NÚMEROS COMPLEXOS

Professores Jorge Aragona e Oswaldo R. B. de Oliveira

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2 - POLINÔMIOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

2.1 - Polinômios com Coeficientes Complexos

2.1 Definição. *Uma* função polinomial *de* $\mathbb{C}$ *em* $\mathbb{C}$ *é uma função do tipo:*

$$p : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \in \mathbb{C} \ ,$$

com $m \in \mathbb{N}$ *e* $(a_j)_{0 \leq j \leq m}$ *uma sequência em* $\mathbb{C}$*. Os números* $a_0, .., a_m$ *são os* coeficientes *de* p *e* a_0 *é por vezes dito* primeiro coeficiente *e* p*. Se* $a_0 \neq 0$*,* m *é o* grau de p*, e escrevemos* $m = \partial p$*. Se* $a_0, ..., a_m = 0$*,* p *é a* função polinomial nula *e seu grau é* $-\infty$*; isto é,* $\partial(0) = -\infty$*.*

O conjunto de toda as funções polinomiais é indicado por $\mathbb{C}[z]$.

2.2 Observação. *(a) Na notação* $\mathbb{C}[z]$*, a letra* z *é uma* variável muda *e sua escolha é determinada pela tradição. (b) Estudaremos apenas funções polinomiais em uma variável complexa, salientando que a teoria das funções polinomiais (ou "polinômios", ver Obs....) de várias (e até infinitas) variáveis existe de longa data e é muito relevante em várias áreas da Matemática.*

Dados $p, q \in \mathbb{C}[z]$, com $p : z \mapsto \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}$ e $q : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k z^{n-k}$, então a soma $p + q$ e o produto pq definidos por,

$$p + q : z \longmapsto p(z) + q(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} + \sum_{k=o}^{n} b_k z^{n-k} \,,$$

$$p\, q : z \longmapsto p(z)q(z) = \Big(\sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \Big)\Big(\sum_{k=o}^{n} b_k z^{n-k} \Big) \ ,$$

pertencem ambos a $\mathbb{C}[z]$. Iniciando com o primeiro a afirmação é clara se $m = n$ pois definidos os coeficientes $c_j = a_j + b_j$, $j = 0, 1, ...m$, tem-se

$$p(z) + q(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} c_j z^{m-j} \ ,$$

donde $p + q \in \mathbb{C}[z]$. Se $m \neq n$, supomos sem perda de generalidade $m > n$ e então,

$$\begin{aligned} p(z) + q(z) \ &= a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-n-1} z^{n+1} + (a_{m-n} + b_0) z^n \\ &+ (a_{m-n-1} + b_1) z^{n-1} + ... + (a_{m-1} + b_{n-1}) z + (a_m + b_n)) \,, \end{aligned}$$

e definindo a sequencia finita de números $(c_j)_{0 \leq j \leq m}$ por

$$\begin{cases} c_j & = a_j, & \text{se } 0 \leq j \leq m - n - 1, \\ c_{m-n+k} & = a_{m-n+k} + b_k, & \text{se } 0 \leq k \leq n, \end{cases}$$

resulta $p(z) + q(z) = \sum_{j=0}^{m} c_j z^{m-j}$, donde $p + q \in \mathbb{C}[z]$ e $\partial(p + q) = \max(\partial p, \partial q)$ (mesmo se temos $p = 0$ ou $q = 0$).

Analogamente verificamos $pq \in \mathbb{C}[z]$ pois

$$\begin{aligned} (pq)(z) \ &= p(z)q(z) = \big(\sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \big) \big(\sum_{k=0}^{n} b_k z^{n-k} \big) = (a_z^m + ... + a_m)(b_0 z^n + ...b_n) \\ &= a_0 b_0 z^{m+n} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{m+n-1} + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^{m+n-2} + ... + a_m b_m \\ &= \sum_{p=0}^{m+n} c_z^{m+n-p} \,, \end{aligned}$$

onde $c_p = \sum\limits_{r+s=p} a_r b_s$ $(0 \leq p \leq m + n)$. Observe que, mesmo se $p = 0$ ou $q = 0$,

$$\partial(pq) = \partial(p) + \partial(q) \ . \tag{2.2.1}$$

É claro que a operação adição $(p, q) \mapsto p + q$ sobre $\mathbb{C}[z]$ é associativa, comutativa, admite a função polinomial nula como elemento neutro e, ainda, cada elemento $p \in \mathbb{C}[z]$ tem elemento oposto $-p$,

$$(-p)(z) \coloneqq \sum_{j=0}^{m} (-a_j) z^{m-j}, \forall z \in \mathbb{C} \,, \ \text{ se } \ p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}, \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Analogamente, a operação produto $(p, q) \mapsto pq$ sobre $\mathbb{C}[z]$ é associativa, comutativa e tem por elemento neutro a função constante igual a 1 :

$$1 : z \in \mathbb{C} \mapsto 1 \in \mathbb{C} \ .$$

Notemos que 1 é uma função polinomial de grau zero. Por fim, se p, q e r pertencem a $\mathbb{C}[z]$, é imediato que $p(q + r) = pq + qr$. Reunimos as considerações acima no resultado abaixo.

2.3 Proposição. *O conjunto* $\mathbb{C}[z]$ *das funções polinomiais de* $\mathbb{C}$ *em* $\mathbb{C}$*, munido das operações soma* $(p,q) \mapsto p+q$ *e produto* $(p,q) \mapsto pq$ *acima definidas, é um anel unitário e comutativo.*

2.4 Observação. *Usaremos a palavra* polinômio *como sinônimo de função polinomial e frequentemente citaremos os elementos de* $\mathbb{C}[z]$ *como* polinômios com coeficientes complexos.

2.5 Definição. *Dado* $p \in \mathbb{C}[z]$*,* $p \neq 0$*, se* $\alpha \in \mathbb{C}$ *é tal que* $p(\alpha) = 0$*,* α *é um* **zero***, ou* **raíz***, de* p*.*

Um resultado fundamental da teoria de polinômios expressa que um polinômio de grau m têm no máximo m zeros distintos.

2.6 Teorema (Princípio da Identidade) *Se* $p(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_m \in \mathbb{C}[z]$*,* $\partial p \leq m$*, tem mais de* m *zeros distintos então* $p = 0$ *(isto é,* $a_j = 0$*,* $j = 0, 1, ..., m$*, e* $\partial p = \partial 0 - \infty$*).*

Prova. Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1} \in \mathbb{C}$, distintos, com $p(\alpha_j) = 0$, $\forall j = 1, ..., m+1$. Isto é,

$$(S) \qquad \begin{cases} p(\alpha_1) = a_0\alpha_1^m + a_1\alpha_1^{m-1} + ... + a_{m-1}\alpha_1 + a_m.1 = 0 \\ p(\alpha_2) = a_0\alpha_2^m + a_1\alpha_2^{m-1} + ... + a_{m-1}\alpha_2 + a_m.1 = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p(\alpha_{m+1}) = a_0\alpha_{m+1}^m + a_1\alpha_{m+1}^{m-1} + ... + a_{m-1}\alpha_{m+1} + a_m.1 = 0 \ . \end{cases}$$

Utilizando o determinante de Vandermonde associado ao sistema linear homogêneo (S) de $m+1$ equações, com coeficientes α_i^k $(1 \leq i \leq m+1,\ 0 \leq k \leq m)$ e incógnitas $a_0, a_1, ..., a_m$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^m & \alpha_1^{m-1} & .... & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^m & \alpha_2^{m-1} & .... & \alpha_2 & 1 \\ ...... & .... & ..... & ...... & ... \\ ...... & .... & ..... & ...... & ... \\ \alpha_{m+1}^m & \alpha_{m+1}^{m-1} & ..... & \alpha_{m+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0 \ ,$$

resulta, pelo Teorema de Cramer, que (S) é determinado e $a_0 = a_1 = ... = a_m 0$.

2.7 Corolário. *Sejam* $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *tais que* $p \neq 0$ *e* $q \neq 0$*, dados por*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \qquad e \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{n-k} \;\;, \forall z \in \mathbb{C} \;\;,$$

com $a_0 \neq 0$ *e* $b_0 \neq 0$ *(isto é,* $\partial p \geq 0$ *e* $\partial q \geq 0$*). São equivalentes:*

(i) $p = q$ *(isto é,* $p(z) = q(z), \forall z \in \mathbb{C}$*).*

(ii) Existem $l := \max(m, n) + 1$ *números complexos* $\alpha_1, ... \alpha_l$*, distintos, tais que*

$$p(\alpha_j) = q(\alpha_j)\,, \forall j = 1, ..., l \;.$$

(iii) $m = n$ **e** $a_j = b_j$*,* $\forall j = 1, 2, ..., l$*.*

Prova. Como as implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ são triviais, verifiquemos a implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$. Mostremos primeiro a igualdade $m = n$. Supondo por absurdo que $m > n$, o polinômio diferença $d := p - q$ se escreve:

$$d(z) = a_0 z^m + ... + a_{m-n-1} z^{n+1} + (a_{m-n} - b_0) z^n + ... + (a_m - b_n)\,, \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

e por (ii) é claro que

$$d(\alpha_j) = 0\,,\;\; \forall j = 1, 2, ..., l = m + 1 \;. \tag{2.7.1}$$

Como $a_0 \neq 0$ e $\partial d = m$, aplicando o Teorema 2.6 (Princípio da Indentidade) ao polinômio d, em vista de (2.7.1) concluimos que os coeficientes de d são nulos e, em particular, $a_0 = 0$, o que é absurdo. Logo, temos $m = n$ e

$$d(z) = \sum_{j=0}^{m} (a_j - b_j) z^{m-j}\,,\;\; \forall z \in \mathbb{C}\;,$$

e, em consequência, de novo pelo Teorema 2.6 e (2.7.1), obtemos $a_j = b_j$, se $j = 0, 1, 2, ..., m$ ∎

Uma das principais aplicações do Teorema 2.6 (ou do Corolário 2.7) é o **Método dos Coeficientes a Determinar** para encontrar um ou vários polinômios, de grau e forma pré-fixados, que submetidos a certas operações dão um resultado conhecido. Ilustremos com dois exemplos.

2.8 Exemplos. *(a) Transformar* $z \mapsto z^2 + 3/4$ *em diferença de quadrados de dois trinômios:* $z \mapsto (z^2 + az + b)^2 - (z^2 + a'z + b')^2$*.*

(b) Achar m *e* n *tais que o polinômio* $p(z) = z^4 - 10z^3 + mz^2 - 50z + n$ *é um quadrado perfeito.*

Solução.

(a) Impondo $z^2+3/4=(z^2+az+b)^2-(z^2+a'z+b')^2$, $\forall z\in\mathbb{C}$, desenvolvemos:

$$z^2+3/4=2(a-a')z^3+(a^22+2b-a'^2-2b')z^2+2(ab-a'b')z+(b^2-b'^2) \quad (z\in\mathbb{C}).$$

Portanto, pelo Corolário 2.7 seguem as quatro equações:

$$2(a-a')=0\,,\quad a^2+2b-a'^2-2b'=1\,,\quad 2(ab-a'b')=0 \quad \text{e} \quad b^2-b'^2=3/4\,.$$

Da primeira equação resulta $a=a'$, da segunda equação segue $b-b'=1/2$, o que junto com a terceira equação e a igualdade $a=a'$ implica $a(b-b')=0$, isto é, $a'=a=0$. Da quarta equação temos $(b-b')(b+b')=3/4$, donde $(b+b')=3/2$ e, como $b-b'=1/2$, $b=1$ e $b'=1/2$. Logo, a única solução do problema é

$$z^2+3/4=(z^2+1)^2-(z^2+1/2)^2\,.$$

(b) Como $\partial p=4$ e o primeiro coeficiente de p é 1, o polinômio solução, se existir, é da forma $q(z)=z^2+az+b$. Impondo

$$(q(z))^2=z^4+2az^3+(a^2+2b)z^2+2abz+b^2=p(z)=z^4-10z^3+mz^2-50z+n\,,\forall z\in\mathbb{C}\,,$$

obtemos, pelo Corolário 2.7,

$$2a=-10\,,\qquad a^2+2b=m\,,\qquad 2ab=-50 \qquad \text{e} \qquad b^2=n\,,$$

que é um sistema trivial com solução $a=-5$, $b=5$, $n=25$ e $m=35$. A única solução do problema é então

$$z^4-10z^3+35z^2-50z+25=(z^2-5z+5)^2 \quad \blacksquare$$

Como no anel $\mathbb{Z}$, no anel $\mathbb{C}[z]$ é válida a divisão inteira, isto é,

2.9 Proposição. *Dados dois polinômios $P, D \in \mathbb{C}[z]$, com $D \neq 0$, existe um único par de polinômios Q e R em $\mathbb{C}[z]$ verificando,*

$$P = DQ + R\,, \quad e \quad \partial R < \partial D\ .$$

Prova.

Existência. Se $\partial(P) < \partial(D)$ pomos $Q = 0$ e $R = P$.

Suponhamos agora o caso $0 < \partial(D) = m \leq n = \partial(P)$ e escrevamos

$$\begin{cases} P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\,, & \text{com } a_{i's} \in \mathbb{C} \ \text{ e } a_n \neq 0\,, \\ D(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0\,, & \text{com } b_{i's} \in \mathbb{C} \ \text{ e } b_m \neq 0\ . \end{cases}$$

Definindo os polinômios $Q_1(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$ e $R_1 = P - Q_1 D$ é fácil ver que obtemos $\partial(R_1) < n$ e $P = Q_1 D + R_1$. Assim, se $\partial(R_1) < m$ findamos a tarefa. Caso contrário, aplicando um argumento análogo ao polinômio R_1 determinamos $Q_2 \in \mathbb{C}[z]$ tal que o polinômio $R_2 = R_1 - Q_2 D$ satisfaz $\partial(R_2) < \partial(R_1)$ e a identidade $R_1 = Q_2 D + R_2$. Novamente, se $\partial(R_2) < m$ encerramos a tarefa. Senão, iteramos o processo até obtermos $R_{k-1} = Q_k D + R_k$, $\partial(R_k) < m$, e concluirmos

$$P = Q_1 D + Q_2 D + ... + Q_k D + R_k = (Q_1 + ... + Q_k)D + R_k\ .$$

Então, definindo $Q = Q_1 + ... + Q_k$ e $R = R_k$ completamos a prova da existência.

Unicidade.

Se $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{C}[z]$, $\max(\partial(R_1), \partial(R_2)) < \partial(D)$, e $Q_1 D + R_1 = P = Q_2 D + R_2$ então temos $(Q_1 - Q_2)D = R_2 - R_1$ e, analisando graus, $Q_1 - Q_2 = 0 = R_2 - R_1$ ∎

Observação: Com a notação da Proposição 2.9, os polinômios Q e R são ditos quociente e resto da divisão inteira de P por D. Se o resto R é zero dizemos que D divide P e escrevemos $D \mid P$.

Uma consequência da Proposição 2.9, importante no que segue, é o da divisão inteira de um polinômio $p \in \mathbb{C}[z]$ por um polinômio de 1 grau, $z \mapsto z - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Como o resto r de tal divisão tem grau menor ou igual a 1, isto é, 0 ou $-\infty$, segue que temos $r \in \mathbb{C}^*$ ou $r = 0$.

2.10 Proposição. *Dados* $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j} \in \mathbb{C}[z]$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$ *arbitrários, definimos o polinômio de grau um* $p_\alpha \in \mathbb{C}[z]$ *por* $p_\alpha(x) = z - \alpha$, $\forall z \in \mathbb{C}$. *Se* $q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^{m-1-k}$ *e* $r \in \mathbb{C}$ *são o quociente e o resto, respectivamente, da divisão inteira do polinômio* p *por* p_α*, valem as três asserções:*

(a) $c_0 = a_0$, $c_1 = c_0\alpha + a_1$, $c_2 = c_1\alpha + a_2$, $c_{m-1} = c_{m-2}\alpha + a_{m-1}$ *e* $r = c_{m-1}\alpha + a_m$.

(b) $r = p(\alpha) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j \alpha^{m-j}$.

(c) p *é divisível (exatamente) por* α *se e só se* $p(\alpha) = 0$.

Na Proposição 2.10, o item (a) é a regra dos quocientes de Ruffini e (b) é o Teorema do resto. Do item (a) resulta o conhecido algoritmo (na divisão inteira em $\mathbb{R}[x]$ pelo polinômio de grau 1 $x \mapsto x - \alpha$) que se estende facilmente a $\mathbb{C}[z]$, como exemplificamos abaixo.

$$
\begin{array}{l|l}
a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m & z - \alpha \\ \cline{2-2}
-c_0 z^m + c_0 \alpha z^{m-1} & c_0 z^{m-1} + c_1 z^{m-2} + \ldots + c_{m-1} \\ \cline{1-1}
\qquad\quad c_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m & \\
\qquad\quad -c_1 z^{m-1} + c_1 \alpha z^{m-2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad c_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m & \\ \cline{1-1}
 & \\ \cline{1-1}
 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{m-1} z + a_m & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -c_{m-1} z + c_{m-1} \alpha & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad r &
\end{array}
$$

Exemplo 2.11 *Dividir* $-2z^4+\frac{3}{2}z^2+iz+\frac{1-i}{2}$ *por* $z+i$. *De acordo com a Proposição 3.8(a) escrevemos:*

$-2(a_0)$	$0(a_1)$	$\frac{3}{2}(a_2)$	$i(a_3)$	$\frac{1-i}{2}(a_4)$	
$-i(\alpha)$	$2i$	2	$\frac{-7}{2}i$	$\frac{-5}{2}$	
$-2(c_0)$	$2i(c_1)$	$\frac{7}{2}(c_2)$	$\frac{-5i}{2}(c_3)$	$-2-\frac{i}{2}$	$-2-\frac{i}{2}$

O próximo resultado, o "Teorema Fundamental da Álgebra", expressa que cada polinômio $p \in \mathbb{C}[z]$, $\partial p \geq 1$, tem pelo menos um zero em $\mathbb{C}$. É pertinente notar que o enunciado análogo com $\mathbb{R}[x]$ no lugar de $\mathbb{C}[x]$ é falso (pois, por exemplo, $p(x) = x^2+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pertence a $\mathbb{R}[x]$ mas não tem nenhum zero em $\mathbb{R}$). O matemático francês d'Alembert pensou ter achado uma prova deste teorema , em 1746, mas seu argumento tinha um erro. A primeira "prova" conhecida deste resultado é devida a Gauss, razão pela qual o resultado é também conhecido como "Teorema de d'Alembert-Gauss". A "Primeira Prova de Gauss", de 1799, também tinha erros, que só foram corrigidos em 1920 por A. Ostrowski. Em 1806 o livreiro suiço J. Argand publicou uma prova muito simples, ainda incompleta, mas que é para a matemática moderna correta.

2.12 Teorema Fundamental da Álgebra. *Cada* $p \in \mathbb{C}[z]$, $\partial p \geq 1$, *tem ao menos um zero (real ou complexo). Isto é, existe* $\zeta \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(\zeta) = 0$.

Duas das provas do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que apresentaremos são uma sutil variação da demonstração de Argand. A terceira é a demonstração de Argand. As duas primeiras são recentes (2011) e deslocam a prova do TFA do âmbito da Álgeba e da Teoria das Funções de Uma Variável Complexa para os cursos de Cálculo de Duas Variáveis Reais. A mesma se apóia apenas em alguns poucos fatos básicos da teoria dos números reais e em cálculos com números complexos que, embora tenham um certo grau de sutileza, uma vez explicitados são de fácil compreensão. A prova do Teorema 2.12 é deixada para o Capítulo 4.

Centraremos nossa atenção pelo momento nas consequências interessantes deste resultado.

A primeira aplicação importante do TFA diz respeito à decomposição fatorial de um polinômio e às relações entre coeficientes e raízes. Seja $p \in \mathbb{C}[z]$,

$$p(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m \,, a_0 \neq 0 \,, \quad \text{com } \partial(p) = m \geq 1 \ .$$

Pelo Teorema 2.12 (TFA) existe $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_1) = 0$ e então, pela Proposição 2.10 (c), p é divisivel pelo polinômio $z \mapsto z - \zeta_1$ [1], portanto existe $p_1 \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$p(z) = (z - \zeta_1) p_1(z) \,, \forall z \in \mathbb{C} \,, \quad \text{com } \partial(p_1) = m - 1.$$

Se $m - 1 \geq 1$, aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra ao polinômio p_1, vemos que existe $\zeta_2 \in \mathbb{C}$ com $p_1(\zeta_2) = 0$ e então, pela Proposição 2.10(c), existe $p_2 \in \mathbb{C}[z]$, $\partial(p_2) = m - 2$, tal que $p_1(z) = (z - \zeta_2) p_2(z) \,, \forall z \in \mathbb{C}$ e, em consequência,

$$p(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) p_2(z) \,, \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Continuando com este processo [2], após $m - 1$ passos obtemos:

$$p(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots\ldots (z - \zeta_{m-1}) p_{m-1}(z) \,, \quad \text{com } \partial p_{m-1} = 1 \,,$$

e portanto $p_{m-1}(z) = a_0 z + b$ [3], $\forall z \in \mathbb{C}$. O único zero de p_{m-1} é $\zeta_m = -b/a_0$ e assim obtemos $p_{m-1}(z) = a_0(z - \zeta_m) \,, \forall z \in \mathbb{C}$, o que implica

$$[2.1] \qquad p(z) = a_0 (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots . (z - \zeta_{m-1})(z - \zeta_m) \,, \forall z \in \mathbb{C} \,.$$

Como $p \neq 0$ e $m = \partial p \geq 1$, o Teorema 2.6 mostra que o polinômio p não tem mais que m zeros distintos em $\mathbb{C}$. Porém, alguns destes zeros podem ser iguais e então, a forma mais precisa de escrever a decomposição [2.1] do polinômio p em produto de fatores lineares é:

$$[2.2] \qquad \begin{cases} p(z) = a_0 (z - \zeta_1)^{\nu_1} (z - \zeta_2)^{\nu_2} \ldots (z - \zeta_r)^{\nu_r} \,, \forall z \in \mathbb{C}, \text{ com} \\ \zeta_i \neq \zeta_j \text{ se } i \neq j \,, \ 1 \leq i, j \leq r \,, \nu_j \in \mathbb{N}^* \,, \forall j = 1, 2, \ldots, r \,, \text{ e} \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = m = \partial p \ . \end{cases}$$

[1] Doravante indicaremos (abusivamente) o polinômio $z \mapsto z - \alpha$ por $z - \alpha$.

[2] Aqui vale uma observação análoga à [1]: a prova rigorosa deste fato deveria ser feita por indução mas é tão simples que não vale o esforço fazer a formalização.

[3] A Proposição 2.10 mostra que o 1 coeficiente de cada um dos polinômios $p_1, \ldots, p_{m-1}$ é a_0.

Com as notações de [2.2], o número natural ν_j é a multiplicidade do zero $\zeta_j \in \mathbb{C}$ e ζ_j é um zero (raíz) do polinômio p de multiplicidade ν_j[4]. Claramente, qualquer que seja a decomposição de p em fatores lineares o conjunto de zeros não se altera. Mostremos que, analogamente, a multiplicidade de cada zero também não muda e, portanto, não existem duas decomposições diferentes do tipo [2.2] para p:

$$a_0(z-\zeta_1)^{\nu_1}(z-\zeta_2)^{\nu_2}...(z-\zeta_r)^{\nu_r} = a_0(z-\zeta_1)^{\nu_1'}(z-\zeta_2)^{\nu_2'}...(z-\zeta_r)^{\nu_r'}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ,$$

pois, se por exemplo $\nu_1 > \nu_1'$, dividindo ambos os membros por $(z-\zeta_1)^{\nu_1'}$ resultaria

$$a_0(z-\zeta_1)^{\nu_1-\nu_1'}(z-\zeta_2)^{\nu_2}...(z-\zeta_r)^{\nu_r} = a_0(z-\zeta_2)^{\nu_2'}...(z-\zeta_r)^{\nu_r'}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ,$$

o que é absurdo pois o primeiro membro se anula para $z = \zeta_1$ mas o segundo membro não, logo $\nu_1 = \nu_1'$ e, analogamente, $\nu_2 = \nu_2'$,...,$\nu_r = \nu_r'$. Resumindo obtemos o resultado abaixo.

2.13 Teorema. *A todo $p \in \mathbb{C}[z]$ com $m = \partial p \geq 1$ está associado um único conjunto finito não vazio $\{\zeta_1, ..., \zeta_r\} \subset \mathbb{C}$, com $r \leq m$, determinado pelas condições:*

$$p(\zeta_j) = 0\,, \forall j = 1, 2, ..., r \quad e \quad p(z) \neq 0\,, \forall z \notin \{\zeta_1, ..., \zeta_r\}\ .$$

Se $\nu_j \in \mathbb{N}^*$ é a multiplicidade do zero ζ_j, $1 \leq j \leq r$, então $\sum_{j=1}^{r} \nu_j = m$ e p se escreve como o produto de a_0 (primeiro coeficiente de p) por m fatores lineares na forma [2.2] e, a menos da ordem dos fatores, esta decomposição é única.

Para as aplicações é importante conhecer a estrutura (fatoração) de um polinômio com os coeficientes em $\mathbb{R}$ através dos seus zeros. O muito útil Teorema 2.15, a seguir, nos dará informações completamente precisas. Antes, provemos um lema que tem interesse próprio.

2.14 Lema. *Se $p \in \mathbb{C}[z]$ têm todos os seus coeficientes reais, valem as asserções:*

(a) $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) Se $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ é um zero de p então $\overline{\zeta}$ também é um zero de p e existe $q \in \mathbb{C}[z]$ tal que:

(i) $p(z) = (z-\zeta)(z-\overline{\zeta})q(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

(ii) q tem todos os seus coeficientes reais.

[4]No caso $\nu_j = 1$ diz-se que ζ_j é um zero (ou uma raíz) simples de p.

Prova.

(a) O caso em que p é um polinômio constante, $p = a \in \mathbb{R}$, é óbvio. Suponhamos $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}$, $z \in \mathbb{C}$, com $m \geq 1$ e $a_0 \neq 0$. Então, pelas propriedades da conjugação, e utilizando que $\overline{a_j} = a_j$, pois $a_j \in \mathbb{R}$, obtemos

$$p(\overline{z}) = \sum_{j=0}^{m} a_j \overline{z}^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \overline{a_j}\,\overline{z^{m-j}} = \sum_{j=0}^{m} \overline{a_j z^{m-j}} = \overline{\sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}} = \overline{p(z)}, \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

(b) A primeira afirmação é óbvia por (a) pois $p(\zeta) = 0 \Rightarrow p(\overline{\zeta}) = \overline{p(\zeta)} = \overline{0} = 0$. Ainda mais, como ζ é zero de p, pela Proposição 2.10 (c), o polinômio $z - \zeta$ divide o polinômio p, isto é, existe $q_1 \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$(2.14.1) \qquad p(z) = (z - \zeta) q_1(z)\,, \ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Como $\overline{\zeta}$ também é raíz de p, de (2.14.1) resulta $0 = p(\overline{\zeta}) = (\overline{\zeta} - \zeta) q_1(\overline{\zeta})$ e de $\overline{\zeta} - \zeta \neq 0$ (pois $\zeta \notin \mathbb{R}$), obtemos $q_1(\overline{\zeta}) = 0$ e então, pela Proposição 2.10 (c) concluímos que $(z - \overline{\zeta}) \mid q_1$. Isto é, existe $q \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$(2.14.2) \qquad q_1(z) = (z - \overline{\zeta}) q(z)\,, \ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

De (2.14.1) e (2.14.2) resulta (i).

Verificação de (ii): Seja $\zeta = \xi + i\eta$ $(\xi\,, \eta \in \mathbb{R})$. Então,

$$(2.14.3) \quad \begin{cases} (z - \zeta)(z - \overline{\zeta}) & = (z - \xi - i\eta)(z - \xi + i\eta) = (z - \xi)^2 - (i\eta)^2 \\ & = (z - \xi)^2 + \eta^2 \\ & = z^2 + az + b\,, \quad \text{com } a = -2\xi \ \in \mathbb{R} \text{ e } b = \xi^2 + \eta^2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, escrevemos a relação (i) como:

$$p(z) = (z^2 + az + b) q(z)\,, \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Logo, q é o quociente (exato) da divisão inteira de p por $z^2 + az + b$, estes com os coeficientes em $\mathbb{R}$, e portanto q têm os coeficientes em $\mathbb{R}$ [segue da prova da Proposição 2.9 pois, é claro que o quociente e o resto da divisão inteira entre polinômios com os coeficientes em $\mathbb{R}$ também têm os coeficientes em $\mathbb{R}$, pois as operações envolvidas são adição, subtração e multiplicação de números reais] ■

2.15 Teorema *Se $p \in \mathbb{C}[z]$, $p \neq 0$, têm todos os seus coeficientes reais têm-se:*

(a) ζ é um zero de multiplicidade ν de p se, e somente se, $\overline{\zeta}$ também o é.

(b) A fatoração [2.2] do polinômio p pode ser escrita (de forma mais precisa):

$$p(z) = a_0\big[(z-\xi_1)^2+\eta_1^2\big]^{\mu_1}...\big[(z-\xi_s)^2+\eta_s^2\big]^{\mu_s}.(z-b_1)^{\lambda_1}...(z-b_t)^{\lambda_t}\,, \forall z \in \mathbb{C}\ ,$$

com a_0 o coeficiente dominante do polinômio p, com $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ e $\overline{\zeta}_j = \xi_j - i\eta_j$ $(\xi_j\,,\eta_j \in \mathbb{R}\,, 1 \leq j \leq s)$ os zeros complexos não reais de p, com b_k $(1 \leq k \leq t)$ os zeros reais de p, com μ_j a multiplicidade do zero ζ_j e λ_k a do zero b_k.

(c) Se ∂p é ímpar, p tem pelo menos uma raíz real.

Prova.

(a) Se $\zeta \in \mathbb{R}$, a afirmação é óbvia (e inútil)[5] pois $\zeta = \overline{\zeta}$. Se $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ então $\overline{\zeta} \neq \zeta$ e, pelo Lema 2.14 (b), $\overline{\zeta}$ é raíz de p e $\partial p = m \geq 2$. Ainda, pela definição de multiplicidade (vide [2.2]), temos $(z-\zeta)^\nu \mid p$, isto é, existe $Q \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$(2.15.1) \qquad p(z) = (z-\zeta)^\nu Q(z)\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Por (2.2.1) temos $\partial Q = m - \nu$ e, é claro, Q pode ser escrito na forma

$$Q(z) = a_0 + a_1(z-\zeta) + ... + a_{m-\nu}(z-\zeta)^{m-\nu}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ;\ a_0, a_1, ..., a_{m-\nu} \in \mathbb{C},$$

com $a_0 \neq 0$ ($a_0 = 0 \Rightarrow \zeta$ é raíz de multiplicidade $\nu + 1$, contra a hipótese). Então, pela equação (2.15.1) obtemos

$$p(x) = (x-\zeta)^\nu Q(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

e então, conjugando a equação acima (os coeficientes de p e $p(x)$ são reais),

$$p(x) = \overline{p(x)} = (x-\overline{\zeta})^\nu\big[\overline{a_0} + \overline{a_1}(x-\overline{\zeta}) + ... + \overline{a_{m-\nu}}(x-\overline{\zeta})^{m-\nu}\big],\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

e pondo $G(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1}(x-\overline{\zeta}) + ... + \overline{a_{m-\nu}}(x-\overline{\zeta})^{m-\nu}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, temos $p(x) = (x-\overline{\zeta})^\nu G(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e pelo Princípio de Identidade de Polinômios (Teorema 2.6) ou Corolário 2.7,

$$p(z) = (z-\overline{\zeta})^\nu G(z)\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ,\quad \text{com } G(\overline{\zeta}) = \overline{a_0} \neq 0\,.$$

Logo, por [2.2], $\overline{\zeta}$ é raíz de multiplicidade ν de p. Fim da prova de (a).

[5] De fato, se $\zeta \in \mathbb{R}$ então $p(\zeta) = 0 \Rightarrow p(\zeta) = 0$ é uma tautologia. Já no caso $\zeta \in \mathbb{C} \setminus R$, a implicação "$\zeta$ é um zero de multiplicidade ν de $p \Rightarrow \overline{\zeta}$ é um zero de multiplicidade ν de p" nos indica um novo zero, de multiplicidade ν.

(b) Pelo item (a) e pela fatoração em [3.2] de p temos,

$$\begin{aligned} p(z) &= a_0(z-\zeta_1)^{\nu_1}...(z-\zeta_s)^{\nu_s}.(z-\overline{\zeta_1})^{\nu_1}....(z-\overline{\zeta_s})^{\nu_s}.(z-b_1)^{\lambda_1}...(z-b_t)^{\lambda_t} \\ &= a_0\big[(z-\zeta_1)(z-\overline{\zeta_1})\big]^{\nu_1}...\big[(z-\zeta_s)(z-\overline{\zeta_s})\big]^{\nu_s}.(z-b_1)^{\lambda_1}...(z-b_t)^{\lambda_t}\ . \end{aligned}$$

Aplicando (2.14.3) às expressões entre colchetes segue a fatoração citada.

(c) Óbvio ■

2.16 Observação. *Se os coeficientes de $p \in \mathbb{C}[z]$, $p \neq 0$, são reais, então a restrição a $\mathbb{R}$ de p é um polinômio $\tilde{p} = p|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[x]$ e as conclusões de Teorema 2.15 valem para $\tilde{p}$ e, entre elas,*

(2.16.1) $$\tilde{p}(x) = a_0\big[(x-\xi_1)^2+\eta_1^2\big]^{\nu_1}...\big[(x-\xi_s)^2+\eta_s^2\big]^{\nu_s}(x-b_1)^{\lambda_1}...(x-b_t)^{\lambda_t}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Mais precisamente, podemos dizer que o Teorema 2.15 é essencialmente um resultado de estrutura para elementos de $\mathbb{R}[x]$. Notemos que em (2.16.1) todos os números são reais mas, para obtê-lo ampliamos o "campo de manobra", de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$, onde são possíveis muitas computações que não em $\mathbb{R}$. Este é um exemplo (entre muitos) de um fato geral: o desenvolvimento da teoria dos números complexos [e suas consequências: cálculo diferencial e integral complexos, etc,], além do seu enorme interesse próprio, permite entender bem mais profundamente fenômenos puramente reais (por exemplo: como provaríamos (2.16.1) sem utilizarmos $\mathbb{C}$?). Neste ponto é interessante voltar a refletir sobre a atitude de R. Bombelli mencionada no 0 desta notas.

2.17 *Exemplo. Determinemos m e a reais tais que para o polinômio*

$$p(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - mz^2 + z + a\,,$$

$z = i$ seja zero de multiplicidade 2 e, para tais m e a, mostremos as raízes de p.

Solução. Como i é zero duplo[6] de p, pelo Teorema 2.13 o polinômio $p_0(z) = (z-i)^2 = z^2 - 2iz - 1$ divide (exatamente) p. Efetuando a trivial divisão inteira de p por p_0 obtemos o quociente $q(z) = z^3 + (2i-1)z^2 - (1+2i)z + (3-m)$ e o resto $r(z) = 2i(2-m)z + a + 3 - m$ ($z \in \mathbb{C}$). Impondo $r = 0$ temos $2i(2-m) = a + 3 - m = 0$ e assim, $m = 2$ e $a = -1$.

[6] A expressão "zero duplo" é frequentemente empregada para um "zero de multiplicidade 2".

Desta forma obtemos,

$$p(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 2z^2 + z - 1\,,\ \ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Por fim, como os coeficientes de p são reais, pelo Teorema 2.15, o número $\bar{i} = -i$ é zero duplo de $p = (z-i)^2 q$ e portanto $-i$ é raíz dupla de q. Desta forma, aplicando a q o algoritmo de Ruffini (Proposição 2.10 e Exemplo 2.11) obtemos

$$\begin{array}{l|l|ll|}
1 & -1+2i & -1-2i & 1 \\
-i) & -i & 1+i & -1 \\
\hline
1 & -1+i & -i & 0 \\
-i) & -i & +i & \\
\hline
1 & -1 & 0 & \\
\end{array}$$

donde segue $q(z) = (z+i)^2(z-1)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e

$$p(z) = (z-i)^2(z+i)^2(z-1)\,,\ \ \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

e portanto as raízes de p são i e $-i$ (ambas duplas) e 1 (raíz simples) ■

2.18 *Observação. A partir do Teorema 3.15 e do método dos coeficientes a determinar (v. Exemplo 3.8) é possível obter (e não é difícil) a decomposição de uma função racional em frações simples.*

Lembremos que uma fração racional real é uma função do tipo

$$\frac{P}{p} = P/p:\ x \longmapsto \frac{P(x)}{p(x)} = P(x)/p(x)\ \ ,$$

onde $P, p \in \mathbb{R}[x]$ e $p \neq 0$, definida sobre o conjunto $\mathbb{C} \setminus F$, onde F é o conjunto finito das raízes de p (vide Teorema 3.13). Notemos primeiro que, se $\partial P \geq \partial p$, efetuando a divisão inteira de P por p, se q e r são o quociente e o resto, respectivamente, obtidos temos $P = pq + r$, $\partial r < \partial p$ e então,

(2.18.1) $$\frac{P}{p} = \frac{pq+r}{p} = q + \frac{r}{q}\ .$$

Como objetivamos escrever P/p como soma de expressões mais simples que a original e q é um polinômio, de (2.18.1) resulta que será suficiente estudar o termo r/q onde $\partial r < \partial q$. Em consequência, podemos supor no que segue, $\partial P < \partial p$. No Apêndice B provamos (e mostramos algumas aplicações):

Teorema: Seja P/p uma fração racional real irredutível [7], com $\partial P < \partial p$. Se a fatoração de p é a que consta no enunciado do Teorema 3.15 (b) então P/p se escreve de modo único na forma:

$$(2.18.2)\quad \frac{P(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{t}\left\{\frac{A_{k,1}}{(x-b_k)^{\lambda_k}}+\ldots+\frac{A_{k,\lambda_k}}{x-b_k}\right\}+\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{M_{j,1}x+N_{j,1}}{\left[(x-\xi_j)^2+\eta_j^2\right]_j^{\mu}}+\ldots+\frac{M_{j,\mu_j}x+N_{j,\mu_j}}{(x-\xi_j)^2+\eta_j^2}\right\},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq b_k$ $(1 \leq k \leq t)$.

O segundo membro de (2.18.2) é chamado decomposição de P/p em frações simples. A prova da existência da decomposição (3.18.2) ["Analisis Matematico", R. Pastor et all, Cap XII, 46-4, pg 645 (4 ed., 1958)] é feita de modo construtivo e pode ser útil para a determinação dos coeficientes $A_{k,j}$, $M_{j,m}$ e $N_{j,m}$. Porém, a existência e a unicidade da decomposição justificam o uso, às vezes mais cômodo, do método dos coeficientes a determinar, como ilustramos a seguir.

2.19 *Exemplo. Determinar a decomposição em frações simples de* $\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$.

Neste caso temos $P(x) := x^5 + x$ e $p(x) := (x^2+1)(x^2+2)^2$, isto é, p tem os zeros conjugados simples $\pm i$ e os zeros conjugados duplos $\pm i\sqrt{2}$. Escrevemos

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e então, multiplicando ambos os membros por $p(x)$ resulta

$$(x^5+x) = (ax+b)(x^2+2)^2 + (cx+d)(x^2+1)(x^2+2) + (ex+f)(x^2+1)\,, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Efetuando as operações indicadas no 2 membro, a igualdade acima se escreve

$$x^5+x = (a+c)x^5+(b+d)x^4+(4a+3c+e)x^3+(4b+3d+f)x^2+(4a+2c+e)x+4b+2d+f\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e (v. Corolário 2.7) obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

$$(1)\ a+c=1\,,\qquad (2)\ b+d=0\,,\qquad (3)\ 4a+3c+e=0\,,\qquad (4)\ 4b+3d+f=0\,,$$

$$(5)\ 4a+2c+e=1\,,\qquad (6)\ 4b+2d+f=1\,.$$

[7] Isto é, P e p não têm zeros comuns ou equivalentemente fatores lineares ou de 2 grau comuns nas fatorações de ambos (Teor. 3.15 (b)).

De (2) segue $d = -b$ e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente, $b+f = 0$ e $2b+f = 0$ que é visivelmente um sistema determinado; donde, $b = f = 0$ e, então, $d = 0$. De (1) segue $c = 1 - a$ e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente, $a+e = -3$ e $2a+e = -1$; cuja solução é $a = 2$ e $e = -5$ e portanto, $c = 1-a = 1-2 = -1$ donde $c = -1$. Consequentemente,

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2} - \frac{5x}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

A decomposição (2.18.2) é especialmente útil no cálculo das primitivas

$$\int \frac{P(x)}{p(x)}dx$$

de uma fração racional real P/p.

Dado $p \in \mathbb{C}[z]$, com $\partial p \geq 1$, suponhamos

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^{m-j}\,, \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Se $F := \{\alpha_1\,, \dots, \alpha_r\}$ é o conjunto dos zeros de p $(r \leq m)$ e $\nu_j \in \mathbb{N}^*$ denota a multiplicidade de α_j $(1 \leq j \leq r,\ \sum_{j=1}^{r} = m)$, examinemos a sequência dos zeros de p:

$$(\zeta_j)_{1\leq j\leq m} = (\zeta_1\,, \dots, \zeta_m) := (\alpha_1 \dots \alpha_1\,, \alpha_2\,, \dots \alpha_2\,, \dots \alpha_r\,, \dots \alpha_r)\,,$$

com α_j ocorrendo ν_j-vezes na sequência, para cada $j = 1\,,\,,..\,,r$. É claro que para cada permutação $\sigma \in S_m$, a sequência $(\zeta_{\sigma(1)}\,, \zeta_{\sigma(2)}\,, \dots\zeta_{\sigma(m)})$ é também uma sequência dos zeros de p e é irrelevante distingui-las, pois que todas dão a mesma informação. Assim, abusivamente, chamamos qualquer uma delas de a sequência dos zeros de p. Logo, se como no Exemplo 2.17 temos

$$p(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 2z^2 + z - 1\,,$$

qualquer das sequências $(i, i, -i, -i, 1)$, $(i, -i, -i, i, 1)$, $(1, i, -i, i, -i)$, etc., dão a mesma informação a respeito dos zeros de p, a saber, que p admite i e $-i$ como raízes duplas e 1 como raíz simples. Posto isto, vamos ao próximo resultado que fornece as relações existentes entre coeficientes e raízes de um polinômio.

2.20 Teorema. *Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ dado por*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}\,, \forall z \in \mathbb{C}\,, \quad m = \partial p \geq 1 \ (i.e., \ \ a_0 \neq 0)\,,$$

e seja $(\zeta_j)_{1 \leq j \leq m}$ a sequência dos zeros de p. São válidas as relações:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j\,; \quad \frac{a_2}{a_0} = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \zeta_i \zeta_j\,; \quad -\frac{a_3}{a_0} = \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \zeta_i \zeta_j \zeta_k\,, \dots, (-1)^m \frac{a_m}{a_0} = \prod_{i=1}^{m} \zeta_j\ .$$

Prova.

As hipóteses sobre p implicam que vale [2.1] (v. prova do Teor. 2.13). Isto é,

$$p(z) = a_0(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)...(z - \zeta_m)\,, \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Efetuando os produtos indicados no 2 membro da relação acima obtemos

$$a_0 z^m + z^{m-1}\Big(-a_0\zeta_1 - a_0\zeta_2 - \dots - a_0\zeta_m\Big) + z^{m-2}\Big(a_0\zeta_1\zeta_2 + a_0\zeta_1\zeta_3 + \dots + a_0\zeta_{m-1}\zeta_m\Big) + \dots +$$

$$+ z^{m-j}\Big[a_0(-1)^j \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_j \leq m} \zeta_{s_1}\zeta_{s_2}...\zeta_{s_j}\Big] + \dots + a_0(-1)^m \zeta_1\zeta_2...\zeta_m\ ,$$

e como este polinômio é igual a $p(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$, pelo Princípio de Identidade dos Polinômios resulta:

$$a_1 = -a_0\zeta_1 - a_0\zeta_2 - \dots - a_0\zeta_m\,, \quad \text{isto é,} \ -\frac{a_1}{a_0} = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i$$

$$a_2 = a_0\zeta_1\zeta_2 + a_0\zeta_1\zeta_3 + \dots + a_0\zeta_{m-1}\zeta_m\,, \quad \text{isto é,} \ \frac{a_2}{a_0} = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \zeta_i\zeta_j$$

....

....

....

$$a_j = a_0(-1)^j \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_j \leq m} \zeta_{s_1}\zeta_{s_2}...\zeta_{s_j}\ , \ \text{isto é,} \ (-1)^j \frac{a_j}{a_0} = \sum_{1 \leq s_1 < \dots < s_j \leq m} \zeta_{s_1}\zeta_{s_2}...\zeta_{s_j}$$

$$a_m = a_0(-1)^m \prod_{i=1}^{m} \zeta_i\,, \quad \text{isto é,} \ (-1)^m \frac{a_m}{a_0} = \prod_{i=1}^{m} \zeta_i \quad \blacksquare$$

2.2 - Resolução Elementar de Equações por Radicais

A equação de 2 grau: é a equação da forma

[2.3] $$az^2+bz+c=0 \ \ (a,b,c\in\mathbb{C}\,, a\neq 0\ )\ .$$

Multiplicando [2.3] por $4a$ obtemos a equação equivalente

[2.3′] $$4a^2z^2+4abz+4ac=0 \ \ (a,b,c\in\mathbb{C}\,, a\neq 0)\ .$$

e observando que $(2az+b)^2 = 4a^2z^2+4abz+b^2$, se somamos e subtraímos b^2 em [2.3'] e pomos $\Delta := b^2-4ac$, podemos escrever [2.3'] da maneira equivalente:

[2.4] $$(2az+b)^2=\Delta\,,$$

ou seja,

[2.4′] $$(2az+b-\sqrt{\Delta})(2az+b+\sqrt{\Delta})=0\,,$$

e então, os zeros de [2.3] são os valores que anulam a um qualquer dos fatores em [2.4'], isto é,

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

O que usualmente se expressa pela fórmula

[2.5] $$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

A diferença entre as duas raízes é

$$z_2-z_1=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\begin{cases}\neq 0\,, & \text{se } \Delta\neq 0\\ =0\,, & \text{se } \Delta=0\ .\end{cases}$$

Se em [2.5] supomos $\Delta=0$, obtemos a raíz dupla

$$z_1=z_2=-\frac{b}{2a}\ .$$

Em resumo temos o resultado abaixo.

2.21 Proposição. *A equação [2.8] tem duas raízes, reais ou complexas, que são diferentes se* $\Delta \neq 0$ *e* **coincidentes** *se* $\Delta = 0$.

Quando os coeficientes a, b, c em [2.3] são reais (o que é frequente), as duas raízes são reais e diferentes se $\Delta > 0$, são reais e coincidentes se $\Delta = 0$ e são complexas conjugadas se $\Delta < 0$ pois, se $\Delta' = -\Delta$ então de [2.5] resulta,

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a} \; .$$

Voltando ao caso geral ($a, b, c \in \mathbb{C}$), somando as raízes [2.5] obtemos

$$[2.6] \qquad z_1 + z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} \; .$$

Multiplicando as raízes [2.5] resulta:

$$z_1 z_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta}))}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \, ,$$

e, convenientemente, re-encontramos neste caso particular as relações dadas pelo Teor. 2.19.

O assunto que seria natural desenvolver a seguir é o estudo da variação do sinal de um trinômio REAL de 2 grau e sua aplicação a inequações de 2 grau. Mas não nos deteremos neste conhecido tópico, solicitando ao leitor desenvolve-lo nos exercícios (v. Exercícios - Capítulo 2).

2.3 - Equações Redutíveis a Quadráticas

(A) Equações biquadradas: são as do tipo

$$[2.7] \qquad ax^4 + bx^3 + c = 0 \;\; (a, b, c \in \mathbb{C}\, , a \neq 0) \, ,$$

que se resolvem pela substituição $y = x^2$, que transforma [2.7] em

$$[2.7'] \qquad ay^2 + by + c = 0 \, ,$$

cujas raízes sabemos calcular. Se y_1 e y_2 são as raízes de [2.7'] então as raízes de [2.7] são $x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_2}$ e $x - 4 = -\sqrt{y_2}$, as quais são dadas pela fórmula

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \; .$$

(B) Equações recíprocas: São as equações que têm os coeficientes equidistantes dos extremos iguais. Assim, uma equação recípoca de 4 grau tem o aspecto:

[2.8] $$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \ .$$

Dividindo [2.8] por x^2, a transformamos em

[2.8′] $$a\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) + b\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + c = 0 \ .$$

A substituição $z = x + \frac{1}{x}$, que implica $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, transforma [2.8'] em

[2.9] $$az^2 + bz + c - 2a = 0 \ .$$

Resolvendo [2.9] obtemos dua raízes z_1, z_2 cada uma das quais dá um par de raízes de [2.8] que se obtém resolvendo as equações

$$x^2 - z_j x + 1 = 0 \quad (j = 1, 2) \ .$$

A Equação Cúbica: A equação geral de grau 3 é,

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \, , a_0 \neq 0 \, ,$$

e portanto, dividindo por a_0 podemos supor sem perda de generalidade que $a_0 = 1$ e escreve-la

[2.10] $$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \ \ (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}) \, .$$

Faremos uma translação $z = x - k$, onde a constante complexa k será determinada pela condição de eliminar o monômio de 2 grau em [2.10]. Assim, substituindo z por $x - k$ em [2.10], após efetuar as operações requeridas e agrupar termos semelhantes e ordenar em potências decrescentes de x, obtemos uma equação do tipo:

$$x^3 + (a_1 - 3k)x^2 + (\ldots)x + \ \textit{termo indep.} \ = 0 \, ,$$

o que mostra que para $k = \frac{a_1}{3}$, a equação [2.10] toma a forma:

[2.11] $$x^3 + px + q = 0 \, .$$

As considerações acima mostram que equações da forma [2.10] podem ser transformadas em equações do tipo [2.11] por meio da mudança de variável $z = x - \frac{a_1}{3}$.

Assim, é claro que para resolver [2.10] basta saber resolver [2.11] (pois, se x_j, $1 \leq j \leq 3$, são as três raízes de [2.11] então $z_j = x_j - \frac{a_1}{3}$, $1 \leq j \leq 3$, são as três raízes de [2.10]). Para resolver [2.11] introduzimos duas novas variáveis u, v com a substituição $x = u + v$. Agrupando convenientemente, [2.11] toma a forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,,$$

que tem por soluções valores de u e v verificando as condições seguintes:

[2.12] $$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [2.13] \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}\,. \end{cases}$$

De [2.13] resulta que u^3 e v^3 são as raízes da equação de 2 grau

[2.14] $$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0\,,$$

chamada **resolvente** de [2.11]. Resultam então os valores

$$u^3 = y_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,, \qquad v^3 = y^2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

e então extraindo as raízes cúbicas obtemos três valores para u e três valores para v, o que dá nove pares de valores para u e v. Embora estes nove pares (u, v) satisfazem [2.13], nem todos verificam [2.12] pois a elevação ao cubo introduziu soluções estranhas; devemos então escolher apenas aqueles pares (u, v) de soluções que satisfazem a 2 equação de [2.12], isto é,

[2.15] $$uv = -\frac{p}{3}\,.$$

Com esta restrição, as três raízes de [2.11] são dadas pela Fórmula de Tartaglia (às vezes erroneamente atribuida a Scipion del Ferro ou mesmo a Cardano, que foi o primeiro a publicá-la):

[2.16] $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

Aqui é importante frisar que com o avanço das calculadoras que resolvem em instantes uma equação do tipo [2.11], a fórmula [2.16] tem interesse apenas histórico e não apresentaremos nenhum exemplo de sua aplicação, relegando isto a um exercício (vide Exercícios - Capítulo 2). Nos livros mais antigos era feita a discussão do tipo de raízes da equação [2.11] quando $p, q \in \mathbb{R}$, segundo

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

fosse maior, igual ou menor que zero.

A equação do 4 grau: Se a fórmula [2.16] dando as raízes da equação cúbica [2.11] é complicada demais para ter, na atualidade, algum valor prático, o que dizer da fórmula para as raízes da equação geral de 4 grau, que é bem mais difícil ? A seguir mostraremos brevemente os passos principais que levam a esta fórmula apenas por razões culturais e históricas.

Se na equação geral de 4 grau (após prévia divisão pelo 1 coeficiente):

$$[2.17] \qquad z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0, \;\; (a_j \in \mathbb{C}\,, 1 \le j \le 4)\,,$$

efetuamos a substituição $z = x - \frac{a_1}{4}$, obtemos outra equação sem segundo ermo, do tipo:

$$[2.18] \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0\,.$$

Procedendo como na equação cúbica, fazemos a substituição $x = u + v + w$, igualdade que elevada ao quadrado pode ser escrita assim:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw)\,.$$

Elevando de novo ao quadrado obtemos:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$$

ou seja,

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw(u + v + w) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0$$

e então, para obter as raízes de [2.18] bastará obter valores u, v, w verificando as condições

$$[2.19] \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ uvw = -\frac{q}{8} \\ (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = r\,. \end{cases}$$

Nas equações em [2.19], elevando ao quadrado a 2 e combinando a 1 e a 3 resulta,

$$\text{[2.20]} \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64} \\ (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)^2 = \frac{p^2-4r}{16}\,, \end{cases}$$

em consequência, pelo Teor. 2.19, u^2, v^2 e w^2 são raízes da equação

$$\text{[2.21]} \qquad y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2-4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0\,,$$

chamada **resolvente** de [2.18]. Resolvendo [2.21] obtemos três valores y_1, y_2 e y_3 e extraindo suas raízes quadradas resultam os valores $u = \pm\sqrt{y_1}$, $v \pm \sqrt{y_2}$ e $w = \pm\sqrt{y_3}$. Os oito produtos uvw possíveis são dois a dois opostos, sendo quatro deles iguais a $-\frac{q}{8}$ e os outros quatro iguais a $+\frac{q}{8}$; prescindindo de soluções estranhas introduzidas pela elevação ao quadrado, escolheremos as quatro ternas de valores (u, v, w) que verificam a 2 equação de [2.19], isto é,

$$uvw = -\frac{q}{8}\,,$$

que dá uma fórmula do tipo,

$$\text{[2.22]} \qquad x = \pm\sqrt{y_1}\,, \pm\sqrt{y_2}\,, \pm\sqrt{y_3}\,,$$

que dá as quatro raízes de [2.18], devendo calcular y_1, y_2 pela fórmula de Tartaglia ou por outro método de resoluçao.

A importância teórica da fórmula [2.22] resulta dela mostrar que a equação geral do 4 grau admite soluções dadas por uma expressão algébrica irracional em função de seus coeficientes, mas seu valor prático é quase nulo. Resolvidas algebricamente as equações de graus 1,2, 3 e 4 por meio de radicais (desde o século XVI), era natural tentar análoga resolução para as equações de graus superiores a 4, mas todas as tentativas de muitos matemáticos (especialmente Lagrange) fracassaram; a equação resolvente, da qual se fazia depender a resolução da equação dada, era sempre de grau mais alto que esta, o que tornava inútil o método utilizado na resolução das equações de 3 e 4 graus. Este constante fracasso levou a suspeitar da imposssibilidade de resolver o problema. A primeira tentativa conhecida neste sentido foi de Ruffini em 1798 (mas sua prova estava incompleta), mas quem provou este resultado foi Abel em 1826 (N. H. Abel, *Demonstration de l'impossibilité de lá resolution algebrique des equations generales qui dépassent le quatrième degré, Crelle's Journal für Mathematik, vol 1. 1826).* Em termos algo vagos e imprecisos podemos enunciar este resultado assim,

Teorema 2.22 (Abel) *Fixado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, é impossível expressar as raízes de um polinômio geral de grau n por uma (única) expressão algébrica irracional em função de seus coeficientes.*

Observe a ênfase na palavra "geral" no enunciado acima. Ainda, em uma infinidade de casos particulares, é possível obter todas as raízes como expressão algébrica irracional de seus coeficientes. Por exemplo, $p(z) = z^5 - 32$ tem suas raízes imediatamente obtidas (v. Teorema 2.11).

Apêndice

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÂO EM FRAÇÕES SIMPLES[8]

Idéia. Consideremos uma divisão de polinômios

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

ambos com coeficientes reais e, ainda, grau(P) $<$grau(Q). O objetivo é escrever este quociente como um somatório de parcelas "bem mais simples". Procedemos da seguinte forma. Decompondo o polinômio Q como um produto de fatores lineares do tipo $(x-\alpha)^m$, com α uma raíz real de Q e $m = m(\alpha)$ a multiplicidade algébrica de tal raíz de Q, e também de fatores quadráticos $(x^2 + ax + b)^n$, onde o polinômio $x^2 + bx + c$ não tem raízes reais (discriminante negativo) e n é a multiplicidade algébrica de tal polinômio, temos que:

(1) Cada fator linear $(x-\alpha)^m$ gera as m parcelas (no somatório procurado)

$$\frac{C_1}{(x-\alpha)}, \ldots, \frac{C_m}{(x-\alpha)^m},$$

onde C_1,...,C_m são constantes reais a serem determinadas.

(2) Cada fator quadrático $(x^2+bx+c)^n$ gera as n parcelas (no referido somatório)

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x^2+bx+c)}, \ldots., \frac{A_n x + B_n}{(x^2+bx+x)^n},$$

onde as constantes A_1, B_1,...A_n,B_n são reais e a serem determinadas.

[8] O teorema que segue baseia-se em dois resultados em "Analysis by Its History, E. Hairer and G. Warner, Undergraduate Texts in Mathematics, 1996, pp. 118 – 123, Springer-Verlag, New York". Alguns exemplos (dois deles do citado livro) são, entre outras formas, aqui resolvidos inspirando-nos no chamado **método de Heaviside**, citado em "Cálculo, Vol 1, pp. 568 – 569, G. B. Thomas, Addison Wesley, 2009".

(3) A resposta procurada (isto é, o somatório) é então: o quociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma soma de parcelas do tipo das obtidas no (1) e no (2) passos acima.

(4) Para determinarmos as constantes reais surgidas existem vários métodos.

Exemplo 1. Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Resolução. Efetuando a divisão polinomial obtemos uma função racional com o grau do polinômio numerador menor que o no denominador, e fatorando este,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} \; .$$

Pelo método acima temos,

$$(*) \qquad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2} \; .$$

Multiplicando (*) por $(x-1)^3$ e então computando em $x = 1$ obtemos $A_3 = 1$. Multiplicando (*) por $(x+2)^2$ e então computando em $x = -2$ obtemos $B_2 = -1$.

Pondo os termos $1(x-1)^{-3}$ e $-1(x+2)^{-2}$ à direita à esquerda e simplificando,

$$(**) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19 + (x-1)^3 - (x+2)^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{6x^2 - 5x - 7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} \; .$$

Multiplicando (**) por $(x-1)^2$ e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em $x = 1$ obtemos $A_2 = -2$.

Multiplicando (**) por $(x+2)$ e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em $x = -2$ obtemos $B_1 = 3$.

Pondo, em (**), os termos $-2(x-1)^{-2}$ e $3(x+2)^{-1}$ que estão no lado direito no meio e então simplificando obtemos:

$$\frac{6x^2 - 5x - 7 + 2(x+2) - 3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3}{x-1} = \frac{A_1}{x-1} \quad \Rightarrow \; A_1 = 3 \; .$$

Resposta. $\frac{2x^6-3x^5-9x^4+23x^3+x^2-44x+39}{x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$ ■

Antes de darmos mais exemplos provemos o teorema.

Demonstração do Teorema da Decomposição em Frações Parciais

Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e na variável x.

Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ com r distintos pares de raízes complexas conjugadas (não reais) $\alpha_1 \pm i\beta_1, ..., \alpha_r \pm i\beta_r$ e s distintas raízes reais $\gamma_1,...,\gamma_s$. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)[9] podemos fatorar Q em seus fatores lineares e quadráticos, com suas respectivas multiplicidades algébricas, e obtemos

$$Q(x) = c\prod_{j=1}^{r}\Big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\Big)^{m_j}\prod_{j=1}^{s}(x-\gamma_s)^{n_j}\,,\ c \in \mathbb{R},$$

onde m_j e n_j são as multiplicidades das raízes complexas e reais, respectivamente.

Teorema 1. Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ como acima e $P = P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que grau$(P) <$ grau(Q). Existem, e são únicos, números reais A_{jk}, B_{jk} e C_{jk} tais que

$$\text{(1.1)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jk}+B_{jk}\,x}{\Big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\Big)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{C_{jk}}{(x-\gamma_j)^k}\,.$$

Prova.
Afirmação 1: Se γ é raíz real de multiplicidade n de $Q = Q(x)$ fatoramos $Q(x) = (x-\gamma)^n q(x)$, com $q \in \mathbb{R}[x]$ e $q(\gamma) \neq 0$, e existem únicos $C \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[x]$, com $\partial(p) < \partial(Q) - 1$, satisfazendo

$$\text{(1.2)} \qquad \frac{P(x)}{(x-\gamma)^n q(x)} = \frac{C}{(x-\gamma)^n} + \frac{p(x)}{(x-\gamma)^{n-1}q(x)}\,.$$

Verificação da Afirmação 1.

Multiplicando (1.2) pelo denominador comum, temos a equação polinomial

$$P(x) = Cq(x) + p(x)(x-\gamma).$$

Avaliando em $x = \gamma$ temos $C = \frac{P(\gamma)}{q(\gamma)}$ e definimos $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ como a divisão (exata) de $P(x) - Cq(x)$ por $(x-\gamma)$. As unicidades de C e $p = p(x)$ são óbvias.

[9] d'Alembert em 1746 e que à época procurava métodos para integrar funções racionais apresentou uma prova do TFA que foi, à época, considerada não válida e que hoje é válida. Gauss em 1799 apresentou a mais famosa prova de tal teorema e Argand em 1814 mostrando a eficiência dos números complexos simplificou, e muito, a prova de d'Alembert e apresentou talvez a mais clara e curta prova do TFA, até a atualidade.

Afirmação 2. Se $Q(x) = \Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^m q(x)$ e $q(\alpha+i\beta) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$, existem únicos $A, B \in \mathbb{R}$ e polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$, grau$(p) <$ grau$(Q) - 2$, tais que

$$\frac{P(x)}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^m q(x)} = \frac{A+Bx}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^m} + \frac{p(x)}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^{m-1} q(x)} \; .$$

Verificação da Afirmação 2.

Multiplicando pelo denominador comum, resolvemos a equação polinomial

$$P(x) \;=\; (A+Bx)q(x) \;+\; p(x)\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big) \; .$$

Avaliando tal fórmula em $z_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (ou $z_0 = \alpha - i\beta$) determinamos A e B reais[10] e definimos $p(x)$ como a divisão exata, em $\mathbb{R}[x]$, de $P(x) - (A+Bx)q(x)$ por $\Big((x-\alpha)^2+\beta^2)\Big)$. A unicidade é elementar e encerra tal verificação.

Claramente, por sucessivas aplicações das Afirmações 1 e 2 obtemos (1.1). Pedimos ao leitor mostrar, é trivial, que a unicidade dos coeficientes em (1.1) (vide abaixo outra prova de tal fato) segue das unicidades nas Afirmações 1 e 2∎

Mostremos uma variação do **Método de Heaviside** (assim dito se $Q(x)$ só tem raízes reais simples) para determinar (unicamente) os coeficientes em (1.1).

Computemos os coeficientes $C_{1n_1}, C_{1,n_1-1}, ..., C_{1,2}, C_{1,1}$, nesta ordem.

Utilizando a fatoração $Q(x) = (x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$, $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, multipliquemos (1.1) por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e computemos a equação obtida em $x = \gamma_1$. Para o 1 membro $\Big(\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x)}\Big)$ obtemos, é óbvio, $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}$. Quanto ao 2 membro, multiplicando a parcela $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e computando o resultado em $x = \gamma_1$ obtemos C_{1,n_1}; todas as demais parcelas ao serem multiplicadas por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e o resultado computado em $x = \gamma_1$ produzem o número zero. Logo,

$$C_{1,n_1} = \frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} \; .$$

[10]Pela equação $A + B(\alpha+i\beta) = \frac{P(z_0)}{q(z_0)} \in \mathbb{C}$ temos $A + B\alpha = \mathrm{Re}\Big(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\Big)$ e $B\beta = \mathrm{Im}\Big(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\Big)$. Se utilizarmos $z = \alpha - i\beta$ o resultado é o mesmo pois para tais $A, B \in \mathbb{R}$: $A + B\overline{z_0} = \overline{A + Bz_0} = \overline{\frac{P(z_0)}{q(z_0)}}$

Então, passando $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ ao 1 membro e efetuando a subtração temos uma função racional com numerador e denominador divisiveis por $(x-\gamma_1)$ (Afirm. 1):

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1}Q_1(x)} - \frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}} = \frac{p_1(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1-1}Q_1(x)}\,,\ \text{com}\ \ \partial(p_1) < \partial(Q) - 1\ .$$

Igualado o último membro acima com o que restou do 2 membro de (1.1), recaímos no caso anterior e então de forma análoga achamos o coeficiente C_{1,n_1-1}. Iterando tal procedimento identificamos os demais coeficientes $C_{1,j's}$. É claro que analogamente obtemos todos os coeficientes $C_{i's,j's}$.

Similarmente (e utilizando a Afirmação 2) obtemos ordenadamente os pares de coeficientes (A_{i,m_i}, B_{i,m_i}), $(A_{i,m_i-1}, B_{i,m_i-1}), ..., (A_{i,1}, B_{i,1})$, $i = 1, ..., l$. Verifique■

Exemplo 2. Decomponha em frações simples $\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$.

1 **Resolução:** Via o que denominamos, aqui, variação do método de Heaviside.

Pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples temos,

$$(*) \qquad \frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Multiplicando (*) por $(x^2+2)^2$ e então computando em $x = i\sqrt{2}$ obtemos

$$\frac{(i\sqrt{2})^5 + i\sqrt{2}}{-1} = Ei\sqrt{2} + F \Longrightarrow E = -5 \text{ e } F = 0\ .$$

Pondo à esquerda em (*) o termo $\frac{-5x}{(x^2+2)^2}$ obtido à direita e simplificando temos

$$(**) \qquad \frac{x^5+x+5x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}\ .$$

Multiplicando (**) por x^2+1 e então computando a expressão no meio em $x = i$:

$$\frac{i^3+3i}{i^2+2} = Ai + B \Longrightarrow A = 2 \text{ e } B = 0\ .$$

Multiplicando (**) por x^2+2 e então computando a expressão no meio em $x = \sqrt{2}i$:

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3 + 3\sqrt{2}i}{-2+1} = C\sqrt{2}i + D \Longrightarrow C = -1 \text{ e } D = 0\ .$$

2 Resolução.

Escrevemos $P(x) = x^5 + x$, $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2$ e,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2} + \frac{ex + f}{(x^2 + 2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e então, multiplicando ambos os membros por $p(x)$ resulta

$$(x^5 + x) = (ax + b)(x^2 + 2)^2 + (cx + d)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + (ex + f)(x^2 + 1)\,, \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Efetuando as operações indicadas no 2 membro, a igualdade acima se escreve

$$x^5{+}x = (a{+}c)x^5{+}(b{+}d)x^4{+}(4a{+}3c{+}e)x^3{+}(4b{+}3d{+}f)x^2{+}(4a{+}2c{+}e)x{+}4b{+}2d{+}f\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e (v. Corolário 3.7) obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

(1) $a + c = 1\,,$ (2) $b + d = 0\,,$ (3) $4a + 3c + e = 0\,,$ (4) $4b + 3d + f = 0\,,$

(5) $4a + 2c + e = 1\,,$ (6) $4b + 2d + f = 1\,.$

De (2) segue $d = -b$ e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente, $b+f = 0$ e $2b+f = 0$ que é visivelmente um sistema determinado; donde, $b = f = 0$ e, então, $d = 0$. De (1) segue $c = 1 - a$ e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente, $a+e = -3$ e $2a+e = -1$; cuja solução é $a = 2$ e $e = -5$ e portanto, $c = 1-a = 1-2 = -1$ donde $c = -1$. Consequentemente,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{5x}{(x^2 + 2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemplo 3. Decomponha em frações simples $\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$.

Resolução. Via método de Heaviside.

O denominador fatora-se: $(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6) = (x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$. Logo, temos

$$(*) \qquad \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x + 3}\ .$$

Multiplicando (*) por $(x + 1)$ e, aí, computando em $x = -1$ temos: $A = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.
Multiplicando (*) por $(x - 1)$ e, aí, computando em $x = 1$ temos: $B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.
Multiplicando (*) por $(x + 2$ e, aí, computando em $x = -2$ temos: $C = \frac{5}{3}$.
Multiplicando (*) por $(x + 3)$ e, aí, computando em $x = -3$ temos: $D = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$ $\blacksquare$

Exemplo 4. Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

$$\frac{1}{1+x^4}\ .$$

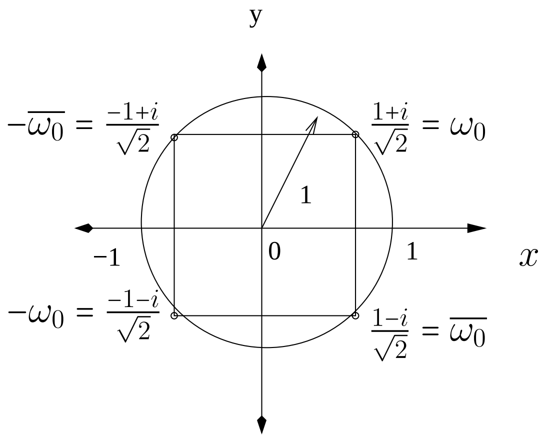

Figura 2.1: As quatro raízes quartas de $z = -1$.

Três Resoluções: Temos, vide Figura 1 acima,

$$z^4+1=0 \Longrightarrow z^4=-1=e^{i\pi} \Longrightarrow z=\omega_k=e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})i}=e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}\,,\quad k=0,1,2,3\ ;$$

isto é, $z\ \in\ \left\{\omega_0=e^{\frac{\pi}{4}i}\,,\ \omega_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\overline{\omega_0}\,,\ \omega_2=e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\omega_0\,,\ \omega_3=e^{\frac{7\pi}{4}i}=\overline{\omega_0}\right\}$.

O polinômio x^4+1 fatora-se então como

$$x^4+1=(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}})\cdot(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})=(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)\ ,$$

e obtemos pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples,

$$(*)\qquad \frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ .$$

1 Resolução: Não aplicando os citados métodos.

É fácil perceber que,

$$A+C=0\ \text{ e }\ B+D=1\ .$$

Ainda, computando a expressão em (*) em $x=i$ obtemos

$$\frac{1}{2}=\frac{Ai+B}{-\sqrt{2}i}+\frac{-Ai+(1-B)}{\sqrt{2}i}=\frac{-2A}{\sqrt{2}}+\frac{1-2B}{\sqrt{2}i} \Longrightarrow A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ e }B=\frac{1}{2} \Longrightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ e }D=\frac{1}{2}.$$

2 Resolução: Via método dos coeficientes a determinar (aritmética em $\mathbb{R}$)
Multiplicando por $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ a expressão (*) obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D)x^2 + (A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2})x + (B + D) \ , \end{aligned}$$

e resolvemos o sistema de equações

$$A + C = 0 \ , \quad A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0 \ , \quad A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0 \ \text{ e } \ B + D = 1 \ .$$

Substituindo a 1 $(C = -A)$ e a 4 equações na 2 temos $2A\sqrt{2} + 1 = 0$ e $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Substituindo a 1 equação na 3 obtemos $B = D$ e, pela 4 equação, $B = D = \frac{1}{2}$.

3 Resolução: Via uma variação do método de Heaviside (aritmética em $\mathbb{C}$).
Escrevamos $\frac{1}{1+x^4}$ na forma

$$(**) \qquad \frac{1}{(x - \omega_0)(x - \overline{\omega_0}) \cdot (x + \overline{\omega_0})(x + \omega_0)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \qquad .$$

Multiplicando (**) por $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = (x - \omega_0)(x - \overline{\omega_0})$ e computando em ω_0:

$$\frac{1}{2\ \mathrm{Re}(\omega_0) \cdot 2\omega_0} = A\omega_0 + B \Longrightarrow \frac{1}{4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1 + i) + B \ \text{ ou,}$$

$$\frac{1}{2(1 + i)} = \frac{1 - i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = (\frac{A}{\sqrt{2}} + B) + \frac{A}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \ B = \frac{1}{2} \ .$$

Multiplicando (**) por $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x + \overline{\omega_0})(x + \omega_0)$ e computando em $-\omega_0$:

$$\frac{1}{-2\omega_0(-\omega_0 - \overline{\omega_0})} = -C\omega_0 + D \ \text{ ou,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0\ \mathrm{Re}(\omega_0)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = (-\frac{C}{\sqrt{2}} + D) - \frac{C}{\sqrt{2}}i \Longrightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \ D = \frac{1}{2} \quad .$$

Resposta: $\displaystyle \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \ , \forall x \in \mathbb{R}$ ■

Por fim, apresentemos o "método das derivadas" (importante em "Teoria de uma Variável Complexa") que utiliza derivadas em $\mathbb{R}$ para computar os coeficientes em (1.1) correspondentes às parcelas provenientes das raízes reais.

Computemos em (1.1) os coeficientes $C_{1n_1},...,C_{1,1}$ relativos à raíz γ_1. Para simplificar escrevamos $n_1 = n$. Então, pela fatoração $Q(x) = (x-\gamma_1)^n Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ e $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, pela expressão em (1.1) temos,

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^n Q_1(x)} = \frac{C_{1,n}}{(x-\gamma_1)^n} + \frac{C_{1,n-1}}{(x-\gamma_1)^{n-1}} + ... + \frac{C_{1,1}}{(x-\gamma_1)^1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)},$$

com $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ [e, é fácil ver, $\partial(p_1) < \partial(Q) - n$]. Logo, multiplicando por $(x-\gamma_1)^n$,

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = C_{1,n} + C_{1,n-1}(x-\gamma_1) + C_{1,n-2}(x-\gamma_1)^2 + ... + C_{1,1}(x-\gamma_1)^{n-1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)}(x-\gamma_1)^n .$$

Computando a equação acima em γ_1 resulta $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} = C_{1,n}$.
Computando a 1 derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\gamma_1) = C_{1,n-1}$.
Computando a 2 derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)''(\gamma_1) = 2C_{1,n-2}$.
Por indução finita, computando a k-ésima derivada, $k = 0, 1, ..., n-1$, da equação acima em γ_1 obtemos: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1) = k! C_{1,n-k}$. Isto é, $C_{1,n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1)$.

Exemplo 5. Decomponha em frações simples $\frac{x^2}{(x-1)^3}$.

Três resoluções:

1 **Resolução:** Não aplicando os citados métodos.

Temos,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{[(x-1)+1]^2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} .$$

2 **Resolução:** Via método dos coeficientes a determinar.

Multiplicando por $(x-1)^3$ a decomposição

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

obtemos $x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)$. Logo, $A = 1$, $B = 2$ e $C = 1$.

3 Resolução: Empregando derivadas.

Basta computar mos as derivadas de ordem 0, 1 e 2 de $F(x) = x^2$ em $x = 1$. Logo,

$$C = \frac{F(1)}{0!} = 1\,, \;\; B = \frac{F'(1)}{1!} = 2 \;\; \text{e} \;\; A = \frac{F''(1)}{2!} = 1 \quad \blacksquare$$

Existem ainda outros métodos para decompor uma função racional em soma de frações simples. Cada qual tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão e, é claro, de preferências individuais. Ainda, é conveniente ser "criativo".

EXERCÍCIOS

1. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^m = 1$ e $z \neq 1$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$. Verifique:

   (a) $1 + z + z^2 + ... + z^{m-1} = 0$

   (b) $1 + z^p + z^{2p} + ...z^{(m-1)p} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$ tal que $\text{mdc}(m,p) = 1$.

   Sugestão: Aplique o Teorema de Bézout: $\exists\, r\,,s \in \mathbb{Z} \mid rm + sp = 1$.

   (c) Se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + ... + z^m = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

2. Resolva em $\mathbb{C}$ as equações:

   $(a)\ z^3 = i \qquad (b)\ z^4 = -16 \qquad (c)\ z^2 = \overline{z} \qquad (d)\ z^3 + z^2 + z = 0$

   $(e)\ z^3 = 2i \qquad (f)\ z^3 = -1 \qquad (g)\ z^6 = 8$.

3. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1-i) = 3 + 2i$. Compute $p(1+i)$.

4. Dê todas as raízes de $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$, sendo $1 - i$ uma delas.

5. Ache a e b tais que $p(z) = z^4 - 10z^3 + az^2 - 50z + b$ seja um quadrado perfeito, isto é, existe um polinômio $q \in \mathbb{C}[z]$ tal que $p = q^2$ e determine q.

6. Ache k tal que $z^3 - 5 - 4z$ divida $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$ exatamente.

7. Seja $p \in \mathbb{C}[z]$, com $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. Supondo que os zeros de p estão em uma progressão aritmética (p.a.) determine estes zeros.

8. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $1 + i\sqrt{2}$ é raíz de multiplicidade 2 do polinômio

   $$p(z) = z^5 - 7z^4 + 22z^3 + az^2 + 45z + b$$

   e para os valores encontrados de a e b determine todos os zeros de $p = p(z)$.

9. (a) Os trinômios $f(z) = z^2 - 2(1-i)z - 2i$ e $g(z) = z^2 + (1+4i)z - (5+i)$ têm uma raíz comum. Ache todas as raízes e simplifique $\frac{f(z)}{g(z)}$ na forma $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$.

   (b) Determine a região definida pelos complexos z que verificam $\frac{\text{Re}(z-\alpha)}{|z-\beta|} \geq 2$.

10. (a) Resolva a equação $z\overline{z} - 2\overline{z} - 5z = 3(3 - i)$.

(b) Denote por z_1 e z_2 as duas soluções obtidas em (a) que satisfazem $|z_1| < |z_2|$. Determine todas as raízes do polinômio

$$p(z) = z^4 + z^2 + 2z + 6\,,$$

sabendo que $p(z_1) = 0$.

11. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$. Seja z_0 arbitrário em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, \ldots, b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n \;, \forall z \in \mathbb{C}\;.$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.