NÚMEROS COMPLEXOS

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TFA E VERSÕES POLINOMIAIS DE TEOREMAS CLÁSSICOS

4.1 - Introdução

Este capítulo mostra duas provas do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). A primeira é elementar, e desloca a prova do TFA do âmbito da Álgebra, da Teoria das Funções Holomorfas (também chamada Teoria das Funções Analíticas) e da Topologia Algébrica, para os cursos de Cálculo em Duas Variáveis Reais. Em geral, o TFA é provado em cursos de Análise Complexa como um corolário do Teorema de Liouville, o qual segue da Fórmula Integral de Cauchy. Em cursos de Álgebra o TFA é comumente provado via Teoria de Extensões de Corpos, ou via Teoria de Galois, além de algum teorema de Análise (em geral, o Teorema do Valor Intermediário). A primeira prova se apóia em fatos básicos sobre $\mathbb{R}$ e em cálculos com números complexos que, embora um pouco sutis, são simples. A segunda é a bela prova de Argand, com a feição moderna dada em *The Fundamental Theorem of Algebra*, F. Terkelsen, Amer. Math. Monthly (1976) vol. 83, p. 647. A prova de Argand é não elementar pois utiliza a extração de raízes n-ésimas arbitrárias de um número complexo qualquer, o que é usualmente feito com a função exponencial complexa, a qual é transcendental (pois é definida por uma série de potências infinita). As funções trigonométricas também são transcendentais.

4.2 - A Propriedade Poligonal do Valor Médio para Polinômios e o Princípio do Módulo Máximo para Polinômios

Os dois resultados a seguir são de prova muito fácil, sendo possível ensiná-los no nível médio. O primeiro destes resultados foi provado independentemente por Kakutani e Nagamo [42] e Walsh [71], que ficou surpreso pela sua simplicidade.

4.1 Teorema [Kakutani-Nagamo (1935), Walsh (1936)]. *Consideremos* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *um polinômio e* $\omega = e^{i\pi/n}$. *Dados* z_0 *e* z *arbitrários em* $\mathbb{C}$ *temos,*

$$P(z_0) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} P(z_0 + z\omega^k) \ .$$

Prova. Supondo $z_0 = 0$, consideremos os $2n$ polinômios

$$P_k(z) = P(z\omega^k) = a_0 + a_1 z\omega^k + ... + a_n z^n \omega^{kn} \,, \quad 0 \leq k \leq 2n-1 \ .$$

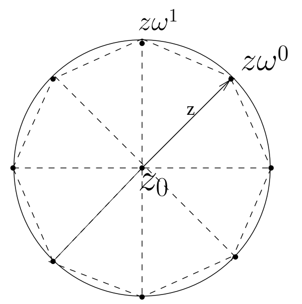

Figura 4.1: Propriedade Poligonal do Valor Médio, com $n = 4$

É fácil ver que

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \omega^{kj} = \begin{cases} 2n\,, & \text{se } j = 0 \\ \frac{1-\omega^{2nj}}{1-\omega^j} = 0\,, & \text{se } 1 \leq j \leq n \ . \end{cases}$$

Donde trivialmente segue a identidade, $\sum_{k=0}^{2n-1} P_k(z) = 2na_0 = 2nP(0)$. Assim, com a translação $Q(z) = P(z_0 + z)$ concluímos

$$2nP(z_0) = 2nQ(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} Q_k(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} Q(z\omega^k) = \sum_{k=0}^{2n-1} P(z_0 + z\omega^k) \ \blacksquare$$

Como consequência da Propriedade Poligonal do Valor Médio obtemos uma demonstração bastante fácil do Princípio do Módulo Máximo para Polinômios, que não utiliza a continuidade polinomial (porém, tal prova não é elementar pois utiliza a função exponencial). Quanto a tal princípio, vale citar que Conway [28, p. 79] escreve "... there is a property of analytic functions which is not so transparent for polynomials". Para Conway, funções analíticas são aquelas que neste texto denominamos funções holomorfas.

4.2 Princípio do Módulo Máximo para Polinômios. *Seja* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $n \geq 1$, *um polinômio e* z_0 *um ponto de máximo local de* $|P|$. *Então,* P *é constante.*

Prova.

Suponhamos $z_0 = 0$. Por hipótese, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| \leq |P(0)|$, para todo z no disco fechado $\overline{D}(0;R)$. Seja z tal que $|z| \leq R$ e $\omega = e^{i\pi/n}$. Pela Propriedade Poligonal do Valor Médio temos,

$$P(0) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} P(z\omega^k) \ .$$

Donde, como $|P(0)|$ é ponto de máximo de $|P|$ em $\overline{D}(0;R)$, segue

$$|P(0)| \ \leq \ \frac{1}{2n}\Big[\,|P(z\omega^0)|+...+|P(z\omega^{2n-1})|\,\Big] \ \leq \ \frac{1}{2n}\Big[\,|P(z)| + (2n-1)|P(0)|\,\Big] \ \leq \ |P(0)| \, .$$

Logo, $|P(z)| = |P(0)| = |a_0|$ se $z \in \overline{D}(0;R)$. Assim, dado $z = x \in [0,R]$ temos

$$|a_0|^2 = \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 x^{2j} \ + \ 2\sum_{0\leq\mu<\nu\leq n} \mathrm{Re}[\,\overline{a_\mu}a_\nu\,]x^{\mu+\nu}$$

e, isolando o coeficiente do monômio x^{2n} (que é o de maior expoente)

$$\sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2 x^{2j} \ + \ 2\sum_{0\leq\mu<\nu\leq n} \mathrm{Re}[\,\overline{a_\mu}a_\nu\,]x^{\mu+\nu} \ + \ |a_n|^2 x^{2n} = 0\,, \quad \forall \ x \in [0,R]\,,$$

e assim $a_n = 0$. Iterando o argumento segue $a_{n-1} = ... = a_1 = 0$ e $P(z)$ constante ∎

4.3 - O Teorema Fundamental da Álgebra

A demonstração do TFA apresentada a seguir é elementar no sentido que não usa derivação, integração ou séries (chamados processos infinitos) e também não utiliza funções trigonométricas [e portanto não usa a Fórmula de Moivre $(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\mathrm{sen} n\theta$ ou a Fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$], cuja fundamentação requer o estudo de séries ou de equações diferenciais. A demonstração também é direta e não requer a utilização de $\epsilon's$ e $\delta's$.

Raízes Quadradas. Já vimos que a equação $z^2 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, é solúvel em $\mathbb{C}$ e,

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,, \text{ com } \mathrm{sgn}(b) = \begin{cases} \frac{b}{|b|} \text{ se } b \neq 0 \\ \mathrm{sgn}(0) = 1\,. \end{cases}$$

Aplicando tal fórmula sucessivamente obtemos as 2^j-raízes de $z \in \{\pm 1, \pm i\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

4.3 Teorema Fundamental da Álgebra. *Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$, com grau$(P) \geq 1$. Então,*

(A) Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_0)| \leq |P(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(B) Para tal z_0 temos $P(z_0) = 0$.

Prova:

(A) Se $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, pela desigualdade triangular temos

$$|a_0 + ... + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n| \;\geq\; |a_n z^n| - |a_0 + ... + a_{n-1}z^{n-1}|$$

e então, novamente pela desigualdade triangular,

$$|P(z)| \;\geq\; |a_n|\,|z|^n - |a_0| - .... - |a_{n-1}|\,|z|^{n-1}\,.$$

Donde segue trivialmente que $|P(z)|$ tende a $+\infty$ se $|z| \to +\infty$.

Assim, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ se $|z| > R$ e, como $|P|$ é uma função contínua em $\overline{D}(0;R)$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a função $|P|$ restrita a tal disco assume um valor mínimo $|P(z_0)| \leq |P(0)|$, onde $|z_0| \leq R$. Desta forma temos $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(B) É claro que o polinômio $z \mapsto P(z_0 + z)$, de grau n, satisfaz

$$\min_{z\in\mathbb{C}} |P(z_0 + z)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)| = |P(z_0 + 0)| \;.$$

Logo, podemos supor sem perda de generalidade que o valor minimo de $|P|$ é assumido em $z_0 = 0$. Ainda, como P não é constante, existe o menor $k \geq 1$ tal que $a_k \neq 0$. Simplificando, existe um polinômio complexo Q tal que

(1) $$P(z) = P(0) + z^k Q(z)\,, \text{ com } Q(0) \neq 0 \text{ e } k \geq 1\;.$$

Utilizemos as notações $S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$ e $z = r\omega$, com $r \geq 0$ e $\omega \in S^1$. Como $z_0 = 0$ é ponto de mínimo de $|P|$ temos

$$|P(r\omega)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0\,,\;\; \forall r \geq 0\,, \forall \omega \in S^1\;.$$

Computando (1) em $z = r\omega$ e substituindo na desigualdade acima obtemos

$$\big[\, P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)\,\big]\big[\,\overline{P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)}\,\big] \;-\; \big|P(0)\big|^2 \geq 0\;\;,$$

que simplificando nos fornece,

$$2r^k \mathrm{Re}\big[\overline{P(0)}\omega^k Q(r\omega)\,\big] + r^{2k}\big|Q(r\omega)\big|^2 \geq 0\,,\quad \forall r \geq 0\,, \forall \omega \in S^1\,,$$

e então, dividindo por $r^k > 0$ e fixando $\omega \in S^1$ encontramos

$$2\mathrm{Re}\big[\,\overline{P(0)}\,Q(r\omega)\omega^k\,\big] \;+\; r^k\big|Q(r\omega)\big|^2 \;\geq 0\,,\quad \forall r > 0\;,$$

com a expressão à esquerda contínua em $r \in [0, +\infty]$. Logo, em $r = 0$ temos

(2) $$2\mathrm{Re}\big[\,\overline{P(0)}Q(0)\,\omega^k\,\big] \geq 0\;,\;\text{ com } \omega \text{ arbitrário em } S^1\;.$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)}Q(0)$. É fácil ver que, fatorando potências[1] de 2 podemos escrever $k = 2^j m$, com m ímpar. Substituindo $\omega = 1$ em (2) temos $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$. Escolhendo, como podemos, ω tal que $\omega^{2^j} = -1$ concluímos $\mathrm{Re}[\alpha] \leq 0$ e assim, $\mathrm{Re}[\alpha] = 0$. Escolhendo, como também podemos, ω tal que $\omega^{2^j} = i$ obtemos $\omega^k = \pm i$ e $\overline{\omega}^k = \mp i$ e então, substituindo os valores ω e $\overline{\omega}$ em (2) concluímos $\mathrm{Im}[\alpha] = 0$. Logo, $\alpha = 0$ e, como $Q(0) \neq 0$, $P(0) = 0$ ■

[1] Exemplos: $38 = 2^1.19$, $12 = 2^2.3$, $17 = 2^0.17$, $96 = 2^5.3$, $168 = 2^3.21$, $172 = 2^2.43$, etc.

Como subprodutos da prova do TFA demonstramos os dois princípios abaixo. Notemos que, analogamente ao TFA, tais princípios podem ser provados elementarmente, eliminando a necessidade da exponencial complexa.

4.4 Teorema. *Seja* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *um polinômio não constante. Então,*

(a) **(Princípio do Módulo Máximo)** $|P|$ *não tem máximo local.*

(b) **(Princípio do Módulo Mínimo)** $|P|$ *não tem mínimo local, ou se anula.*

Prova. Admitamos $z_0 = 0$ um ponto de máximo/mínimo local de $|P|$. A expressão

$$|P(z)|^2 - |P(0)|^2$$

tem sinal constante para z em um disco $D(0;R)$, $R > 0$. Ainda, existe um número natural $k \geq 1$ e um polinômio $Q = Q(z)$ tais que

$$P(z) = P(0) + z^k Q(z)\,, \quad Q(0) \neq 0\ .$$

Escrevendo $z = re^{i\theta}$, $0 < r < R$, $\theta \in \mathbb{R}$, e combinando as expressões acima obtemos,

$$|P(re^{i\theta})|^2 - |P(0)|^2 = 2r^k \mathrm{Re}\Big[\,\overline{P(0)} e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})\,\Big] \ + \ r^{2k}|Q(re^{i\theta})|^2\ ,$$

de sinal constante e que se mantém ao dividirmos o 2 membro por r^k, $0 < r < R$:

$$2\mathrm{Re}\Big[\,\overline{P(0)} e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})\,\Big] \ + \ r^k|Q(re^{i\theta})|^2\ .$$

Fixado θ, por continuidade o limite da expressão acima para $r \to 0^+$ é a expressão

$$2\mathrm{Re}\Big[\,\overline{P(0)} Q(0) e^{ik\theta}\,\Big],$$

que conserva o sinal de sua predecessora, qualquer que seja θ. Isto só é possível se $\overline{P(0)}Q(0) = 0$ (verifique). Portanto, como $Q(0) \neq 0$, concluímos que $P(0) = 0$.

(a) Se 0 é valor máximo local então P é nulo em $D(0;R)$ e assim P é nulo em todo o plano $\mathbb{C}$, contra a hipótese. Logo, $|P|$ não admite máximo local.

(b) Se 0 é valor mínimo local, provamos que $P(0) = 0$ como desejado ∎

Comentário. Sobre o Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios, notemos:

(1) Sua “proximidade” do TFA, já que aplicando o Teorema de Bolzano-Weierstrass e o referido princípio obtemos então o TFA.

(2) Tal princípio não pode ser provado da forma usual pela qual é provado o Princ. Mod-Min para funções analíticas (i.e., analisando $\frac{1}{f}$ se f é analítica e não se anula). Pois, se P é um polinômio nem sempre $\frac{1}{P}$ é um polinômio.

(3) Vaggione [70] prova o TFA mostrando um Princípio do Módulo Máximo para funções racionais.

Brevemente (Capítulo 8) veremos que o Princípio do Módulo Máximo vale também para a classe de funções dadas localmente por séries de potências. Desta forma, antecipando tal resultado e considerando $D(0;1) \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, a figura abaixo representa em $\mathbb{R}^3$ o gráfico da função $|\cos z|$, $|z| < 1$. Notemos que $|\cos z|$ não assume máximo ou mínimo em $D(0;1)$.

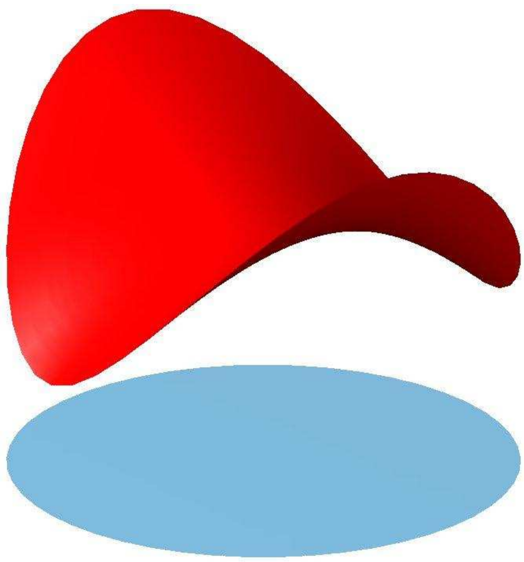

Figura 4.2: O Princípio do Módulo Máximo e o gráfico de $|cosz|, |z| < 1$

4.5 Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios (TAA). *Seja $P = P(z)$ um polinômio não constante e O aberto em $\mathbb{C}$. Então, $P(O)$ é aberto.*

Prova (Carathéodory). Seja O um aberto não vazio em $\mathbb{C}$ e $w \in O$. Mostremos que existe um disco aberto $D\big(P(w); r\big)$, $r > 0$, contido em $P(O)$.

Como w é zero isolado do polinômio não constante $Q(z) = P(z) - P(w)$, segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $P(z) - P(w) \neq 0$ se $z \in \partial D(w;\epsilon)$. Portanto,

$$P(w) \notin P\big(\partial D(w;\epsilon)\big) .$$

Como P é contínua, temos que $P\big(\partial D(w;\epsilon)\big)$ é compacto. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass segue que $\min\limits_{z \in \partial D(w;\epsilon)} |P(z) - P(w)| > 0$.

Consideremos,

$$\begin{cases} 2r = \min\limits_{z \in \partial D(w;\epsilon)} |P(z) - P(w)| \,, \\ \text{um ponto arbitrário } \beta \text{ em } D\big(P(w); r\big) \,, \\ \text{o polinômio } P(z) - \beta \,. \end{cases}$$

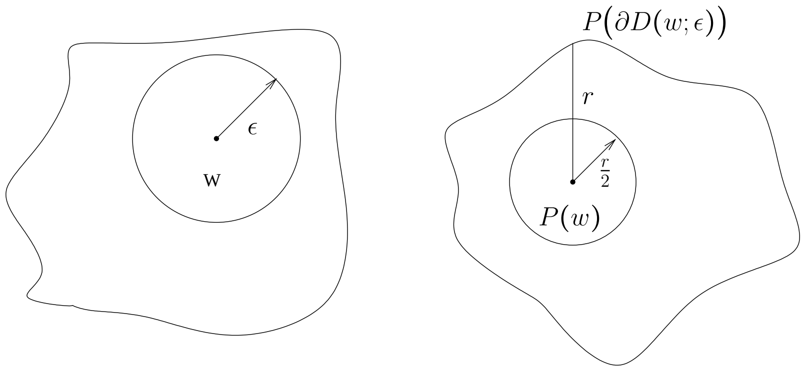

Figura 4.3: Ilustração ao Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios

Para o centro w de $D(w;\epsilon)$ temos $|P(w) - \beta| < r$. Porém, para $z \in \partial D(w;\epsilon)$,

$$|P(z) - \beta| \geq |P(z) - P(w)| - |P(w) - \beta| > 2r - r = r \,.$$

Logo, o ponto de mínimo da função $|P(z) - \beta|$ em $\overline{D}(w;\epsilon)$ pertence ao aberto $D(w;\epsilon)$ e como $z \mapsto P(z) - \beta$ não é constante, pelo Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios existe $z_0 \in D(w;\epsilon)$ tal que $P(z_0) - \beta = 0$; isto é, $P(z_0) = \beta$ ■

É possível obter uma prova direta e elementar (sem utilizar a exponencial complexa) do resultado acima. É fácil ver que o Teorema da Aplicação Aberta implica o TFA e, portanto, os Princípios do Módulo Máximo e do Módulo Mínimo.

Sobre o TAA indicamos ao leitor o artigo de Cater [22], publicado em 2001/2002.

4.4 - Desigualdade de Gutzmer-Parseval e Desigualdade de Cauchy

Já em 1832 A. L. Cauchy conhecia as desigualdades que vieram a ter seu nome. Em 1841 K. Weierstrass provou com *métodos elementares* (isto é, não utilizando a teoria da integração) as desigualdades de Cauchy para *funções analíticas*, vide Remmert [60, pp. 247-248]. Em 1888 A. Gutzmer (1860-1925) publicou a fórmula

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\, d\theta$$

para *funções holomorfas*.

Curiosamente, com as pesquisas por uma teoria das funções holomorfas livre da teoria da integração P. Porcelli e L. M. Weiner [56] em 1957 publicaram uma desigualdade de Cauchy para polinômios (utilizando um determinante de Vandermonde!), mostrando que se

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n\,,\ \text{satisfaz } |P(z)| \leq 1 \text{ se } |z| \leq 1\,,$$

então temos $|a_i| \leq 1$, para $i = 0, \dots n$. Tal resultado foi novamente provado, e é então utilizado, por Connell, E. H. e Porcelli, P. [27] em 1962. Vide também Leland, K. O. [48], publicado em 1965.

É muito fácil provar uma versão do teorema abaixo que não utiliza a continuidade do polinômio $P(z)$ em questão. De fato, basta observar que é suficiente substituirmos $\max\{|P(z)| : |z| = r\}$ por $\sup\{|P(z)| : |z| = r\}$, na prova que segue.

4.6 Desigualdade de Gutzmer-Parsevall para Polinômios. *Consideremos o polinômio* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *e* $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |P(z)|$, *com* $r > 0$. *Temos,*

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2\, |r|^{2j} \leq M(r)^2\ .$$

Prova.

Sejam $\omega = e^{i\pi/n}$ (logo, $\omega^n = -1$) e os $2n$ polinômios na variável z,

$$P_k(z) = P(z\omega^k)\,, \quad \text{com} \;\; 0 \leq k \leq 2n-1 \;.$$

Fixado k é fácil ver que

$$|P_k(z)|^2 = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \omega^{k\nu}\Big)\overline{\Big(\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^\mu \omega^{k\mu}\Big)} = \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \overline{a_\mu}\,\overline{z}^\mu \omega^{k\nu}\overline{\omega}^{k\mu} =$$

$$= \sum_{0\leq j\leq n} |a_j|^2\,|z|^{2j} \;+\; 2\sum_{0\leq\mu<\nu\leq n} \mathrm{Re}\big[\, a_\nu z^\nu \overline{a_\mu}\,\overline{z}^\mu \omega^{k\nu}\overline{\omega}^{k\mu}\,\big] \;.$$

Se $\mu < \nu$, então $\nu - \mu$ percorre $\{1,...,n\}$. Escrevendo $\overline{\omega}^{k\mu}\omega^{k\nu} = \omega^{k(\nu-\mu)}$ obtemos,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \omega^{k(\nu-\mu)} = \frac{1-\omega^{2n(\nu-\mu)}}{1-\omega^{\nu-\mu}} = 0\,, \qquad \text{se } 0 \leq \mu < \nu \leq n\,,$$

donde segue a identidade $\sum_{k=0}^{2n-1}\big[\,\overline{a_\mu}\,\overline{z}^\mu a_\nu z^\nu \overline{\omega}^{k\mu}\omega^{k\nu}\,\big] = 0$. Assim, é fácil ver que

$$\sum_{k=0}^{2n-1} |P_k(z)|^2 = 2n\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2\,|z|^{2j} \;.$$

Ainda, pela igualdade $\max\limits_{|z|=r}|P_k(z)| = \max\limits_{|z|=r}|P(z)|$ segue

$$\sum_{k=0}^{2n-1} |P_k(z)|^2 \leq 2nM(r)^2 \;\;, \;\text{if } |z| = r \;.$$

O teorema segue então dos dois últimos somatórios acima, em destaque ∎

4.7 Corolário (Desigualdade de Cauchy para polinômios). *Suponhamos que $P(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^j$ satisfaz $|P(z)| \leq M$ se $|z| \leq r$, com $r > 0$ fixo. Então,*

$$|a_j| \leq \frac{M}{r^j} \;.$$

Prova. Trivial ∎

Apêndice 4-A - A prova de Argand para o TFA

A demonstração do TFA dada por Argand (1806) , considerada falha à época é válida hoje. A prova abaixo é uma versão moderna da original feita por Argand e se encontra em *The Fundamental Theorem of Algebra*, F. Terkelsen, Amer. Math. MOnthly (1976), 83, p. 647. Argand, em sua prova, simplifica espetacularmente o Lema de d'Alembert, enunciado por d'Alembert em 1746:

Seja $P(z)$ um polinômio complexo e $P(z_0) \neq 0, z_0 \in \mathbb{C}$.
Então, existe $z \in \mathbb{C}$ com $|P(z)| < |P(z_0)|$.

A desigualdade acima passou a ser também chamada Desigualdade de Argand.

Assim como d'Alembert, muitos outros matemáticos, se dedicaram ao estudo do TFA devido às suas pesquisas sobre métodos (o hoje dito Método das Frações Parciais) para a integração de funções racionais.

A aceitação da interpretação de Argand para o conjunto $\mathbb{C}$ como o plano complexo que hoje conhecemos se deve em grande parte ao sucesso de Argand em obter com tal interpretação geométrica uma prova considerada muito fácil para o TFA. No entanto, como a prova de Argand utiliza a existência das raízes n-ésimas, n arbitrário em $\mathbb{N}$, de um número complexo arbitrário em $\mathbb{C}$, ela não é "elementar" para os padrões de rigor modernos.

4.8 TFA (Prova de Argand). *Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$, de grau maior ou igual a 1. Então,*

(A) Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_0)| \leq |P(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(B) Para tal z_0 temos $P(z_0) = 0$.

Prova:

(A) A prova deste item é idêntica à prova do ítem (A) no Teorema 4.3.

(B) Por contradição, suponhamos $P(z_0) = a \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos $z_0 = 0$. Logo, temos $|a| = |P(0)| \leq |P(z)|, \forall z \in \mathbb{C}$. Assim,

$$P(z) = a + bz^n + z^{n+1}Q(z)\,,\ \text{com } n \geq 1\,, b \neq 0 \text{ e } Q \text{ um polinômio em } \mathbb{C}\,.$$

Seja $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^n = -\frac{a}{b}$. Existe $t \in (0,1)$ tal que $t|w^{n+1}Q(tw)| < |a|$. Logo,

$$
\begin{aligned}
P(tw) &= a \; + \; b(tw)^n \; + \; (tw)^{n+1}Q(tw) \\
&= (1-t^n)a \; + \; (tw)^{n+1}Q(tw)\,,
\end{aligned}
$$

pois $bw^n = -a$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|P(tw)| \; &\leq \; (1-t^n)|a| \; + \; t^{n+1}|w^{n+1}Q(tw)| \\
&< \; (1-t^n)|a| \; + \; t^n|a| = |a| \; \lightning
\end{aligned}
$$

Suponhamos mais uma vez que é admissível extrair raízes n-ésimas de números complexos. Então, uma outra demonstração, diferente da de Argand pois que direta, pode ser dada para $|P(z_0)| = 0$, z_0 o ponto de mínimo de $|P|$.

(B') Podemos supor $z_0 = 0$ e, ainda, $P(z) = a_0 + a_k z^k + ... + a_n z^n$, com

$$|a_0| \leq |a_0 + a_k z^k ... + a_n z^n|\,, \;\; \forall z \in \mathbb{C} \;.$$

Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^k = -\frac{a_0}{a_k}$ e $z = rw$, com $0 < r < 1$. Logo, $z^k = r^k w^k$ e

$$
\begin{cases}
|a_0| \leq |a_0 + a_k r^k w^k| + r^{k+1}M\,, \\
\text{com } M = |a_{k+1}w^{k+1}| + ... + |a_n w^n| > 0 \;\; \text{se } k < n \;\; \text{e } M = 0 \text{ se } k = n\;.
\end{cases}
$$

Assim, $|a_0| \leq |a_0 - a_0 r^k| + r^{k+1}M = |a_0|(1 - r^k) + r^{k+1}M$ donde segue,

$$|a_0| \leq Mr\,, \forall r \in (0,1)\;.$$

Logo, $|a_0| = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre diretamente e elementarmente (sem utilizar o Princípio do Módulo Mínimo e sem utilizar a função exponencial complexa) o Teorema da Aplicação Aberta para polinômios.

2. Mostre que o TAA 4.5 implica o Princípio do Módulo Mínimo 4.4 (b)

3. Mostre que o TAA 4.5 implica o TFA.

4. Mostre que o TAA 4.5 implica o Princípio do Módulo Máximo 4.4 (a).

5. Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval 4.6 implica o Princípio do Módulo Máximo 4.4 (a).