NÚMEROS COMPLEXOS

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES / CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

5.1 - Introdução

Talvez o mais antigo e famoso argumento envolvendo um somatório infinito seja o paradoxo "Dicotomia", de Zenão de Eléia (entre 490 e 485 - c. 430 a.C.),

"Um corredor nunca pode chegar ao fim
de uma corrida pois antes de chegar
ao fim, ele precisa chegar ao meio.
Depois, ao meio do que falta
e assim sucessivamente ad infinitum".

Atualmente, interpretamos tal paradoxo como o cômputo do somatório dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $1/2$ e, é claro, tal soma é 1. Porém, para Zenão um somatório infinito não poderia ter soma finita. Quase um século depois, Eudoxo (408-355? a.C.) utilizou somatórios infinitos e computou áreas e volumes (método da exaustão).

Somatórios infinitos enumeráveis são a base do cálculo integral e surgem também com a fórmula de Taylor e outros processos de aproximação. Tendo definido uma forma de somar, dada uma sequência investigaremos se é possível atibuir a ela um valor (a soma da série) e veremos que com frequência não seremos capazes de responder qual é este valor.

O axioma do supremo é a ferramenta teórica a indicar a soma de uma série de termos positivos. Na prática, comparamos a série com uma série geométrica para decidir se existe ou não a soma da série [vide Exemplos 3.53 1(d) e 1(e)]. Séries de números reais que apresentam tanto termos positivos como termos negativos requerem, em geral, cuidados extras e para estas mostraremos uns poucos critérios neste capítulo e o Teorema de Riemann[1] no próximo capítulo. Séries de números complexos são, é fácil intuir, redutíveis a duas séries de números reais.

Com a teoria de séries infinitas introduzida neste capítulo apresentaremos a importante série binomial complexa.

As séries condicionalmente convergentes e as séries absolutamente convergentes, introduzidas neste capítulo, serão analisadas mais detidamente no capítulo 6 (Somas Não Ordenadas).

[1] O tedesco G. F. B. Riemann (1826-1866) criou a geometria que veio a ser utilizada na física relativística.

5.2 - O Limite de uma Série Convergente. Propriedades Operatórias

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Na definição a seguir enfatizamos que uma série é determinada por uma sequência e uma particular forma de somá-la.

5.1 Definição. *Dada uma sequência* $(a_n) \subset \mathbb{K}$*, a* série de termo geral a_n *[ou* série gerada pela sequência (a_n)*] é o par ordenado* $\big((a_n),(s_n)\big)$*, com* (s_n) *a* sequência das somas parciais de (a_n) *e* $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* a soma parcial de ordem n *da série.*

5.2 Definição. *A série de termo geral* a_n *é* convergente *se* (s_n) *é convergente e, neste caso,* $s = \lim_{n\to+\infty} s_n \in \mathbb{K}$ *é a* soma da série *[ou* limite da série*] indicada por* $s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*. A série de termo geral* a_n *é* divergente *se* (s_n) *é divergente.*

Por tradição indicamos ambiguamente a série $\big((a_n),(s_n)\big)$ pelos símbolos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n\geq 0} a_n$ ou $\sum^{+\infty} a_n$, que denotam a soma da série de termo geral a_n, se esta converge.

Indicamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge por $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty$ e pomos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty$ se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$, onde s_n, $n \in \mathbb{N}$, é a soma parcial de ordem n da série considerada. Ainda, escrevemos $\sum_{n\geq p} a_n = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ para indicar a sequência das somas parciais da sequência (b_n), com $b_n = 0$ se $n < p$ e $b_n = a_n$ se $n \geq p$.

Para analisarmos se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ou não podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois fixado $p \in \mathbb{N}$ temos,

$$s_n = s_p + \sum_{m=p+1}^{n} a_m\,,\ \forall\ n > p\,,$$

e é claro que existe $\lim_{n\to+\infty} s_n$ se e só se existe $\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=p+1}^{n} a_m$, isto é, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e só se $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge. Ainda, se uma destas séries converge então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n\,,\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ .$$

5.3 Proposição. *Seja* $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *A série* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge se, e só se, a sequência das somas parciais,* $s_n = a_1 + ... + a_n$*, é limitada.*

Prova. Imediata consequência do Axioma do Supremo ■

5.4 Proposição. *O espaço das séries convergentes em* $\mathbb{K}$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Isto é, dadas* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *séries convergentes em* $\mathbb{K}$ *e* λ *arbitrário em* $\mathbb{K}$ *então, as séries* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n$ *são convergentes em* $\mathbb{K}$ *e, ainda mais,*

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Prova. Segue da Proposição 3.28 (a) e (b). Deixamos a verificação ao leitor. ■

5.5 Proposição (Condição Necessária). *Se* $\sum^{+\infty} a_n$ *converge então* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Prova.

Como $s_{n+1} - s_n = a_n\,, \forall n$, e por hipótese existe $\lim_{n\to+\infty} s_n = x = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n \;=\; x - x \;= 0 \quad ■$$

5.6 Exemplo. *A série* $\sum^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{2})$ *diverge pois,* $\lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}) \neq 0$.

5.7 Exemplo. *A* série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ ... \ + z^n \ldots, z \in \mathbb{C}$*, satisfaz:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\ , \ \ \textit{se } |z| < 1\,, \ \ \textit{e} \ \ \textit{diverge se } |z| \geq 1\,.$$

Verificação.

Pela fórmula para a soma de uma progressão geométrica finita temos,

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,, \text{ se } z \neq 1\,,$$

e já vimos que $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$, se $|z| < 1$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty}(1 + z + z^2 + ... + z^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1-z}\,, \text{ se } |z| < 1\ .$$

Se $|z| \geq 1$ temos $\lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$ e então, pela Proposição 5.5 a série dada diverge ■

A seguir ilustramos geométricamente a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q > 0$ e $q \neq 1$. Notemos que se θ é o ângulo indicado na Figura 5.1, a cotangente de θ é

$$\cot\theta = \frac{1 + q + ... + q^n + ...}{1} = \frac{1}{1-q} = \frac{q}{q-q^2} = ... = \frac{q^n}{q^n - q^{n+1}} = ... \quad .$$

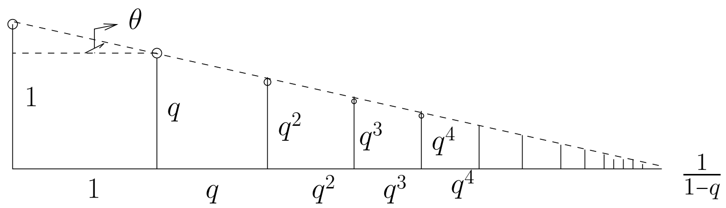

Figura 5.1: Série Geométrica de Razão $q > 0$, $q \neq 1$.

5.8 Definição. A série de Taylor[2] *de* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, *em torno de* x_0, *calculada em* x, *é*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ .$$

A série de Taylor de f avaliada em x pode convergir ou não a $f(x)$ e pode divergir (v. Exercícios). O polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 é

$$P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ .$$

O erro cometido ao aproximarmos $f(x)$ por $P_n(x)$ é

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \ .$$

A série de Taylor de f no ponto x converge a $f(x)$ se, e só se, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

No apêndice provamos as fórmulas de Taylor com resto infinitesimal, integral, de Cauchy e de Lagrange.

5.9 Definição. *A* série de Maclaurin[3] *de uma função* $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, *com* $r > 0$ *e* $f \in C^\infty$, *é a série de Taylor de* f *em torno do ponto* $x = 0$.

[2] B. Taylor (1715). Tal série já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

[3] O escocês C. Maclaurin (1698-1746), em 1742. Alguns matemáticos a anteciparam e Gregory já as conhecia para $\tan x$, $\sec x$, $arcsec\, x$ e $\arctan x$, vide Exemplo 3.14. Clio, a musa da história, é com frequência caprichosa ao batizar teoremas.

5.10 Exemplos. *As séries de Maclaurin das funções reais e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.*

(a) Pela Proposição 3.86 segue que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange para a função $\operatorname{sen} x$ na origem temos, fixado $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}'(0)x + \operatorname{sen}''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \operatorname{sen}^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

para algum $\overline{x}$ entre 0 e x. É claro que $\operatorname{sen} n^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x$ e também $\operatorname{sen}^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ e assim, $\operatorname{sen}^{(2n)}(0) = 0$ e $\operatorname{sen}^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Ainda mais, é óbvio que $\left|\operatorname{sen}^{(k+1)}(\overline{x})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$ sendo que pelo Exemplo 3.53 2(b) temos $\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$ quando $k \to +\infty$. Logo,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(c) Similarmente a (b) temos $\cos^{(2n)} x = (-1)^n \cos x$, $\cos^{(2n+1)} x = (-1)^{n+1} \sin x$, $\cos^{(2n)} 0 = (-1)^n$, $\cos^{(2n+1)} 0 = 0$ e

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

5.11 Exemplo. A série harmônica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, *diverge*[4]. *Vide Exemplo 3.53 1(c).*

5.12 Exemplo. A série harmônica generalizada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, *converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.*

Verificação. Fixo $p > 1$, se s_{2^n-1} é a (2^n-1)-ésima soma parcial da série temos

$$s_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right]$$

$$< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}, \forall n,$$

e como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é uma série de termos positivos, a sua sequência (s_n) das somas parciais é limitada e pela Proposição 5.3 a série converge. Desta forma, se $p \leq 1$ temos $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ e, pelo Exemplo 5.11, a série dada diverge.

[4]N. Oresme (1323?-1382), parisiense e bispo católico, provou este resultado em 1350, um grande feito à época.

5.3 - Convergências Absoluta e Condicional. Critério de Cauchy.

5.13 Definição. *A série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é*

(a) absolutamente convergente *se* $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

(b) condicionalmente convergente *se é convergente e* $\sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

5.14 Exemplo. *Mostremos a convergência da série para* $\log x$, *chamada* série de Mercator*(1668)*[5], *e a convergência condicional da* série harmônica alternada *dadas respectivamente por:*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... \ , \ -1 < \ x \leq \ 1 \, ,$$

$$\log 2 \quad = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \ (-1)^n \frac{1}{n+1} \ + ...$$

Verificação.

Da progressão geométrica $1 - t + t^2 - t^3 + ...(-t)^n = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$, $t \neq -1$, obtemos

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ...(-t)^n + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \ , \quad t \neq -1 \quad ,$$

que integrando acarreta

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \, , \ x \in (-1,1] \, .$$

Caso $x \in [0,1]$: se $0 \leq t \leq x \leq 1$ então temos $1 \leq 1+t$ e

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \right| \leq \int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \, .$$

Caso $x \in (-1,0)$: se $-1 < x \leq t \leq 0$ então $0 < 1+x \leq 1+t \leq 1$, $1 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}$ e,

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \right| \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |(-t)^{n+1}|\,dt = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{(1+x)(n+2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \ \blacksquare$$

[5] O danês N. Mercator (1620-1687), que desenhou as fontes de Versailles. Pietro Mengoli (1625-1686), também danês e um dos principais precursores do estudo de séries infinitas, obteve o mesmo resultado e chamou de logaritmo natural os valores determinados por tal série.

5.15 Exemplos *Mostremos a convergência da série para* $\arctan x$*, dita* série de Gregory*(1671)*[6] *e da* série de Leibnitz*, dadas respectivamente por:*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \ , \ |x| \le 1 \, ,$$

$$\textit{(Leibnitz)} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ...(-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} + ... \ .$$

Verificação.

Similarmente ao Exemplo 5.14, integrando

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

obtemos,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Concluímos então mostrando que para $|x| \le 1$ a parcela contendo a integral na equação acima tende a zero se $n \to +\infty$. Temos,

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2(n+1)} dt \right| \le \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \le \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \ \blacksquare$$

Observação: A série de Leibnitz converge condicionalmente pois, claramente, $\frac{1}{2n-1} \ge \frac{1}{2n}$ e, utilizando o Exemplo 5.11, $\sum^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

5.16 Critério (de Cauchy para séries numéricas).[7] *A série* $\sum^{+\infty} a_n$*, em* $\mathbb{K}$*, é convergente se e somente se* $\forall \, \epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|\, a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon, \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \ .$$

Prova.

É claro que $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, s_n a n-ésima soma parcial da série, que converge se e só se (s_n) é uma sequência de Cauchy. Donde, a tese $\blacksquare$

O teorema a seguir é fundamental, segue trivialmente do Critério de Cauchy (5.16) (solicitamos ao leitor verificar), será provado elementarmente no Lema 6.2, e abaixo mostramos uma outra e simples prova.

[6]Gregory foi o introdutor do termo convergência e deduziu a série de Leibnitz antes que este.

[7]Bolzano, em 1817, antecipou o Critério de Cauchy, com uma prova "circular", como era de se esperar.

5.17 Teorema. *Toda série, em $\mathbb{K}$, absolutamente convergente é convergente.*

Prova.

Inicialmente notemos que uma série $\sum^{+\infty} z_n$ em $\mathbb{C}$ converge absolutamente se, e só se, suas partes real e imaginária, $\sum^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$, respectivamente, são séries absolutamente convergentes em $\mathbb{R}$, pois

$$\max\left\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\right\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Assim sendo, é suficiente provarmos o teorema para uma série real $\sum^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, tal que $\sum^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Neste caso temos,

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \forall n \in \mathbb{N},$$

e $\sum^{+\infty}(a_n + |a_n|)$ é uma série em $[0, +\infty)$ cuja sequência das somas parciais é limitada superiormente por $2\sum^{+\infty} |a_n|$. Pela Proposição 5.3 segue que $\sum^{+\infty}(a_n + |a_n|)$ converge e então, como $\sum^{+\infty}(-|a_n|) < \infty$, $\sum^{+\infty} a_n = \sum^{+\infty}(a_n + |a_n|) + \sum^{+\infty} -|a_n|$ também converge ∎

5. 4 - Critérios para Convergência Absoluta

5.18 Critério da Comparação. *Sejam $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ séries em $\mathbb{C}$. Suponhamos que existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|a_n| \leq c|b_n|, \ \forall n > n_0, \quad e \quad \sum^{+\infty} |b_n| < \infty .$$

Então, $\sum^{+\infty} |a_n| < \infty$.

Prova. Segue trivialmente da Proposição 5.3 ∎

5.19 Exemplo. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ *é convergente.*

Verificação.

Pela conhecida desigualdade $|\sin\theta| \leq |\theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$, segue $|\frac{1}{n}sen\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pelo Exemplo 5.12 temos $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Então, pelo Critério da Comparação 5.18 e Teorema 5.17 a série dada converge ∎

5.20 Exemplo. *Temos,* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$.

Verificação.

Como $e^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, computando o logaritmo natural nos dois lados desta inequação obtemos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\log n \leq n$ e $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$. Mas, pelo Exemplo 5.11, $\sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ e assim, pelo Critério 5.18 ou Proposição 5.3, a série dada diverge ∎

5.21 Critério do Limite. *Suponhamos, em* $\mathbb{C}$*, as séries* $\sum^{+\infty} a_n$ *e* $\sum^{+\infty} b_n\,, b_{n's} \neq 0$*, satisfazendo* $\lim \frac{|a_n|}{|b_n|} = L \in [0, +\infty]$*. Valem as propriedades abaixo:*

(a) Se $L = 0$ *então,* $\sum^{+\infty} |\, b_n| < \infty \Longrightarrow \sum^{+\infty} |\, a_n| < \infty$*.*

(b) Se $0 < L < +\infty$ *então,* $\sum^{+\infty} |\, a_n| < \infty \Longleftrightarrow \sum^{+\infty} |\, b_n| < \infty$*.*

(c) Se $L = +\infty$ *então,* $\sum^{+\infty} |\, b_n| = +\infty \Longrightarrow \sum^{+\infty} |\, a_n| = +\infty$*.*

Prova.

(a) Se $L = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq |b_n|\,, \forall n \geq n_0$. Logo, $\sum_{n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n_0}^{\infty} |b_n| < +\infty$.

(b) Existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $|b_n| \frac{L}{2} \leq |a_n| \leq \frac{3L}{2} |b_n|$. A tese segue do Crit. 5.18.

(c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, $|a_n| \geq |b_n|$. Logo, $\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} |a_n| \geq \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} |b_n| = +\infty$ ∎

5.22 Exemplo. *Temos,* $\sum^{+\infty} \frac{13n^3+2n-3}{n^7+4n^5-3n^2+20} < \infty$*.*

Verificação.

Como a série $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ é, pelo Exemplo 5.12, convergente e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{13n^3+2n-3}{n^7+4n^5-3n^2+20}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^4(13n^3 + 2n - 3)}{n^7 + 4n^5 - 3n^2 + 20} = \lim_{n \to +\infty} \frac{13 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{3}{n^5} + \frac{20}{n^7}} = 13\,,$$

pelo Critério do Limite (5.21) a série dada, de termos positivos, é convergente ∎

5.23 Exemplo. *Temos,* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = +\infty$*.*

Verificação.

Pelo Exemplo 3.53 1(f) temos $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ e pelo Exemplo 5.11 segue que $\sum^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Logo, pelo critério 5.21, a série dada também diverge ∎

A apresentação dos critérios da raíz e da razão é razoavelmente geral, e utiliza os conceitos de $\limsup$ e $\liminf$. Com frequência, mas não sempre, poderemos substituir tais limites pelo usual. Abaixo, enfatizamos tais fatos e relacionamos estes três referidos limites com os dois mencionados critérios.

5.24 Teste da Raíz.[8] *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$*, em* $\mathbb{C}$*, tal que* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R \in [0, +\infty]$.

(a) Se $R < 1$*, a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $R > 1$*, a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

(c) Se $R = 1$*, o teste é ineficiente.*

Prova.

(a) Fixando λ tal que $0 \le R < \lambda < 1$, pelo Corolário 3.50 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ e assim, $|a_n| < \lambda^n$. Logo, pelo Critério da Comparação 5.18 a série $\sum^{+\infty} |a_n|$ converge.

(b) Para λ tal que $\lim sup \sqrt[n]{|a_n|} > \lambda > 1$, pela definição de $\limsup$ existe uma subsequência (a_{n_k}) de (a_n) satisfazendo $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \lambda$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Desta forma obtemos, $|a_{n_k}| > \lambda^{n_k} > 1$, $\forall k$, e portanto $\sum^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

(c) A série $\sum^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge enquanto a série $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, para $p > 1$ arbitrário, converge. Entretanto temos, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = 1$ ■

Adendo ao Teste da Raíz. Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in [0, +\infty]$ então $R = \rho$. Se $\rho \notin \{0, 1, +\infty\}$ dizemos "in off" que a série $\sum^{+\infty} |a_n|$ se comporta como a série geométrica $\sum^{+\infty} R^n$.

5.25 Teste da Razão[9] *Dada* $\sum^{+\infty} a_n$ *, em* $\mathbb{C}$*,* $a_{n's} \neq 0$ *, consideremos*

$$r = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad e \quad R = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} .$$

(a) Se $R < 1$*, a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $r > 1$*, ou* $r = +\infty$*, a série* $\sum^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

(c) Se $r \le 1 \le R$*, o teste é ineficiente.*

---

[8] Também dito **Critério de Cauchy** (1821), o qual o enunciou: " Ache o limite ou os limites para os quais a expressão $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ converge quando n cresce indefinidamente e denote por k o maior destes limites, ou, em outras palavras, o limite dos maiores valores da dita expressão. A série será convergente se $k < 1$ e divergente se $k > 1$".

[9] Também chamado **Critério ou Teste de d'Alembert**. Este teste já era bem conhecido anteriormente a d'Alembert.

Prova.

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $R < \lambda < 1$. Pelo Corolário 3.50 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lambda$. Então, para $n > n_0$ obtemos a desigualdade $|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\ldots\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \le \lambda^{n-n_0}|a_{n_0}|$, donde segue $\sum^{+\infty}|a_n| < +\infty$.

(b) É claro que existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$; logo, $|a_{n+1}| \ge |a_n| \ge |a_{n_0}|$.

(c) Vide exemplos no Critério da Raíz 5.24 (c) (v. também Exemplos 5.26) ■

Adendo ao Teste da Razão. Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in [0,+\infty]$ então $r = R = \rho$. Se $\rho \notin \{0,1,+\infty\}$, dizemos "in off" que $\sum^{+\infty}|a_n|$ se comporta como a série $\sum^{+\infty}\rho^n$.

5.26 Exemplos. *As séries abaixo convergem pelo teste da raíz enquanto o teste da razão é inconclusivo para ambas.*

(a) Dada a série $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ temos,

$$\liminf\sqrt[n]{a_n} = \lim\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \limsup\sqrt[n]{a_n} = \lim\sqrt[2n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0\,,\qquad \limsup\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\Big(\frac{3}{2}\Big)^n = +\infty\,,$$

(b) Dada a série $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\ldots$ temos,

$$\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}\,,\quad \limsup\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\,,$$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ se n é ímpar, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{4}}{2}$ se n é par e assim, $\lim\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ■

5.27 Exemplos. *As séries complexas obtidas das séries de Maclaurin de e^x, sen$x$ e $\cos x$, trocando a variável $x \in \mathbb{R}$ pela variável $z \in \mathbb{C}$ convergem absolutamente em todo o plano complexo.*

Verificação. Sendo as séries, respectivamente, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (vide Exemplo 5.10), basta mostrar $\sum^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} < \infty$ pois as outras duas são, em valor absoluto, majoradas por esta. Aplicando o Teste da Razão 5.25, e observação que o segue, encontramos $\lim\left|\frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ■

5.28 Teorema. *Seja* (x_n) *uma sequência limitada em* $(0,+\infty)$. *Temos,*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf \sqrt[n]{x_n} \le \limsup \sqrt[n]{x_n} \le \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad .$$

Em particular, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in [0,+\infty]$ *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Prova. Basta provar $\limsup \sqrt[n]{x_n} \le \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$ pois assim, para a sequência $(\frac{1}{x_n})$ teremos $\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} \le \limsup \frac{x_n}{x_{n+1}}$. Logo, de $\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} = \frac{1}{\liminf \sqrt[n]{x_n}}$ e $\limsup \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n}}$ seque a desigualdade para o lim inf.

Então, é suficiente provarmos que $c > q = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$ implica $\limsup \sqrt[n]{x_n} \le c$. Dado $c > q$, onde q é o maior valor de aderência da sequência $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$, sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p$ implica $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le c$. Logo, para $n > p$ segue

$$\frac{x_{p+1}}{x_p} \le c\,, \frac{x_{p+2}}{x_{p+1}} \le c, ..., \frac{x_n}{x_{n-1}} \le c \quad .$$

Multiplicando estas desigualdades membro a membro obtemos $\frac{x_n}{x_p} \le c^{n-p} = \frac{c^n}{c^p}$. Pondo $k = \frac{x_p}{c^p}$ vemos que k independe de n e, $x_n \le k\,c^n, \forall n > p$. Assim, vale a desigualdade $\sqrt[n]{x_n} \le \sqrt[n]{k}\,c, \forall n > p$. Portanto, como $\lim \sqrt[n]{k} = 1$, concluímos que

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} \le \limsup(\sqrt[n]{k}\,c) = \lim \sqrt[n]{k}c = c \quad \blacksquare$$

Adendo. Portanto, $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0,+\infty]$ implica $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. No Apêndice 5-B temos outra prova deste fato.

5.29 Exemplo. *Suponha* $0 < a < b$ *e* $(x_n) = (a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, ...)$. *Se* n *é par temos,* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, $x_n = (ab)^{\frac{n}{2}}$ *e* $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$. *Caso contrário, se* n *é ímpar, temos* $\frac{x_{n+1}}{x_n} = b$, $x_n = (ab)^{\frac{n-1}{2}}a$ *e* $\sqrt[n]{x_n} = (ab)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{a} = \sqrt{ab}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[2n]{ab}}$. *Por fim temos,*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = \min(a,b)\,, \quad \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \max(a,b)\,, \quad \lim \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab} \quad \blacksquare$$

Pelos Exemplos 5.26 (b) e 5.29 vemos que pode existir o limite da raíz e não o da razão. O teste da razão é em geral mais "fácil". Porém, o da raíz é mais eficiente.

5.30 Exemplo. *Temos* $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. *Ainda mais,* $\sum^{+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$, $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ *e* $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Verificação. Aplicando o teste da razão à série dada encontramos $\lim \frac{(n+1)^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,n^n} = \lim(\frac{n+1}{n})^n = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e$; logo, a série diverge. Ainda, pelo Teorema 5.28 temos, $\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ e, por fim, $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim \frac{1}{n}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 0.e = 0$ $\blacksquare$

5.31 Exemplo. *A série* $\sum^{+\infty} nz^n$ *converge absolutamente se* $|z| < 1$ *e diverge se* $|z| \geq 1$.

Verificação. Pelo teste da raíz (é também fácil aplicar o da razão) obtemos, $\lim \sqrt[n]{n|z|^n} = |z| \lim \sqrt[n]{n} = |z|$ e $\sum^{+\infty} |nz^n| < \infty$ se $|z| < 1$. Por outro lado, se $|z| \geq 1$ temos $|z|^n \geq 1$, $\lim n|z|^n = +\infty$, $\lim nz^n \neq 0$ e $\sum^{+\infty} nz^n$ diverge ■

5.32 Critério da Integral. *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, *e* $f : [p, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, *contínua e decrescente, com* $a_n = f(n), \forall n \geq p$. *Temos,*

$$\int_p^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Prova.

Se $k \geq p$ e $x \in [k,\, k+1]$ então, $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, $a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq a_k$ e,

$$\sum_p^n a_{k+1} \leq \sum_p^n \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_p^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_p^n a_k\ .$$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \infty$ se, e somente se, $\lim_{n \to +\infty} \int_p^{n+1} f(x)\, dx = \int_p^{+\infty} f(x)\, dx < \infty$ ■

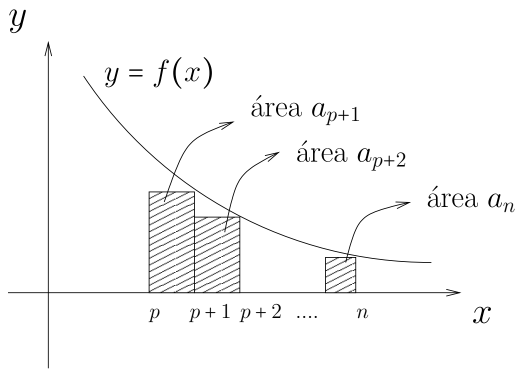

Figura 5.2: Ilustração para o Critério da Integral.

Dada uma série de números reais arbitrária, $\sum^{+\infty} a_n$, uma função como no critério da integral sempre existe [definimos f em $[n, n+1]$ tendo por gráfico o segmento unindo (n, a_n) e $(n+1, a_{n+1})$] mas, em geral, tal função não é útil.

5.33 Exemplo. *Pelo critério da integral a série harmônica generalizada,* $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, *com* $p \in \mathbb{R}$, *converge se e somente se* $p > 1$.

De fato, se $p \le 0$ é óbvia a divergência. Se $p > 0$, a função real e contínua $[1, +\infty) \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^p}$ é decrescente. O resultado segue então da fórmula

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^M = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{M^{p-1}}}{p-1}\,, \ p \ne 1\,, \\ \\ \lim\limits_{M\to+\infty} \log\Big|_1^M = \lim\limits_{M\to+\infty} \log M\,, p = 1 \quad \blacksquare \end{cases}$$

5.34 Exemplo. *Supondo* $\alpha, \beta > 0$, *temos* $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < \infty$ *se e somente se vale uma das condições:* $\alpha > 1$ *ou então,* $\alpha = 1$ *e* $\beta > 1$ *(vide Figuras 5.3 e 5.4).*

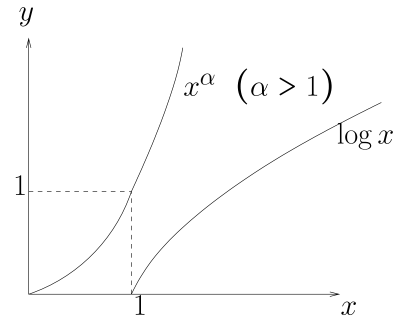

Figura 5.3: Gráficos de x^α, com $\alpha > 1$, e $\log x$.

Verificação. Se $\alpha > 1$ então temos $\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} \le \frac{1}{n^\alpha}$ e, como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, segue que a série dada converge.

Suponhamos agora $0 < \alpha \le 1$. Como a função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}$, $x \ge 3$, é contínua e decrescente analisemos a integral $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} dx$. Com a mudança de variável $y = \log x$ obtemos $x = e^y$, $\frac{dx}{dy} = e^y$ e

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} dx = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^y}{e^{\alpha y} y^\beta} dy = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy\ .$$

Se $\alpha < 1$, dado $N \in \mathbb{N}$, $N > \beta$, existe $c_N > 0$ tal que $e^{(1-\alpha)y} \ge c_N y^N$, $\forall y \ge 0$. Então temos, $\int_{\log 3}^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta} dy = +\infty$ e pelo Critério da Integral (5.32) a série diverge. Se $\alpha = 1$ temos, $\int_{\log 3}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy < \infty$ se e somente se $\beta > 1$ $\blacksquare$

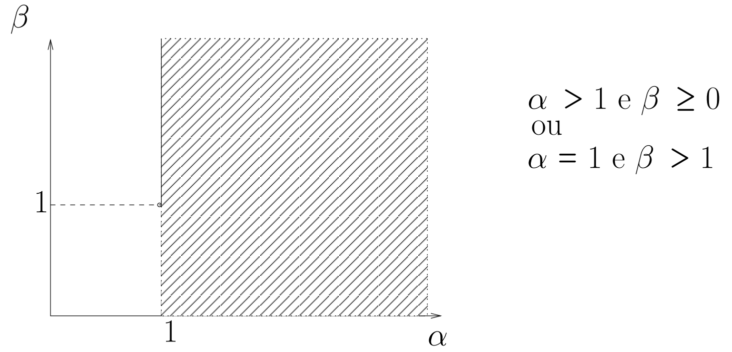

Figura 5.4: $\left\{(\alpha,\beta) : \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} < \infty\right\}$.

Abaixo está hachurada a região dos parâmetros $\alpha,\beta > 0$ tais que a série no Exemplo 5.34 acima converge.

As séries de Abel são as séries do tipo $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\beta}$, $\beta > 0$. Pelo Exemplo 5.34 concluímos que tais séries convergem se $\beta > 1$ e divergem se $\beta = 1$.

5.35 Critério da Comparação de Razões. *Sejam* $\sum\limits^{+\infty} a_k$ *e* $\sum\limits^{+\infty} b_k$ *em* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Suponhamos que exista* $p\in\mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|, \ \forall\ k \ \geq p.$$

Se a série $\sum\limits^{+\infty} |b_k|$ *converge então a série* $\sum\limits^{+\infty} |a_k|$ *converge. Equivalentemente, se a série* $\sum\limits^{+\infty} |a_k|$ *diverge então a série* $\sum\limits^{+\infty} |b_k|$ *diverge.*

Prova. Da hipótese temos, para $k \geq p$, $|\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}| \leq |\frac{a_k}{b_k}|$. Logo, para $k \geq p$ a sequência $\frac{|a_k|}{|b_k|}$ decresce; donde segue, $\frac{|a_k|}{|b_k|} \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}$ e então, $|a_k| \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}|b_k|$. Pelo Critério da Comparação (5.18), segue a tese ■

Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, o teste da razão (e o da raíz) aplicado à série $\sum\limits^{+\infty} a_n$ é inconclusivo. Em tal caso, é útil o Critério de Raabe abaixo descrito. Antes, mostremos uma generalização simples da Desigualdade de Bernoulli 3.12.

5.36 Lema (Generalização da Desigualdade de Bernoulli). *Seja* $\alpha \geq 1$ *e* $x \geq -1$. *Então,* $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$.

Prova. Para $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x\in\mathbb{R}$, temos $f'' \geq 0$ e portanto f tem concavidade voltada para cima. Também temos, $f'(0) = \alpha$, e assim a reta tangente ao gráfico de f em $(0,1)$ é dada por $y = 1+\alpha\, x$. Logo, $(1+x)^\alpha \ \geq 1+\alpha\, x$ ■

5.37 Critério de Raabe. *Seja* $\sum^{+\infty} a_n$ *uma série em* $\mathbb{C}^*$ *satisfazendo*

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = L \in [-\infty,+\infty] \ .$$

(a) Se $L > 1$*,* $\sum^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) Se $L < 1$*,* $\sum^{+\infty} |a_n|$ *diverge. Pode ocorrer que* $\sum^{+\infty} a_n$ *convirja.*

(c) Se $L = 1$ *o critério é ineficiente.*

Prova.

(a) Seja α tal que $1 < \ \alpha < L$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$k\left(1-|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ > \ \alpha \ , \ \forall k \ \geq \ N \ ,$$

e assim, $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1-\frac{\alpha}{k}$. Aplicando o Lema 5.36 com $x = -\frac{1}{k}$ obtemos,

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ < \ 1-\frac{\alpha}{k} \ \leq \ (1-\frac{1}{k})^{\alpha} = \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}\,, \quad \text{com } b_k = \frac{1}{(k-1)^\alpha} \quad .$$

Como $\sum^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ (já que por hipótese temos $\alpha > 1$), pelo Critério de Comparação de Razões (5.35) a série $\sum^{+\infty} |a_k|$ converge.

(b) Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \ \geq \ N$ temos $k\left(1-|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ \leq 1$. Assim,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ \geq \ 1-\frac{1}{k} \ = \ \frac{k-1}{k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \ , \quad \text{com } b_{k+1} = \frac{1}{k} \quad .$$

Como a série harmônica diverge, pelo Critério de Comparação de Razões a série $\sum^{+\infty} a_k$ também diverge.

No Exemplo 5.49 veremos que a série

$$\sum^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\,, \quad \text{com } -1 < \alpha < 0\,,$$

é condicionalmente convergente. No próximo exemplo (Exemplo 5.38) veremos que tal série satisfaz a condição $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = \alpha+1 < 1$, com $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pelo Exemplo 5.34, a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log k}$ é divergente e o Teste de Raabe nos leva a analisar o limite para $k \to +\infty$ da expressão

$$k\left(1 - \frac{k\log k}{(k+1)\log(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\right] .$$

Ainda pelo Exemplo 5.34, a série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$ é convergente e o Teste de Raabe nos leva a analisar o limite para $k \to +\infty$ da expressão

$$k\left[1 - \frac{k\log^2 k}{(k+1)\log^2(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + k\frac{\log^2(k+1) - \log^2 k}{\log^2(k+1)}\right] = \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)}\frac{\log k(k+1)}{\log(k+1)}\right] .$$

É claro que

$$\lim \frac{k}{k+1} = 1\,, \quad \lim \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$$

e, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x(x+1)}{\log(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x(x+1)}(2x+1) \;=\; 2\ .$$

Assim, o limite obtido pelo Teste de Raabe para ambas as séries é 1 ∎

5.38 Exemplo. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Então, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}\right|$$

é convergente se $\alpha > 0$ e divergente se $\alpha < 0$.

Verificação. Seja a_n o termo geral da série dada. Temos, para $n \to +\infty$,

$$n\big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\big) = n\big(1 - \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\big) = n\big(1 - \frac{n-\alpha}{n+1}\big) \;\longrightarrow\; \alpha+1\ .$$

A afirmação segue então imediatamente do Critério 5.37, de Raabe ∎

5. 5 - Série Binomial[10]

Generalizemos a conhecida fórmula binomial dada para um expoente $m \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} x^n \,,$$

com $x \in \mathbb{R}$, $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(n-m)!}$ e $\binom{m}{0} = 1$, trocando no último somatório à direita na fórmula acima a variável inteira e positiva m por uma variável $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

5.39 Lema. *Se* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ *a série infinita* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ *converge se* $|x| < 1$.

Prova. Notemos que os coeficientes desta série são números reais não nulos.

Aplicando o Teste da Razão obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \right| = |x| \quad \blacksquare$$

A seguir, mostremos que a série apresentada no Lema 5.39 converge à função $f(x) = (1+x)^\alpha$, onde $x \in (-1,+1)$, o que não é óbvio. Inicialmente observemos:

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)^\alpha & f(0) = 1\,, \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \text{etc.} & \end{cases}$$

Desta forma, introduzindo a notação $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$, onde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, vemos que os coeficientes da série de Maclaurin de f são,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n} \,.$$

[10]Sua descoberta é atribuída a Newton (em uma carta de 1664 ou 1665) que nunca a publicou ou provou e, ainda, outros já a haviam estudado. O destaque de Newton deve-se a ele ter mostrado que as séries infinitas não deviam ser vistas como aproximações mas como outras formas das funções que representam e estabelecido regras operatórias para séries reais da forma $\sum a_n x^n$ tais como divisão e multiplicação. Abel mostrou a série binomial complexa para $(1+z)^\sigma$, com $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, e $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, sujeita a uma definição apropriada de $(1+z)^\sigma$.

5.40 Teorema Binomial. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n , \quad \forall x \in (-1,1) \ .$$

Prova.

Pela fórmula de Taylor em torno de $x = 0$ com resto integral, dado $N \in \mathbb{N}$ temos,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + R_{N;0}(x) \ ; \quad R_{N;0}(x) = \int_0^x \frac{f^{N+1}(t)}{N!}(x-t)^N \, dt \ .$$

Mostremos que $\lim_{N \to +\infty} R_{N;0}(x) = 0$, se $|x| < 1$. É fácil ver que

$$\frac{f^{N+1}(t)}{N!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-N)}{N!}(1+t)^{\alpha-N-1} = \alpha\binom{\alpha-1}{N}(1+t)^{\alpha-N-1},$$

$$R_{N;0}(x) = \alpha\binom{\alpha-1}{N} \int_0^x (1+t)^{\alpha-N-1}(x-t)^N \, dt \ .$$

Analisemos o valor absoluto do integrando na fórmula para $R_{N;0}$: $\left|(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N\right|$.

Consideremos $x \in (-1,1)$ e t arbitrário entre 0 e x. Seja x positivo ou negativo, é claro que $1+t$ está entre 1 e $1+x > 0$. Logo,

$$0 < (1+t)^{\alpha-1} \le C = C(x) = \max\left(1, (1+x)^{\alpha-1}\right) \ .$$

Ainda, se $x > 0$ então $0 \le \frac{x-t}{1+t} \le \frac{x}{1+t} \le x$. Ainda mais, se $x < 0$, então $-x = |x|$ e

$$0 \le \frac{t-x}{1+t} \le \frac{t|x| + |x|}{1+t} = |x| \ .$$

Logo, para $x \in (-1,1)$ e t arbitrário entre 0 e x temos,

$$\left|(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N\right| \le C|x|^N \ .$$

Consequentemente, se $x \in (-1,1)$ temos que

$$|R_N(x)| \le C\left|\alpha\binom{\alpha-1}{N}\right||x|^{N+1} \ .$$

Pelo Lema 5.39 a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n, |x| < 1$, converge e seu termo geral tende a zero. Finalmente, pelos casos acima deduzimos que $R_N(x) \xrightarrow{N \to +\infty} 0$ se $x \in (-1,1)$ ■

Tal série inclui várias funções (vide um exemplo abaixo) e é útil para obter desenvolvimentos em séries para outras funções (veremos outros exemplos no Capítulo 6). Quanto à convergência nos extremos $x = \pm 1$, consulte os Exemplos 5.38 e 5.49 e o Exercício 18, neste capítulo.

5.41 Exemplo. *Temos,*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3....(2n+1)}{2.4.....(2n)}x^{2n}\,, \ \ se\ |x|<1.$$

Verificação.

Mera consequência do Teorema Binomial pois,

$$(-1)^n\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)....(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{(1/2)(3/2)...(1/2+n-1)}{n!} = \frac{1/2.3/2....(2n+1)/2}{n!} =$$

$$= \frac{1.3.....(2n+1)}{2^n\,n!} = \frac{1.3.....(2n+1)}{2.4....(2n)}, \text{ se } n \neq 0 \ \blacksquare$$

5.6 - Critérios para Convergência Não Necessariamente Absoluta

5.42 Proposição (Série Telescópica). *Dada* $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$, *a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, *com* $a_n = b_n - b_{n+1}$, *converge se, e somente se, a sequência* (b_n) *converge e, neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim b_n\ .$$

Prova. Trivial pois a série $\sum^{+\infty} a_n$ converge se e somente se a sequência das somas parciais $s_n = (b_0 - b_1) + ... + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$, $n \geq 0$, converge e, sendo este o caso, o limite da série é $\lim s_n = b_0 - \lim b_n$ $\blacksquare$

5.43 Exemplo. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *é telescópica e* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Verificação. Basta notar que, $\lim_{N\to+\infty} s_N = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 1\blacksquare$

5.44 Critério de Dirichlet[11]**.** *Seja* $\sum^{+\infty} z_n$ *uma série em* $\mathbb{C}$ *com sequência das somas parciais limitada (convergente ou não) e* (b_n) *uma sequência em* $\mathbb{R}$ *e decrescente, com* $\lim b_n = 0$*. Então, a série* $\sum^{+\infty} z_n b_n$ *é convergente.*

Prova.

Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum^{+\infty} z_n$. Temos,
$z_1b_1 + z_2b_2 = z_1(b_1 - b_2) + (z_1 + z_2)b_2 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2$,
$z_1b_1 + z_2b_2 + z_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 + z_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3b_3$,
e, de forma geral (verifique, a indução é simples),

$$z_1b_1 + z_2b_2 + \ldots\ldots + z_nb_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) \ + \ s_nb_n \ .$$

Para $M \in \mathbb{R}$ tal que $|s_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)| \leq M \sum_{n=2}^{+\infty} (b_{i-1} - b_i) = Mb_1 \ .$$

Logo, a série $\sum_{n=2}^{+\infty} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)$ converge absolutamente e é então convergente. Então, como $\lim s_nb_n = 0$, a série $\sum^{+\infty} z_nb_n$ é também convergente ∎

5.45 Critério de Abel[12] *Seja* $\sum^{+\infty} z_n$ *uma série em* $\mathbb{C}$ *e convergente e* (b_n) *uma sequência decrescente de números positivos (não necessariamente tendendo a zero). Então, a série* $\sum^{+\infty} z_nb_n$ *é convergente.*

Prova.

Para $c = \lim b_n$, temos $(b_n - c) \searrow 0$. Então, pelo Critério de Dirichlet a série $\sum^{+\infty} z_n(b_n - c)$ é convergente e, devido à hipótese, a série $\sum^{+\infty} cz_n = c\sum^{+\infty} z_n$ também é convergente. Logo, a série $\sum^{+\infty} z_nb_n$ é convergente ∎

---

[11] O alemão P. G. L. Dirichlet (1805-1859) é o precursor do conceito moderno de função como correspondência.

[12] O norueguês N. H. Abel (1802-1829), aos 19 anos, provou a impossibilidade da resolução por radicais das equações algébricas de grau maior ou igual a cinco. O italiano P. Ruffini (1765-1822) dera uma prova (1799) de tal resultado, menos satisfatória e que passara impercebida.

5.7 - Critério para Convergência de uma Série Alternada

5.46 Critério de Leibnitz (1682). *Seja* (a_n) *uma sequência decrescente tal que* $\lim a_n = 0$. *Então, a serie* $\sum^{+\infty}(-1)^n a_n$ *é convergente e*

$$\left|\sum^{+\infty}(-1)^n a_n - s_m\right| \leq a_{m+1}\,, \quad s_m = a_1 + \ldots + a_m\,, \forall m \in \mathbb{N}\ .$$

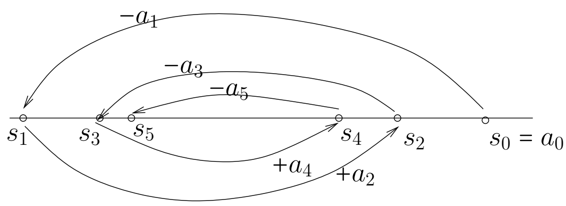

Figura 5.5: Critério de Leibnitz.

Prova. Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum^{+\infty}(-1)^n a_n$. Mostremos que a sequência (s_{2n}) é decrescente e a sequência (s_{2n+1}) é crescente.

Como (a_n) é decrescente temos $s_{2n} = s_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq s_{2n-2}$ e, analogamente, $s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq s_{2n-1}$.

Ainda, como $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$, dados i ímpar e p par, para i^* ímpar e maior que i e p temos, $s_i \leq s_{i^*} \leq s_{i^*-1} \leq s_p$. Isto é,

$$s_1 \leq s_i \leq s_p \leq s_0\,, \qquad \forall i \text{ impar }\ , \quad \forall p \text{ par.}$$

Logo, as sequências (s_{2n+1}) e (s_{2n}) são monótonas limitadas e convergentes. Se $\alpha = \lim s_{2n+1}$ e $\beta = \lim s_{2n}$ temos, $\beta - \alpha = \lim[\, s_{2n} - s_{2n+1}\,] = \lim a_{2n+1} = 0$ e assim concluímos $\lim s_n = \alpha$.

Seja m par ou não, α está entre s_m e s_{m+1} e $|\alpha - s_m| \leq |s_m - s_{m+1}| = a_{m+1} \to 0$ ■

5.47 Exemplo *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n sen\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, *converge absolutamente se* $\alpha > 1$ *e condicionalmente se* $0 < \alpha \leq 1$.

Verificação.

Claramente $\text{sen}\frac{1}{n^\alpha} > 0$, se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ e pelo Critério do Limite (3.21), $\sum^{\infty}\text{sen}\frac{1}{n^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} < \infty$. Logo (vide Exemplo 5.12), a série dada converge absolutamente se e só se $\alpha > 1$.

Ainda, como $\operatorname{sen}'0 = \cos 0 = 1 > 0$, a função $\theta \mapsto \operatorname{sen}\theta$ é crescente num intervalo centrado em 0 e $(\operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha}) \searrow 0$, se $\alpha > 0$. Pelo Critério de Leibnitz a série dada converge se $0 < \alpha \le 1$ ■

Mostremos que a hipótese (a_n) decrescente é essencial no enunciado do Critério de Leibnitz.

5.48 Exemplo. *A série* $\sum^{\infty}(-1)^n a_n$*,* $a_n = \frac{1}{n}$ *se* n *é ímpar e* $a_n = \frac{1}{n!}$ *senão, diverge e* $\lim a_n = 0$*.*

Verificação.

É óbvio que $\lim a_n = 0$. Como $\sum^{+\infty}\frac{1}{n!}$ é convergente, segue que a série $\sum^{\infty} b_n$, com $b_n = 0$ se n é ímpar e $b_n = \frac{1}{n!}$ se n é par, é convergente. Portanto, se a série $\sum^{\infty}(-1)^n a_n$ for convergente então a série $\sum^{\infty}(-1)^n a_n - \sum^{\infty} b_n = \sum^{\infty} c_n$, com $c_n = -\frac{1}{n}$ se n é ímpar e $c_n = 0$ se n é par, é também uma série convergente. Encontramos uma contradição pois $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...$ diverge (vide Observação ao Exemplo 5.15) ■

5.49 Exemplo. *A série abaixo é condicionalmente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad -1 < \alpha < 0 \ .$$

Verificação. Seja $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pelo Exemplo 5.38 temos $\sum^{+\infty}|a_n| = +\infty$.

Porém, sendo $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$, pois $-\alpha < 1$, temos que a sequência $(|a_n|)$ é decrescente e existe $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = L$. Mostremos que $L = 0$.

Fixando $n \in \mathbb{N}$ e escrevendo $\beta = 1 + \alpha$, da dupla desigualdade $-1 < \alpha < 0$ segue a dupla desigualdade $0 < \beta < 1$ e, para $p \in \mathbb{N}$ arbitrário,

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{n+1-(1+\alpha)}{n+1} = 1 - \frac{\beta}{n+1}\,,$$

$$\Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}....\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big(1-\frac{\beta}{n+p}\Big)\Big(1-\frac{\beta}{n+p-1}\Big)....\Big(1-\frac{\beta}{n+1}\Big),$$

$$(*) \qquad \Big|\frac{a_{n+p}}{a_n}\Big| \le \Big(1-\frac{\beta}{n+p}\Big)^p \le \Big(1-\frac{\beta}{n+p}\Big)^{p+n}\Big(1-\frac{\beta}{n+p}\Big)^{-n}.$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{a}{x})^x = e^a$, tomando em (*) o limite para $p \to +\infty$ obtemos

$$\frac{L}{a_n} \le e^{-\beta}\,, \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Desta forma obtemos $0 \le e^\beta L \le \lim a_n = L$, o que implica $L = 0$ pois $e^\beta > 1$. Logo, pelo critério de Leibnitz a série $\sum^{+\infty}(-1)^n|a_n| = \sum^{+\infty} a_n$ é convergente ■

5.8 - Aproximação e Representação Decimal[13] de um Número Real

Um número real x da forma

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

com a_0 um natural arbitrário e $a_1, a_2, ..., a_n$ naturais tais que $0 \leq a_i \leq 9$, é usualmente indicado em sua representação decimal finita $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ e é claro que $x \in \mathbb{Q}$. Porém, nem todos os racionais tem representação decimal finita. Por exemplo, se $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, com $a, n \in \mathbb{N}$ então $3a = 10^n$ o que é impossssível pois 3 não divide 10.

5.50 Lema. *Dado $x \in \mathbb{R}$, é bem definido $[\![x]\!] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \in \mathbb{Z}$ e, ainda, $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$.*

Prova. Mostremos que $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, obviamente limitado superiormente, é não vazio. Se $x \geq 0$ então $0 \in S$. Se $x \leq 0$ então $-x \geq 0$ e então, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente (v. Lema 3.5), segue que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq -x$ e portanto $-p \leq x$; donde, $-p \in S$. Seja $[\![x]\!] = \sup S$.

Pela Propriedade Arquimediana (3.6) existe $n \in \mathbb{S}$ tal que $[\![x]\!] - 1 < n \leq [\![x]\!]$. Portanto, $n \leq [\![x]\!] < n + 1$ e então $n + 1 > \sup S$, $n + 1 \notin S$ e $x < n + 1$. Logo, $S = \{\ldots, n-2, n-1, n\}$ e $n = \max S = \sup S = [\![x]\!]$ ■

O número $[\![x]\!]$ é o maior inteiro menor ou igual a x e a função $[\![\,.\,]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é denominada a função maior inteiro.

5.51 Teorema. *Seja $x \geq 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um decimal finito $r_n = a_0, a_1 \ldots a_n$ tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Prova. Pelo Lema 5.50 é óbvio que $a_0 = [\![x]\!]$ é um inteiro positivo e,

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

[13] Em 1790, na França, com a nova ordem , foi criada uma comissão para a reforma dos pesos e medidas e em 1799 o sistema métrico como hoje o conhecemos e o sistema decimal foram adotados. Haviam proponentes do sistema duodecimal, A. M. Legendre (1752-1833) não foi apontado por não ser claramente pró-revolucionário (mediu o comprimento de um meridiano facilitando a adoção do metro e talvez para provocar os duodecimalistas tenha aventado o sistema de base onze) e Lagrange, a princípio , também não, por ser estrangeiro.

Consideremos $a_1 = [\![10(x-a_0)]\!]$. Como $0 \leq 10(x-a_0) < 10$, segue que $0 \leq a_1 \leq 9$,

$$a_1 \leq 10(x-a_0) < a_1 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

Analogamente, se $a_2 = [\![10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10})]\!]$ obtemos $0 \leq a_2 \leq 9$,

$$a_2 \leq 10^2(x - a_0 - \frac{a_1}{10}) < a_2 + 1 \quad \text{e} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\ .$$

Procedendo por indução, obtemos o resultado desejado ■

5.52 Corolário. *Mantenhamos a notação acima. Temos,* $r_n \nearrow x$.

Prova. É óbvio que (r_n) é crescente e, ainda, $0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

5.53 Definição. *Se* $x \geq 0$ *e* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *são dados pelo Teorema 5.51 então* $x = a_0\, , a_1 a_2 a_3 \ldots.$ *é* **uma representação decimal infinita** *de* x.

A representação decimal infinita de $x > 0$ não é necessariamente única. Uma outra surge ao escolhermos a_0 o maior inteiro estritamente menor que x e trocarmos a desigualdade imposta no enunciado do Teorema 5.51 pela condição $r_n < x \leq r_n + \frac{1}{10^n}$. Assim procedendo obtemos

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = 0,999999\ldots;$$

e também,

$$\frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{9}{10^{n+1}} + \ldots = 0,0\ldots.0999\ldots,$$

com os $9's$ ocorrendo a partir da $(n+1)$-ésima casa decimal.

Desta forma, para $\frac{1}{8}$, por exemplo, temos as representações:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125000\ldots \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots. = 0,124999\ldots\ .$$

5.54 Proposição. *Os números $x = \frac{m}{10^n} > 0$, com $m, n \in \mathbb{N}$, tem apenas duas representações decimais:*

(a) $a_0, a_1 . \ldots . a_{p-1} . a_p . 9.9.9 \ldots$, $a_p \neq 9$, *e* $a_0, a_1 . \ldots a_{p-1} . (a_p + 1) . 0.0.0. \ldots$, *caso* $x \notin \mathbb{N}$.

(b) $a_0, 999\ldots$ *e* $(a_0 + 1), 000\ldots$, *caso* $x \in \mathbb{N}$.

Os demais números em $[0, +\infty)$ *tem representação única.*

Prova. Suponhamos duas representações distintas de $x \geq 0$,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots = b_0 + \frac{b_1}{10} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots \,, \ 0 \leq a_i, b_i \leq 9 \,, i \in \mathbb{N} \ .$$

Seja $p = \min \{ i \in \mathbb{N} : a_i \neq b_i \}$. Caso $p \geq 1$, temos $a_i = b_i$ se $0 \leq i \leq p - 1$ e portanto,

$$\frac{a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots = \frac{b_p}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots \,, \ a_p \neq b_p \ .$$

Admitamos, sem perda de generalidade, $b_p = a_p + k$, $k \geq 1$. Então,

$$\frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots = \frac{k}{10^p} + \frac{b_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots \ .$$

Na equação acima, o máximo no lado esquerdo ocorre se e só se $a_i = 9$, $\forall i \geq p+1$ e é $\frac{1}{10^p}$ e o mínimo no lado direito ocorre se e só $k = 1$ (estamos supondo $k \geq 1$) e $b_i = 0$, $\forall i \geq p + 1$ e é $\frac{1}{10^p}$. Assim, como vale a igualdade, temos $b_p = a_p + 1$ e, para todo $i \geq p + 1$, $a_i = 9$ e $b_i = 0$ e

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p}{10^p} + \frac{9}{10^{p+1}} + \ldots \frac{9}{10^n} + \ldots = b_0 + \frac{b_1}{10} + \ldots \frac{b_{p-1}}{10^{p-1}} + \frac{a_p + 1}{10^p} \ .$$

O caso $p = 0$ é análogo ∎

Apêndice 1 - Fórmulas de Taylor com Resto Integral e de Lagrange.

Integrando $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $\varphi^{(n+1)}$ integrável, sucessivamente por partes obtemos,

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t)dt \\
&= \int_0^1 1.\varphi'(t)dt \qquad \text{(substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi'\text{)} \\
&= t\varphi'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) \ - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t)dt - \int_0^1 t\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt \qquad \text{(pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi''\text{)} \\
&= \varphi'(0) \ - \ \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \\
&= \varphi'(0) + \tfrac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \tfrac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)dt \qquad \text{(pomos } u' = \tfrac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi'''\text{)} \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2} \ - \ \tfrac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(3)}(t)\Big|_0^1 \ + \ \int_0^1 \tfrac{(1-t)^3}{6}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \tfrac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \int_0^1 \tfrac{(1-t)^3}{3!}\varphi^{(4)}(t)dt = \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \tfrac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \tfrac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} \ + \ \dots \ + \ \tfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \ + \ \int_0^1 \tfrac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt \ .
\end{aligned}
$$

5.55 Teorema (Fórmula de Taylor com resto integral). *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n+1)}$ é integrável. Dados $x_0, x \in (a,b)$ existe ξ entre x_0 e x, tais que $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, satisfazendo*

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \dots . + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \ .$$

Prova. Seja $\varphi(t) = f\big(x_0 + t(x-x_0)\big)$, $t \in [0,1]$. Então,

$$
\begin{cases}
\varphi(0) = f(x_0) \\
\varphi(1) = f(x) \\
\varphi'(t) = f'\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0) \\
\varphi''(t) = f''\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^2 \\
. \\
. \\
\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)(x-x_0)^k \,, \quad 1 \leq k \leq n+1 \,, \\
\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \,, \quad 1 \leq k \leq n+1 \ ,
\end{cases}
$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n\, dt =$$

$\Big[$com a mudança linear de variável $y = x_0 + t(x-x_0)$, $dy = (x-x_0)dt$ e $t = \frac{y-x_0}{x-x_0}\Big]$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!}\Big(1-\frac{y-x_0}{x-x_0}\Big)^n \frac{dy}{x-x_0}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n dy \quad \blacksquare$$

Chamamos $P_{n;x_0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ de polinômio de Taylor de ordem n de f, no ponto x_0, e $R_{n;x_0}(x) = f(x) - P_{n;x_0}(x)$ de resto.

A expressão $R_{n;x_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ é a forma integral do resto.

O resultado abaixo generaliza o Teorema do Valor Médio (TVM). Consideremos $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

5.56 Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que existe $f^{(n+1)}$, n fixo em $\mathbb{N}$. Dados $x_0, x \in I$, com $x \neq x_0$, existe um número ξ entre x_0 e x, com $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = \xi(x)\ .$$

Prova. Pelo TVM existe ξ_1 entre x e x_0, $\xi_1 \notin \{x, x_0\}$, com $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1)$ e,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x-x_0)\ .$$

Seja $\eta \in \mathbb{R}$ determinado pela equação $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \eta(x-x_0)^2$. Então,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \eta(x-t)^2 \text{ satisfaz } \ \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)\ .$$

Logo, existe ξ_2 entre x_0 e x, $\xi_2 \neq x_0$ e $\xi_2 \neq x$, tal que $0 = \varphi'(\xi_2)$. Porém,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = \big[2\eta - f''(t)\big](x-t),$$

e avaliando tal identidade em ξ_2 obtemos $2\eta - f''(\xi_2) = 0$ e $\eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)^2\ .$$

De forma análoga, determinando λ pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \lambda(x - x_0)^{n+1} \ ,$$

definimos a função derivável ψ,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 \ldots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - \lambda(x-t)^{n+1} \,; \ \ \psi(x_0) = 0 = \psi(x),$$

cuja derivada é a soma abaixo, em que cada segundo termo entre colchetes cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores,

$$\begin{aligned} \psi'(t) \ &= \Big[-f'(t) \Big] + \Big[-f''(t)(x-t) + f'(t) \Big] + \Big[-\tfrac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) \Big] \ldots\ldots + \\ &+ \ldots. + \Big[-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \Big] + \lambda(n+1)(x-t)^n = \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n \ . \end{aligned}$$

Uma vez mais, existe ξ entre x_0 e x, $\xi \neq x_0$ e $\xi \neq x$, tal que $\psi'(\xi) = 0$ e portanto,

$$\lambda(n+1)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \Longrightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

A expressão $R_{n;x_0} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ é a forma de Lagrange do resto.

Apêndice 5-B

Segunda Prova da Comparação entre os Testes da Razão e da Raíz

Abaixo, uma forma mais fraca do Teorema 3.28 evitando o uso de $\limsup$ ou de $\liminf$.

5.57 Proposição. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0,+\infty]$ *então* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Prova. Se $L < \infty$ e $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta < \epsilon$ e n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $L - \delta < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \delta$. Logo,

$$(L-\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}| \leq |a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}.....\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq (L+\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

e, ainda para $n > n_0$,

$$\frac{(L-\delta)^n}{(L-\delta)^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{(L+\delta)^{n_0}} .$$

Sendo $L - \delta < L < L + \delta$ temos (omitimos o caso $L = 0$, que é similar)

$$\frac{(L-\delta)^n}{L^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{L^{n_0}},$$

e, definindo $\alpha = \frac{|a_{n_0}|}{L^{n_0}}$,

$$\sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta)\,, \quad \forall n > n_0.$$

Como $\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < 1 < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$, fixamos $N > n_0$ tal que, se $n > N$,

$$\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < \sqrt[n]{\alpha} < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}\,,$$

e concluímos este caso observando as desigualdades

$$(L-\epsilon) < \sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta) < (L+\epsilon),\ \forall\ n > N \ .$$

O caso $L = +\infty$ é redutível ao caso $L = 0$ aplicando este à sequência $(\frac{1}{a_n})$ ■

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 5

1. Mostre que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e quaisquer que sejam $n, N \in \mathbb{N}$, com $N \geq n$, temos

$$\sum_{j=n}^{N} z^j = \frac{z^n - z^{n+N+1}}{1-z} \ .$$

2. Verifique as fórmulas abaixo.

   (a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (c) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Mostre que $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} z_j w_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_j w_k = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m} w_k\right)$.

4. Sejam $(z_j)_{1\leq j\leq n}$ e $(w_k)_{1\leq k\leq n}$ duas sequências finitas em $\mathbb{C}$. Verifique

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j}\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n}|z_jw_k - z_kw_j|^2 \ .$$

   Utilizando (a), deduza a desigualdade de Cauchy (vide Exercício 2.8).

5. Verifique a Propriedade Telescópica:

$$\sum_{k=m}^{n}\big(z_{k+1} - z_k\big) = z_{n+1} - z_m.$$

6. Calcule, aplicando a propriedade telescópica,

   (a) $\sum_{k=1}^{n}[\,(k+1)^3 - k^3\,]$.

   (b) $\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j(j-1)}$

   (c) $\sum_{j=100}^{500}\frac{1}{j(j+1)(j+2)}$

   Sugestão para (c): verique que $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}\right)$

7. Calcule a soma da série dada.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\pi^{-k}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

(d) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

8. Calcule a soma da série dada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n$, $0 < \alpha < 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)^2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+p)}$, onde $p \geq 1$ é um natural fixo.

9. Determine a convergência ou divergência das séries (v. Guidorizzi, Vol. 4).

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2+1}$.

(b) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^2\log(k)}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{k}}{1+k^4}$

(d) $\sum\limits_{p=4}^{+\infty}\log\frac{2p}{p+1}$

(e) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}\frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$.

10. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{4k^3-k+10}$.

(b) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$.

(c) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}{k^2+7k+11}$.

(d) $\sum\limits_{k=20}^{+\infty}\frac{2^k}{k^5}$.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}$

(f) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k(\log k)^{10}}$

(g) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$.

11. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{1+4^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$.

(d) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{n^3+4}{2^n}$

12. Estude, com relação à convergência ou divergência:

(a) $\sum\limits_{k=27}^{+\infty}\frac{1}{k\log k\ \log(\log k)}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}$

(c) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^3\ \log(k)}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n}}$

(e) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{k^2+5}{k^2\ (\log k)^3}$

13. Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$. Mostre que

$$\text{se } \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|}\right) \in (-\infty, +\infty) \quad \text{então} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|} = 1 \,.$$

14. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

    (a) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$, $\alpha > 0$.

    (b) $\sum\limits_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$, $\alpha > 1$

    (c) $\sum\limits_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

    (d) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$

    (e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$.

15. Dadas as séries $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ e $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, seja a_n o termo geral de cada uma delas. Verifique as afirmações abaixo.

    (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ (Teste da razão).

    (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = 1$ (Critério de Raabe).

    (c) A primeira diverge e a segunda converge.

16. Determine os valores de $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que são convergentes as séries:

    (a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$

    (b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$.

17. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Consideremos a sequência $(|a_n|)$, $n \geq 1$, dos coeficientes binomiais $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$. Verifique as afirmações abaixo.

    (a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim a_n = 0$ e $(|a_n|)_{n\geq n_0}$, $n_0 > \alpha$, decresce.

    (b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim a_n \neq 0$.

    (c) Se $\alpha < -1$ então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ diverge.

18. Seja $0 < \alpha < 1$. Então,

    (a) A série (não alternada) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é convergente.

    (b) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é alternada e convergente.

19. Se $-1 < \alpha < 0$ então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ converge condicionalmente.

20. Mostre que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

    (a) Diverge, se $|x| > 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

    (b) Converge absolutamente, se $|x| < 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

    (c) Se $\alpha > 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

    (d) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1, 1]$ e converge condicionalmente se $x = 1$.

    (e) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1, 1)$.

21. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

22. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

    (a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n + n^2}{n^4}$

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)$

    (c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

    (d) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+3n+1}}{n^3 (\log n)^2}$

    (e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$

    (f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

    (g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3} - 1\right)$

    (h) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$.

23. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

    (a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

    (c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

    (d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

    (e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$

    (f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7.....(2n+1)}$

    (g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2.4.6.....(2n)}{n^n}$.

24. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n\geq p}^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$, com p fixo em $\mathbb{N}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.....(2n+1)}{4.6.8......(2n+4)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6....(2n)}}$.

25. Nos exercícios abaixo determine se a série $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ é convergente ou divergente. No caso de convergência, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

(a) $a_n = \frac{\sin(2n+1)}{n^{20}}$

(b) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n-3}{10n+4}$

(c) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\log n}$

(d) $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(e) $a_n = (-1)^n \left[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \right]^3$

(f) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n + e^{-n})}$.

25. Determine $z \in \mathbb{C}$ para que a série dada seja convergente:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} z^{2n}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^n$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

(e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

(g) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{\log n}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1.3.5......(2n+1)}$.

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)z^n}{n!}$.