(\omega) \subset D(0;\rho) \setminus X$. Logo, o conexo $D_\rho(0)$ é união disjunta de dois abertos e assim um deles é o conjunto vazio. Como $z_0 \in X$, temos $X = D_\rho(0)$ e $f = 0$. Por último, sendo $f^{(n)}(0) = a_n n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluímos $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

A seguir mostramos dois resultados para séries de potências análogos a conhecidos resultados para polinômios. O primeiro corresponde ao fato de que um polinômio de grau $n \geq 1$ tem zeros isolados. O segundo corresponde ao fato de que um polinômio é determinado pelo seu valor em $n+1$ pontos distintos.

7.37 Corolario (Princípio dos Zeros Isolados para séries de potências). *Consideremos $f(z) = \sum a_n z^n$ com raio de convergência $\rho > 0$ e f não nula. Se $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D(0;\rho)$, existem $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, e uma série de potências g definida em um disco $D(z_0;\delta)$, $\delta > 0$, tais que para todo $z \in D(z_0;\delta)$ vale,*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \ \text{ e } \ g(z) \neq 0 \ .$$

Prova. Seja $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, com $z \in D(z_0;\rho')$ e $\rho' > 0$, o que é garantido pelo Teorema 7.35. Como $f \neq 0$ e $f^{(0)}(z_0) = f(z_0) = 0$, pelo Corolário 7.36 existe o primeiro natural $m \geq 1$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Assim, indicando $b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \big[b_m + b_{m+1}(z - z_0) + b_{m+2}(z - z_0)^2 + ... \big]$$

donde, notando que para $z - z_0 \neq 0$ a série no lado esquerdo converge se, e só se, a série no lado direito converge, concluímos que ambas convergem em $D_{\rho'}(z_0)$. Desta forma, $g(z) = \sum\big[b_m + b_{m+1}(z - z_0) + b_{m+2}(z - z_0)^2 + ...\big]$ é tal que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e} \quad g(z_0) = b_m \neq 0 \quad \text{se} \quad z \in D(z_0;\rho') \ .$$

Para finalizar, escolhemos $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \rho'$ e $g(z) \neq 0$ se $z \in D(z_0;\delta)$ ■

7.38 Corolário (Princípio da Identidade para séries de potências). *Sejam $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ convergentes em $D(0;R)$ e $X \subset D(0;R)$ um conjunto com ponto de acumulação em $D(0;R)$. É válida a propriedade abaixo:*

$$\textit{se } \sum a_n z^n = \sum b_n z^n \,, \forall z \in X \,, \ \textit{então temos } a_n = b_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Prova. Efetuando a subtração $\sum a_n z^n - \sum b_n z^n = \sum (a_n - b_n) z^n$ vemos que podemos supor $b_n = 0, \forall n$. Suponhamos então que z_0 é um ponto de acumulação de zeros de $f(z) = \sum a_n z^n$. Pela continuidade de f temos $f(z_0) = 0$. Então, se f não é nula, pelo Princípio dos Zeros Isolados z_0 é o único zero de f em algum $D(z_0;r), r > 0$, o que contradiz a hipótese. Concluímos então que $f(z) = \sum a_n z^n = 0$, $\forall z \in D(0;R)$, e portanto $a_n = f^{(n)}(0)(n!)^{-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 7

1. Determine o domínio de convergência da série e esboce o gráfico de f:

   (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

2. Para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ valem as identidades

$$(a) \qquad e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + \ldots + e^{nit} = \frac{e^{nit} - 1}{1 - e^{-it}} = \frac{sen(n\frac{t}{2})}{sen(\frac{t}{2})} e^{i(n+1)\frac{t}{2}} \; .$$

$$(b) \qquad \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\operatorname{sen}\frac{nt}{2} \cos(n+1)\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{t}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \; ,$$

   este é o n-ésimo núcleo de Dirichlet.

$$(c) \qquad \operatorname{sen} t + \ldots + \operatorname{sen} nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{nt}{2} \operatorname{sen}(n+1)\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \; ,$$

   este é o n-ésimo núcleo conjugado de Dirichlet .

   Sugestão: compute as partes real e imaginária da expressão em (a).

3. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ convergem, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Sugestão: Utilize o exercício anterior e o critério de Dirichlet.

4. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

   (a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

   (b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = n$.

   (c) $f_n(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n$, se $x \neq 0$ e $f_n(0) = 1$, onde $X = \mathbb{R}$.

   (d) $f_n(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2}$, com $X = \mathbb{R}$.

   (e) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, com $X = \mathbb{R}$.

   (f) $X = [0,1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x \, , \; 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - x \, , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \; . \end{cases}$$

5. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

   (a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7}$, onde $X = \mathbb{R}$.

   (b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$, onde $X = [0, +\infty)$.

   (c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, onde $X = \mathbb{R}$.

6. Determine o limite $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, onde $x \in [0,1]$, e mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx\,, \qquad \text{supondo}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x\,, \ 0 \le x \le \frac{1}{2n}\,, \\ n^2(\frac{1}{n} - x)\,, \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}\,, \\ 0\,, \frac{1}{n} \le x \le 1\ . \end{cases}$$

7. Sendo $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$, mostre que f_n converge simplesmente a f (determine f) mas não uniformemente. Ainda assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)dx = \int_{-1}^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\ .$$

8. Para cada $n \ge 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (a) Determine o domínio de convergência da sequência (f_n). Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

   (b) A convergência da sequência (f_n) à função f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre o intervalo $[r, +\infty), r > 0$?

9. Para cada $n \ge 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

   (b) A convergência é uniforme sobre $[0,1]$? Justifique. Vide sugestão no livro.

   (d) Mostre que $\int_0^1 [\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)]\,dx \ \neq \ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

10. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

    (a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$. (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

11. Mostre que a função dada é contínua.

    (a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$. (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

12. Seja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$.

13. Sejam $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências em $\mathbb{R}$. Suponhamos que

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \,], \quad x \in [-\pi, +\pi],$$

    a convergência sendo uniforme. Mostre que:

    (i) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx \, dx \,, \forall\, n \geq 0$.

    (ii) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \operatorname{sen} nx \, dx \,, \forall\, n \geq 1$,

    A série é acima é a série de Fourier de F e os números $a_n, n \geq 0$, e $b_n, n \geq 1$, são os coeficientes de Fourier de F.

14. Determine os coeficientes de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

15. Determine os coeficientes de Fourier de $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

16. (a) Descreva o domínio da função $g(z) = \frac{y}{x} + \frac{1}{1-y} i$, $(z = x + iy)$.

    (b) Seja $\Omega = \{x + iy : x > 0 \text{ e } |y| < 1\}$ e considere a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = y \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt + i \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \,, \quad z = x + iy \in \Omega \,.$$

    Mostre que $\Omega \subset \operatorname{Dom}(g)$ e que $f(z) = g(z)$, $\forall z \in \Omega$.

17. Mostre que a função Re: $z \in \mathbb{C} \mapsto \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{C}$ não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

18. Considerando o isomorfismo canônico entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, dado Ω aberto em $\mathbb{C}$ indiquemos por $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ o aberto identificado a Ω por tal isomorfismo. Ainda, dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ indiquemos por $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ a função:

$$\tilde{f}(x,y) = \Big(\mathrm{Re}(f(z)),\ \mathrm{Im}(f(z))\Big), \quad z = x + iy \ .$$

Suponha que existe $f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ [em breve veremos que se existe f' então existe $f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$]. Então, verifique os itens abaixo.

(a) Mostre que $\tilde{f}$ é de classe C^2.

(b) Compute a matriz jacobiana de $\tilde{f}$ e mostre que o determinante jacobiano de $\tilde{f}$ no ponto $(x,y) \in \tilde{\Omega}$ é $|f'(z)|$, com $z = x + iy$.

19. Mostre que para uma função $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são equivalentes :

(i) L é $\mathbb{C}$-homogênea [isto é, $L(zw) = zL(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$].

(ii) L é $\mathbb{C}$-linear.

(iii) L é uma homotetia; isto é, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L(z) = \lambda z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

BIBLIOGRAFIA

1. Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis - An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hiil, Inc., 1979.

2. Aigner, M., and Ziegler, G. M., *Proofs from THE BOOK*, 4th ed., Springer, 2010.

3. Apostol, T. M., *Calculus*, 2nd. ed., Ed. Waltham/Blaisdell, 1967-1969.

4. Aragona, J. *Números Reais*, 1ª ed., Editora da Física, 2010.

5. Argand, J. R., "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse", *Annales de Mathemátiques Pures et Appliquées*, tome 5 (1814-1815), p. 197-209.

6. Argand, J. R., *Imaginary Quantities: Their Geometrical Interpretation*, University Michigan Library, 2009.

7. Argand, J. R., *Essay Sur Une Manière de Représenter Les Quantités Imaginaires Dans Les Contructions Géométriques*, Nabu Press, 2010.

8. Bak, J., Ding, P., and Newman, D. J., "Extremal Points, Critical Points, and Saddle Points of Analytic Functions", *American Mathematical Monthly* **114** (2007), pp. 540-546.

9. Bak, Joseph and Newman, Donald J., *Complex Analysis*, 3rd. ed., UTM, Springer, 2010.

10. Beardon, Alan F., *Complex Analysis - The Argument Principle in Analysis and Topology*, A Wiley-Interscience Publication, 1979.

11. Beardon, Alan F., *Limits - A New Aproach to Real Analysis*, UTM, Springer, 1991.

12. Boas, H. P., " Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma", *American Mathematical Monthly* **117** (2010), pp. 770-785.

13. Boas, R. P., *Invitation to Complex Analysis*, Mathematical Association of America, 2nd. ed., 2010.

14. Boulos, P., *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries*

15. Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blucher, 1974.

16. Bressoud, David, *A Radical Approach to Real Analysis*, 2nd ed., The Mathematical Association of America, 2006.

17. Burckel, Robert B., *An Introduction to Classical Complex Analysis - Vol 1*, Mathematische Reihe, Birkhäuser, 1979.

18. Burckel, R. B., "Fubinito (Immediately) Implies FTA", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 344-347.

19. Burckel, R. B., " A Classical Proof of the Fundamental Theorem of Algebra Dissected", *Mathematics Newsletter of the Ramanujan Matehmatical Society*, Vol. 17, No. 2 (September 2007), pp. 37-39.

20. Busam, R. and Freitag, E. , *Complex Analysis*, 2nd edition, Universitext, Springer (2008).

21. Carathéodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol. 1, 2nd english edition, Chelsea Publishing Company (1964).

22. Cater, F. S., " An Elementary proof that analytic functions are open mappings", *Real Analysis Exchange*, Vol **27(1)**, 2001/2002, pp. 389-392.

23. Cauchy, A. L., *Cours d'Analyse*, Vol VII, Première Partie, Chapitre X, Editrice CLUEB, Bologna 1990.

24. Chrystal, G., *Algebra, An Elementary Text-book*, Part I, sixth edition, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1952.

25. Churchill, R. V., *Variáveis Complexas e Aplicações*, EDUSP/McGraw-Hill, 1975.

26. Connell, E. H. and Porcelli, P., "Power Series Development without Cauchy's Formula", *Bulletin of the American Mathematical Society* **67** (1961), pp. 177-181.

27. Connell, E. H. and Porcelli, P., "An Algorithm of J. Schur and the Taylor Series", *Proceedings of the American Mathematical Society* **13** (1962), pp. 232-235.

28. Conway, John B., *Functions of One Complex Variable I*, 2nd ed., GTM, Springer, 2000.

29. Doxiadis, A. e Papadimitriou, C. H., *Logicomix - Uma Jornada Épica em Busca da Verdade*, Ed. Martins Fontes, 2010.

30. Estermann, T., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *Journal of The London Mathematical Society*, 31 (1956), pp. 238-240.

31. Fefferman, C., "An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 854-855.

32. Fine, B. and Rosenberger, G., *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1997.

33. Fitzpatrick, P. M., *Advanced Calculus*, 2nd. ed., Pure and Applied Undergrad. Texts, AMS, 2009.

34. Gamelin, Theodore W., *Complex Analysis*, UTM, Springer, 2000.

35. Gauss, C. F., *Werke*, Volume 3, 33-56 (in latin; English translation available at http:www.cs.man. ac.uk/~pt/misc/gauss-web.html).

36. Guidorizzi, Hamilton L., *Um Curso de Cálculo - Volume 4*, 5ª ed., LTC Editora, 2002.

37. Hairer, E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, UTM, Springer, 1991.

38. Hurwitz, A. and Courant, R., "Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **3**, Springer-Verlag (4th ed. 1964), Berlin.

39. Jack, I. S., "Functions starlike and convex of order α", *Journal of the London Mathematical Society* (2) **3** (1971), pp. 469-474.

40. Jahnke, Hans Niels, editor, *A History of Analysis*, History of Mathematics Vol 24, AMS and LMS, 2003.

41. Jensen, J. L. W. V., "Recherches sur la Théorie des Équations", *Acta Mathematica*, Vol **36** (1912), pp. 181-195 .

42. Kakutani, S., and Nagamo, M., "About the functional equation $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z + e^{(2\nu\pi/n)i}\xi) = nf(z)$.", *Zenkoku Shijô Danwakai* **66** (1935), pp. 10-12 (in japanese).

43. Knapp, Anthony W., *Basic Real Analysis*, Cornestones, Birkhäuser, 2005.

44. Knopp, Konrad, *Theory and Application of Infinite Series*, reprint of the 2nd. English ed. 1951, Dover Publications Inc., 1990.

45. Kochol, M., "An Elementary Proof of The Fundamental Theorem of Algebra", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30 (1999), 614-615.

46. Körner, T. W., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 347-348.

47. Lang, Serge, *Complex Analysis*, 4th ed., GTM, Springer, 2000.

48. Leland, K. O., "A polynomial approach to topological analysis", *Compositio Mathematica*, tome **17** (1965), pp. 291-298.

49. Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.

50. Littlewood, J. E., "Mathematical notes (14): Every polynomial has a root", *Journal of The London Mathematical Society* 16 (1941), pp. 95-98.

51. Narasimhan, Raghavan and Nievergelt, Yves, *Complex Analysis in One Variable*, 2nd ed., Birkhäuser, 2001.

52. Neto, Alcides Lins, *Funções de Uma Variável Complexa*, IMPA, 2005.

53. Oliveira, O. R. B., "The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof", *The Mathematical Intelligencer* 33, No. 2, (2011), 1-2. DOI: 10.1007/s00283-011-9199-2.

54. Osserman, R., " From Schwarz to Pick to Ahlfors and Beyond", *Notices of the AMS*, Vol. **46**, number **8** (1999), pp. 868-873.

55. Pólya, G. and Szegö, G., *Problems and Theorems in Analysis I*, Classics in Mathematics, Reprint of the 1978 edition, Springer, 1991.

56. Porcelli, P. and Weiner, L. M., "A derivation of Cauchy's Inequality for Polynomials", *Revista de Matematica y Fisica Teorica*, vol **11** (1957), pp. 25-28.

57. Read, A. H., "Higher Derivatives of Analytic Functions from the Standpoint of Topological Analysis", *Journal of the London Mathematical Society* **36** (1961), pp. 345-352.

58. Redheffer, R. M., "What! Another Note Just on the Fundamental Theorem of Algebra?", *The American Mathematical Monthly*, Vol 71, No. 2. (Feb., 1964), pp.180-185.

60. Remmert, R., *Theory of Complex Functions*, GTM, v. 122., Springer, 1991.

61. Remmert, R., "The Fundamental Theorem of Algebra", in H. -D. Ebbinghaus, et al., eds., *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, no. 123, Springer-Verlag, New York, 1991, Chapters 3 and 4.

62. Rudin, W., *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, 1971.

63. Searcóid, M. O., *Elements of Abstract Analysis*, Springer-Verlag, London 2003.

64. Simmons, George F., *Cálculo com Geometria Analítica - Vol 2*, Pearson Makron Books, 1988.

65. Shilov, G. E., *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Public. Inc., 1973.

66. Soares, Marcio G., *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 4. ed., 2007.

67. Spiegel, M. R. and Lipschutz, S., and Schiller, J. J., and Spellman, D., Complex Variables, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, 2nd ed., 2009

68. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, Inc., 2008.

69. Stillwell, J., *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 266-275.

70. Vaggione, D., "On The Fundamental Theorem of Algebra". *Colloquium Mathematicum* 73 No. 2 (1997), 193-194.

71. Walsh, J. L., " A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials", *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol. 42 (1936), pp. 923-936.

72. Whyburn, G. T., "The Cauchy Inequality in Topological Analysis", *Proceedings of the National Academy of Sciences* **48** (1962), pp. 1335-1336.

73. Whyburn, G. T., *Topological Analysis*, Revised Ed., Princeton Unversity Press, 1964.