Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS E TOPOLOGIA

Capítulo 4

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E OUTROS RESULTADOS POLINOMIAIS

Capítulo 5

SÉRIES / CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Capítulo 6

SOMAS NÃO ORDENADAS

Capítulo 7

SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Capítulo 8

SÉRIES DE FOURIER

Capítulo 9

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

10.1 - Introdução

Na seção seguinte provamos a Fórmula Integral de Cauchy e algumas consequências não utilizando as equações de Cauchy-Riemann, não supondo que uma função holomorfa é de classe C^1 e também não usando o Teorema de Green.

Também não utilizaremos que uma função holomorfa é, como uma função definida em um aberto de $\mathbb{R}^2$ a valores em $\mathbb{R}^2$, diferenciável. Entretanto, mostraremos elementarmente este importante fato e a também muito importante interpretação geométrica dada para a derivada, $f'(z_0)$, em um ponto z_0 de uma função f definida em uma variável complexa z a valores no plano complexo.

Na terceira seção aplicamos o Teorema de Green e as equações de Cauchy-Riemann.

10.2 - Resultados Básicos

Neste texto J é sempre um intervalo $[a,b]$ contido em $\mathbb{R}$.

Dado Ω um subconjunto aberto do plano complexo dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω se f é derivável em todo os pontos de Ω. Indicamos então,

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\,, \text{tal que } f \text{ é holomorfa em } \Omega\ \} \ .$$

Introduzamos os conceitos de integração e primitivação para funções em uma variável real a valores complexos.

10.1 Definição. *Seja $f : J \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, com $u =Re(f)$ e $v =Im(f)$.*

(a) A integral definida de f *é, se u e v são integráveis,*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \ .$$

(b) A derivada de f *é, se existir,*

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = u'(t)+iv'(t) \ ,$$

(c) Uma primitiva de f *é toda função $F : J \to \mathbb{C}$ tal que $F'(t) = f(t), \forall t \in J$.*

10.2 Proposição. *Se $f : J \to \mathbb{C}$ e $g : J \to \mathbb{C}$ são integráveis e $\lambda \in \mathbb{C}$ então,*

(a) $f + g$ é integrável e $\int_a^b (f+g)dt = \int_a^b f\,dt + \int_a^b g\,dt$.

(b) λf é integrável e $\int_a^b \lambda f\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt$.

Prova. Trivial e a deixamos ao leitor∎

10.3 Proposição. *Se $f : J \to \mathbb{C}$ e $g : J \to \mathbb{C}$ são deriváveis e $\lambda \in \mathbb{C}$ então,*

(a) $f + g$ é derivável e $(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$.

(b) λf é derivável e $(\lambda f)'(t) = \lambda f'(t)$.

Prova. Trivial e a deixamos ao leitor∎

10.4 Definição. *Uma* curva suave, *ou* curva de classe C^1, *em $\mathbb{C}$ é uma aplicação*

$$\gamma : J \to \mathbb{C}$$

com derivada $\gamma' : J \to \mathbb{C}$ contínua em J. Escrevemos então: $\gamma \in C^1$.

10.5 Definição. *Uma* curva suave por partes, ou C^1 por partes, *em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de curvas suaves $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, $1 \le i \le n$, justapostas; isto é, com $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \le i \le n-1$. Indicamos por $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n$ uma curva suave por partes, e dizemos que tal curva é* fechada *se $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$.*

10.6 Definição. *Um* domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um conjunto aberto não vazio que é* conexo por curvas suaves, *isto é, dados z_1 e z_2 em Ω existe uma curva γ suave por partes, com imagem em Ω, com ponto inicial z_1 e ponto final z_2.*

Doravante, a menos que alertado, Ω é um domínio.

10.7 Lema. *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\gamma : J \to \Omega$ é derivável então, $f \circ \gamma : J \to \mathbb{C}$ é derivável e*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,, \ \forall t \in J.$$

Prova. Seja $t_0 \in J$ e $h : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) & , \text{ se } z \neq z_0\,, \\ 0 & , \text{ se } z = z_0 = \gamma(t_0)\ . \end{cases}$$

Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, h é contínua em z_0. Como $f(z) - f(z_0) = [h(z) + f'(z_0)](z - z_0)$, substituindo $z = \gamma(t)$, $z_0 = \gamma(t_0)$ e dividindo por $t - t_0$, com $t \neq t_0$, obtemos

$$\text{(10.7.1)} \qquad \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \big[h(\gamma(t)) + f'(\gamma(t_0))\big]\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\,, t \neq t_0.$$

Computemos o limite do segundo membro da equação (10.7.1) quando $t \to t_0$. Como γ é derivável em t_0, γ é contínua em t_0 e, sendo h contínua em $z_0 = \gamma(t_0)$, concluimos que $\lim_{t\to t_0}(h \circ \gamma)(t) = h\big(\gamma(t_0)\big) = h(z_0) = 0$. Logo, o citado limite é $f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$ que pela referida equação é a derivada $(f \circ \gamma)'(t_0)$ ∎

10.8 Lema. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, então f é uma constante.*

Prova. Se $\gamma : J \to \Omega$ é uma curva derivável então, pelo Lema 10.7,

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t)\,dt = \int_a^b f'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b 0\,dt = 0 \quad .$$

Logo, f é constante sobre as curvas suaves em Ω e também sobre as curvas suaves por partes (verifique) e então (v. Def. 10.6) f é constante em Ω ∎

10.9 Definição. A integral de f ao longo de γ, *onde $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ é uma curva suave, é*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \ \in \mathbb{C}\ .$$

Tal integral gera duas integrais de linha ao longo de γ: se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \\
&= \int_a^b [u(x(t)\,,y(t)) + iv(x(t)\,,y(t))][x'(t) + iy'(t)]\ dt\ = \\
&= \int_a^b \big[u(x(t)\,,y(t))x'(t) - v(x(t)\,,y(t))y'(t)\big]\ dt\ + \\
&\quad + i\int_a^b \big[u(x(t)\,,y(t))y'(t) + v(x(t)\,,y(t))x'(t)\big]\ dt\ = \\
&= \int_\gamma udx - vdy\ +\ i\int_\gamma udy + vdx.
\end{aligned}$$

10.10 Nota. *Escrevendo $dz = dx + idy$ temos, formalmente, para $f = u + iv$,*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i(udy + vdx) = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy).$$

Devido à fórmula para o comprimento de uma curva,

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

e que ao longo de γ temos $dx = x'(t)dt$ e $dy = y'(t)dt$, com a Notação 7.10 obtemos ao longo de γ a expressão $dz = (x'(t) + iy'(t))dt$. Justifica-se então o que segue.

10.11 Nota. *O "módulo" $|dz|$ ao longo de γ e o comprimento $L(\gamma)$ de γ são,*

$$|dz| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \quad e \quad L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |dz|.$$

10.12 Definição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, contínua, e $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 ... \vee \gamma_n$ uma curva suave por partes em Ω.* A integral de f ao longo de γ *é*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz\ +\ \int_{\gamma_2} f(z)dz\ + \cdots +\ \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

A letra L para o comprimento de γ vem da palavra inglesa "lenght".

10.13 Definição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, com f contínua. Uma função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma* primitiva *de f se F é holomorfa em Ω e $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

10.14 Proposição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, F uma primitiva de f e γ uma curva suave por partes em Ω unindo o ponto z_0 ao ponto z_1. Então,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Em particular, se o caminho é fechado,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Prova. Suponhamos $\gamma : [a,b] \to \Omega$ suave (deixamos ao leitor verificar o caso em que γ é suave por partes). Pelo Lema 10.7 segue,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt =$$

$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = (F\circ\gamma)|_a^b = F(z_1) - F(z_0) \quad \blacksquare$$

10.15 Lema. *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, contínua. Então,*

$$\Big|\int_a^b \varphi(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Prova. Se $\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = 0$ nada há a fazer. Senão, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\frac{\int_a^b \varphi(t)\,dt}{\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right|} = e^{i\theta},$$

e portanto $\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt$ é um número real. Logo,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\,[e^{-i\theta}\varphi(t)]\,dt \le \int_a^b |\mathrm{Re}\,[e^{-i\theta}\varphi(t)]|\,dt \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt \blacksquare$$

10.16 Lema (Estimativa M-L). *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua ao longo de $\gamma : J \to \Omega$, γ suave por partes, e $M \ge 0$ é tal que $|f(\gamma(t))| \le M$, $\forall t \in J$, temos*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le ML(\gamma).$$

Prova. Pelo Lema 10.15,

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \le M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = ML(\gamma)\blacksquare$$

Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ é uma curva, ou caminho, podemos inverter o sentido de percurso definindo o caminho reverso de γ, que indicamos γ^-, por

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)\,,\ a \le t \le b.$$

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é tal que as integrais abaixo citadas existem, é claro que temos

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

10.17 Proposição. *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *uma função contínua. São equivalentes:*

(a) f *tem uma primitiva em* Ω.

(b) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *para toda curva fechada* γ *suave por partes em* Ω.

(c) $\int_\gamma f(z)\,dz$ *só depende dos pontos inicial e final das curvas* γ *suaves por partes contidas em* Ω.

Prova. Pela Proposição 10.14 temos $(a) \Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$.

(b) $\Rightarrow (c)$ Se γ_1 e γ_2 são curvas suaves unindo z_0 e z_1 então $\gamma_1 \vee \gamma_2^-$ é fechada e

$$0 = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2^-} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^-} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz \;-\; \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(c) $\Rightarrow (a)$ Fixo $z_0 \in \Omega$, dado $z \in \Omega$ seja γ uma curva suave em Ω unindo z_0 a z. Por (c) a integral abaixo independe de γ e define uma função

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw.$$

Mostremos $F' = f$. Sejam $R > 0$ tal que $D(z;R) \subset \Omega$, $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < R$, e o segmento de reta $\sigma : [0,1] \to D(z;R)$, $\sigma(t) = z + th$, unindo z a $z+h$.

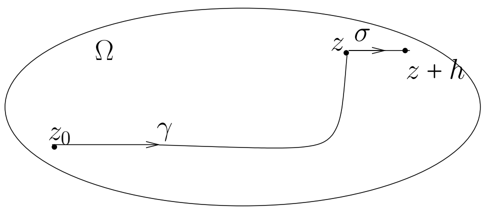

Figura 10.1: Ilustração à Proposição 10.17

Pela definição de F temos,

$$F(z+h) = \int_{\gamma\vee\sigma} f(w)\,dw = \int_\gamma f(w)\,dw \;+\; \int_\sigma f(w)\,dw = F(z) + \int_\sigma f(w)\,dw \;\text{ e}$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_\sigma f(w)\,dw.$$

Por outro lado,

$$\int_\sigma dw = \int_0^1 \sigma'(t)\,dt = \int_0^1 h\,dt = h \;\Rightarrow\; 1 = \frac{1}{h}\int_\sigma dw \;\Rightarrow\; f(z) = \frac{1}{h}\int_\sigma f(z)\,dw.$$

Então, como f é contínua em z, dado $\epsilon > 0$ escolhemos $r < R$, $r > 0$, tal que $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ se $|w - z| < r$. Assim, para $|h| < r$, e consequentemente $|f(\sigma(t)) - f(z)| < \epsilon$, aplicando o Lema M-L 10.16 obtemos,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_\sigma \frac{f(w) - f(z)}{h} dw\right| \leq \frac{\epsilon}{|h|}|h| = \epsilon\,, \forall |h| < r.$$

Logo, $F'(z) = f(z)$ ■

10.18 Teorema (Cauchy-Goursat). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Suponha que $\Delta \subset \Omega$ é um triângulo que limita uma região inteiramente contida em Ω. Então,*

$$\int_\Delta f(z)\, dz = 0.$$

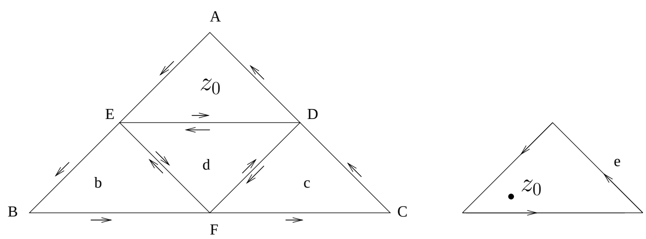

Figura 10.2: Ilustração ao Teorema de Cauchy-Goursat

Prova. Iniciemos (v. figura) orientando Δ no sentido anti-horário e descrevendo Δ pela justaposição dos segmentos $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$. Selecionando os pontos médios dos lados de Δ e unindo tais pontos por segmentos de reta obtemos quatro triangulos contidos na região limitada por Δ: Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4. Para cada um desses triângulos adotamos também o sentido de percurso anti-horário. Assim temos,

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz + \int_{\Delta_3} f(z)dz + \int_{\Delta_4} f(z)dz.$$

Destaquemos entre as quatro integrais no segundo membro a de maior valor absoluto e seja $\Delta^{(1)}$ o triângulo correspondente. Para tal triângulo $\Delta^{(1)}$ repetimos a construção acima e expressamos a integral ao longo de $\Delta^{(1)}$ como a soma de quatro integrais sobre quatro triângulos formados a partir dos pontos médios de $\Delta^{(1)}$ e orientados no sentido anti-horário e destacamos $\Delta^{(2)}$, o triângulo cuja integral correspondente tem maior módulo. Iterando, construímos indutivamente uma sequência de triângulos $(\Delta^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\Delta^{(0)} = \Delta$. Seja $\delta^{(n)}$ o comprimento do maior lado de $\Delta^{(n)}$, pondo $\delta = \delta^{(0)}$. Temos então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\text{região limitada por}\Delta^{(n+1)} &\subset \text{região limitada por}\Delta^{(n)},\\
\Big|\int_\Delta f(z)\,dz\Big| &\le 4^n\Big|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\Big|,\\
L\big(\Delta^{(n)}\big) &= \frac{1}{2^n}L\big(\Delta\big) \text{ e,}\\
\delta^{(n)} &= \frac{1}{2^n}\delta.
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^2$ é completo e os diâmetros [o **diâmetro** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é $\delta(X) = \sup\{|x_1 - x_2| : x_1, x_2 \in X\}$] dos triângulos $\Delta^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, tendem a zero se $n \to +\infty$, a sequência formada pelas regiões limitadas pelos triângulos $\Delta^{(n)}$ (considerada ordenada pela inclusão) é decrescente, e portanto a intersecção destas regiões é um único ponto z_0 [vide o Princípio dos Intervalos Encaixantes no Capítulo 5].

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que:

(a) $D(z_0;\tau) \subset \Omega$

(b) $0 < |z - z_0| < \tau \Longrightarrow \Big|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(_0)\Big| < \epsilon$.

Sendo que a desigualdade obtida em (b) equivale a

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|, \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < \tau.$$

É claro que se n é suficientemente grande tal que $\delta^{(n)} = \frac{\delta}{2^n} < \tau$, a região limitada por $\Delta^{(n)}$ está contida em $D(z_0;\tau)$ e, notando que $\int_{\Delta^{(n)}} dz = 0 = \int_{\Delta^{(n)}} zdz$,

$$\int_{\Delta^{(n)}}[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz = \int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\ .$$

Logo, pela última equação, pela última inequação, e pelo Lema M-L 10.16, temos

$$\Big|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\Big| \ \le\ \epsilon\int_{\Delta^{(n)}}|z - z_0||dz| \le \epsilon\delta^{(n)}L(\Delta^{(n)}) = \frac{\epsilon\delta L(\Delta)}{4^n},$$

e então,

$$\Big|\int_\Delta f(z)dz\Big| \ \le\ 4^n\Big|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\Big| \le \epsilon\delta L(\Delta)$$

e, como ϵ é um número estritamente positivo arbitrário, $\Big|\int_\Delta f(z)dz\Big| = 0$ ∎

10.19 Definição. *Um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é* estrelado *se existe $z_0 \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$ o segmento (orientado) $\overrightarrow{z_0 z}$ está contido em Ω; z_0 é um* centro *de Ω.*

Como é óbvio, todo aberto convexo é estrelado.

10.20 Corolário. *Seja* Ω *um domínio estrelado e* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *uma função holomorfa. Então,* f *admite uma primitiva em* Ω*.*

Prova. Dados $A, B \in \Omega$ e $\sigma(t) = A + t(B - A)$, $t \in [0,1]$, introduzimos a notação

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(w)\,dw := \int_{\sigma} f(w)\,dw.$$

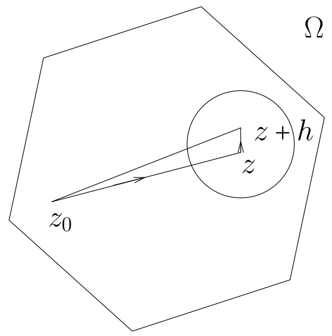

Figura 10.3: Ilustração ao Corolário 10.20

Então, fixado z_0 um centro de Ω definimos para $z \in \Omega$,

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w)\,dw\ .$$

Se $|h| < r$, r suficientemente pequeno, o triângulo Δ de vértices z_0, z e $z+h$ está contido em Ω e, pelo Teorema de Cauchy-Goursat,

$$0 = \int_{\Delta} f(w)\,dw = \int_{\overrightarrow{z_0;z}} f(w)\,dw\ + \int_{\overrightarrow{z;z+h}} f(w)\,dw\ - \int_{\overrightarrow{z_0;z+h}} f(w)\,dw,$$

e portanto,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\overrightarrow{z;z+h}} f(w)\,dw.$$

e, utilizando que $\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{z;z+h}} 1\,dw = 1$,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{z;z+h}} [f(w) - f(z)]\,dw.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $r > 0$ tal que $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ se $w \in D(z;r)$. Então, aplicando a Estimativa M-L 10.16, concluímos que

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{z;z+h}} [f(w) - f(z)]\,dw\right| \le \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon\,,\ \ \forall |h| < r \blacksquare$$

10.21 Corolário. *Seja Ω estrelado, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e γ uma curva fechada. Então,*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Prova. Pelo Corolário 10.20 f tem primitiva e pela Prop. 10.17 segue a tese ■

A seguir apresentamos para o Corolário 10.21 um exemplo que será utilizado na demonstração, logo a seguir, da potente Fórmula Integral de Cauchy, da qual derivaremos a analiticidade das funções holomorfas.

10.22 Exemplo. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $D(a;R) \subset \Omega$. Se $z_0 \in D(a;R)$, é claro que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ é holomorfa em $D(a;R) \setminus \{z_0\}$. Consideremos um diâmetro de $D(a;R)$ que contém z_0. O ponto z_0 determina, neste diâmetro, dois segmentos de reta com extremo z_0, os quais designamos L_1 e L_2. Veja figura abaixo.*

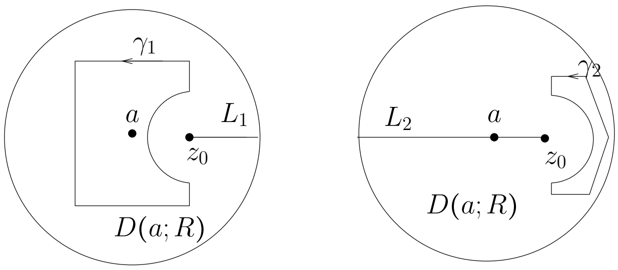

Figura 10.4: Ilustração ao Exemplo 10.22

Evidentemente, $D(a;R) \setminus L_1$ e $D(a;R) \setminus L_2$ são domínios estrelados. Assim, pelo Corolário 10.21, se γ_1 e γ_2 são curvas fechadas suaves por partes contidas em $D(a;R) \setminus L_1$ e $D(a;R) \setminus L_2$, respectivamente, temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

10.23 Teorema (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $\overline{D}(z_0;r_0) \subset \Omega$ e $\Gamma = \partial \overline{D}(z_0;r_0)$ orientada no sentido anti-horário. Se z é um ponto qualquer no interior de $\overline{D}(z_0;r_0)$ então,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Prova. Seja $R > 0$ tal que $\overline{D}(z_0; r_0) \subset D(z_0; R) \subset \Omega$. Então,

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - z} \quad \text{é holomorfa em} \quad D(z_0; R) \smallsetminus \{z\},$$

e temos dois domínios estrelados em $\overline{D}(z_0; R)$ nos quais $g(w)$ é holomorfa pois, o

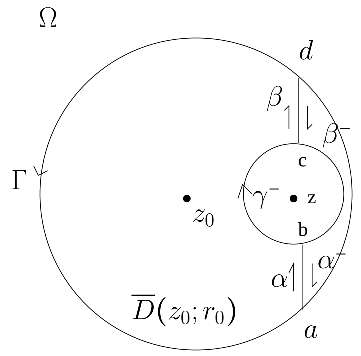

Figura 10.5: Ilustração ao Teorema 10.23

diâmetro de $\overline{D}(z_0; R)$ por z determina dois segmentos, L_1 e L_2, com extremos em z e, como já visto em 10.22, $D(z_0; R) \smallsetminus L_1$ e, $D(z_0; R) \smallsetminus L_2$ são dois tais domínios.

Em seguida, isolamos o ponto z considerando um círculo γ centrado em z e de raio $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $D(z; r) \subset D(z_0; r_0)$.

Sejam então σ_1 e σ_2 definidas pelas justaposições (v. figura acima):

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha \vee (\,\text{trecho de } \gamma^- \text{ entre } b \text{ e } c\,) \vee \beta \vee (\,\text{trecho de } \Gamma \text{ entre } d \text{ e } a\,) \\ \sigma_2 = \ (\text{trecho de } \Gamma \text{ entre } a \text{ e } d) \vee \beta^- \vee (\,\text{trecho de } \gamma^- \text{ entre } c \text{ e } b\,) \vee \alpha^- \end{cases}$$

Como σ_1 e σ_2 são fechadas, cada qual em um domínio estrelado no qual g é holomorfa, temos pelo Corolário 10.21 que

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \ = \int_{\sigma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 0.$$

Logo,

$$0 = \int_{\sigma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \ + \int_{\sigma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \ + \int_{\gamma^-} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

donde obtemos,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \ = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Dada a curva $\gamma(t) = z + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, temos $\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z} dw = 2\pi i f(z)$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ se $|w - z| < \delta$.

Então, pelo Lema Estimativa M-L 10.26, para $r > 0$ tal que $r < \delta$ obtemos,

$$\left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \le \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a tese segue ■

No que segue usaremos o trivial resultado:

10.24 Lema. *Sejam $\gamma : J \to \mathbb{C}$ uma curva suave por partes e (f_n), uma sequência de funções contínuas $f_n : \gamma(J) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas na imagem de γ. Suponhamos que (f_n) converge uniformemente a $f : \gamma(J) \to \mathbb{C}$. Para $n \to +\infty$ temos,*

$$\int_\gamma f_n(z) dz \longrightarrow \int_\gamma f(z) dz.$$

Prova. Suponhamos γ suave e $J = [a, b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \le \epsilon$, $\forall n \ge N$, $\forall t \in [a, b]$. Logo, pela Estimativa M-L 10.16,

$$\left| \int_\gamma f_n(z) dz - \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f)(z) dz \right| \le \epsilon L(\gamma).$$

Deixamos ao leitor verificar o caso em que γ é suave por partes ■

10.25 Teorema. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e z_0 um ponto em Ω.*

(a) Seja $R = d(z_0; \partial\Omega) = \min\{|z - \omega| : \omega \in \partial\Omega\}$. Então, $\forall z \in D(z_0; R)$ vale:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \text{com } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ \forall n \ge 0.$$

(b) $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

(c) Se $0 < r < R$, vale a Fórmula Integral de Cauchy para as derivadas,

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \ \forall n \ge 0,$$

e, definindo $M = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$, valem as Estimativas de Cauchy,

$$|a_n| \le \frac{M}{r^n}, \ \forall n \ge 0.$$

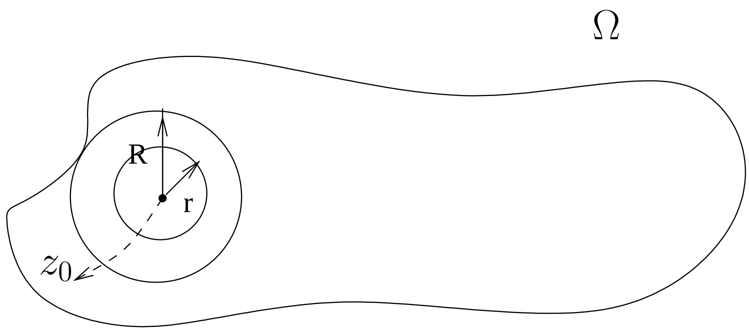

Figura 10.6: Ilustração ao Teorema 10.25

Prova. É claro que $R > 0$, pois $z_0 \notin \partial\Omega$ e $\partial\Omega$ é fechado.

(a) , (b) e (c). Fixemos r tal que $0 < r < R$ e z tal que $|z - z_0| < r$. Definindo a curva $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (v. figura), pela fórmula de Cauchy segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Notando que $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$ se $w \in \gamma_r\big([0, 2\pi]\big)$, escrevemos a série geométrica

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{(w - z_0)^{-1}}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}},$$

cuja convergência é, pelo Teste-M de Weierstrass, uniforme sobre o conjunto Imagem$(\gamma_r) = \big\{w : w \in \gamma_r([0, 2\pi])\big\}$. Pelo Lema 10.24 segue,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \Big) (z - z_0)^n.$$

Portanto, desenvolvemos f como uma série de potências centrada em z_0 e convergente em $D(0; r)$, qualquer que seja r satisfazendo $0 < r < R$. Logo, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Como já sabemos que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtemos também a Fórmula Integral de Cauchy para as Derivadas. As estimativas de Cauchy seguem da Desigualdade de Gutzmer-Parseval em $\mathcal{A}(\Omega)$■

10.26 Corolário. $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

Prova. Trivial, pois no capítulo 9 vimos que $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$■

Com o Teorema 10.25 estendemos trivialmente às funções holomorfas os resultados obtidos no Capítulo 9 para funções analíticas. Abaixo, tais resultados são enunciados sem prova.

10.27 Corolário (Princípio dos Zeros Isolados). *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω um domínio. Então, ou $f \equiv 0$ ou os zeros de f são isolados. Isto é, se $z_0 \in \Omega$ é tal que $f(z_0) = 0$, existem um natural $n \geq 1$ e $g \in \mathcal{H}\big(D(z_0;R)\big)$, $R > 0$, satisfazendo*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)\,, \quad \forall z \in D(z_0;R) \quad e \quad g(z) \neq 0\,, \forall z \in D(z_0;r).$$

10.28 Princípio de Identidade em $\mathcal{H}(\Omega)$. *Seja Ω um domínio no plano complexo. Se $f\,, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ são tais que,*

$$f(z_n) = g(z_n)\,, \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguma sequência (z_n) em Ω com ponto de acumulação em Ω então $f \equiv g$.

10.29 Princípio do Módulo Máximo. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e Ω conexo. Então, $|f|$ não tem máximo local a não ser que f seja constante.*

10.30 Definição. *A função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto em $\mathbb{C}$, pertence a $C(\overline{\Omega})$ se f admite uma extensão $\overline{f}$ contínua em $\overline{\Omega}$. Isto é, a função $\overline{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ é contínua e satisfaz $\overline{f}(\omega) = f(\omega)\,, \forall \omega \in \Omega$.*

10.31 Corolário. *Seja Ω um aberto limitado e $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Prova. Como $\overline{\Omega}$ e $\partial\Omega$ são compactos e f é contínua, existem os dois máximos citados e, obviamente, $\max\limits_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \geq \max\limits_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. Seja $z_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$. Se $z_0 \in \partial\Omega$, nada mais há a fazer. Se $z_0 \in \Omega$, pelo Princípio do

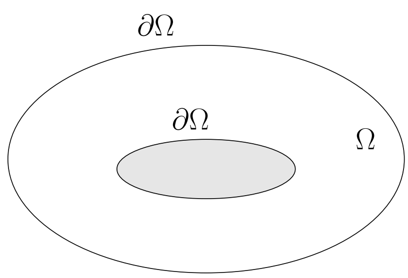

Figura 10.7: Ilustração ao Corolário 10.31

Módulo Máximo f é constante na componente conexa (um conjunto aberto) de Ω contendo z_0 e também na fronteira desta componente. Como tal fronteira está contida na fronteira de Ω, concluímos a igualdade enunciada ∎

10.32 Princípio do Módulo Mínimo. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f não constante e Ω conexo. Então, $|f|$ não tem mínimo local, a menos que f se anule.*

10.33 Teorema (Liouville). *Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f é limitada então f é constante.*

10.34 Teorema da Aplicação Aberta. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ não constante e Ω conexo. Então, f é uma aplicação aberta.*

10.35 Fórmula para o Valor Médio de Gauss. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e consideremos $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$. Então,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Prova. Consequência trivial da Propriedade Poligonal do Valor Médio e do Teorema 10.25. Verifique ■

10.3 - Teorema de Green

10.36 Definição. *Uma curva (suave por partes) fechada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é* **simples** *se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ somente se $t_1, t_2 \in \{a, b\}$. Uma curva de Jordan suave por partes é uma curva suave por partes fechada e simples.*

Nesta seção faremos uso, sem apresentar a prova, do célebre resultado abaixo.

10.37 Teorema de Green. *Seja Ω um domínio limitado no plano cuja fronteira, $\partial\Omega$, consiste de um número finito de curvas de Jordan. Sejam $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy \;=\; \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx dy\ .$$

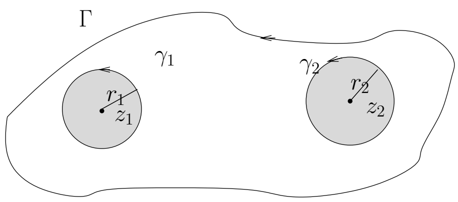

Figura 10.8: Ilustração para o Teorema de Green.

10.38 Teorema (Cauchy). *Seja Ω um domínio limitado cuja fronteira é uma união finita de curvas de Jordan suaves por partes. Se $f = u + iv$ é analítica em Ω, com f e f' em $C(\overline{\Omega})$, então,*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0 \ .$$

Prova.

Figura 10.9: Ilustração ao Teorema 10.38 (duas das possibilidades para Ω)

Escrevendo $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$ temos, pelo Teorema de Green e pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \int_{\partial\Omega} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\partial\Omega} (udx - vdy) \ + \ i \int_{\partial\Omega} (udy + vdx)$$

$$= \iint_{\Omega} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) dxdy \ + \ i \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dxdy = 0 \blacksquare$$

Reparafraseando o Teorema de Cauchy 10.38 e sua demonstração apresentamos a seguir o Corolário 10.39, para o qual mostramos uma prova equivalente a acima dada, porém utilizando o conceito de rotacional de um campo vetorial.

10.39 Corolário. *Seja γ_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ curvas de Jordan (fechadas simples) tais que*

(a) γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ estão todas em int(γ_0), o interior da região limitada por γ_0.

(b) $\overline{Int(\gamma_i)} \cap \overline{Int(\gamma_j)} \neq \emptyset$ se $1 \leq i < j \leq n$ e int(γ_i) o interior da região limitada por γ_i

Seja $\mathcal{R}$ =int(γ_0) $\smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{int(\gamma_i)}$ e $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω um aberto contendo $\mathcal{R}$. Então,

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\, dz.$$

Prova.

Escrevendo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e considerando os campos

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_1}(x,y) &= \big(u(x,y), -v(x,y)\big) \\ \overrightarrow{F_2}(x,y) &= \big(v(x,y), u(x,y)\big), \end{cases}$$

dada uma curva γ arbitrária temos

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\gamma \ + \ i \oint_\gamma \overrightarrow{F}_2 \cdot d\gamma.$$

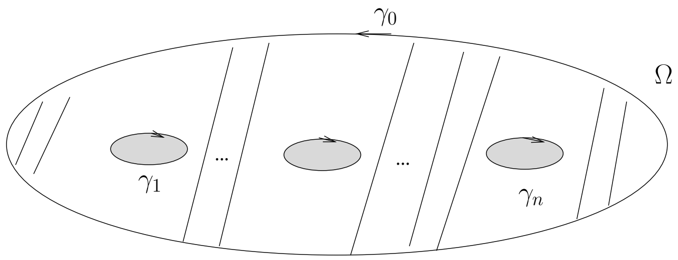

Figura 10.10: Ilustração ao Corolário 10.39

Pelas equações de Cauchy-Riemann é trivial verificar que rot$(\vec{F_1})$ =rot$(\vec{F_2}) = \vec{0}$. Logo, pelo Teorema de Green (onde utilizamos que u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas),

$$0 = \iint_{\mathcal{R}} \text{rot}\,(\vec{F_i}) \cdot \vec{k}\, dxdy = \oint_{\gamma_0} \vec{F_i} \cdot d\gamma_1 + \oint_{\gamma_1^-} \vec{F_i} \cdot d\gamma_1 + \cdots \ + \ \oint_{\gamma_n^-} \vec{F_i} \cdot d\gamma_n \,, i = 1, 2.$$

Consequentemente,

$$0 \ = \Big[\oint_{\gamma_0} \vec{F_1} \cdot d\gamma + \oint_{\gamma_1^-} \vec{F_1} \cdot d\gamma + \cdots + \oint_{\gamma_n^-} \vec{F_1} \cdot d\gamma \Big] + i \Big[\oint_{\gamma_0} \vec{F_2} \cdot d\gamma + \oint_{\gamma_1^-} \vec{F_2} \cdot d\gamma + \cdots + \oint_{\gamma_n^-} \vec{F_2} \cdot d\gamma \Big],$$

e

$$0 = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz - \int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \cdots - \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \blacksquare$$

Com o Corolário 10.39 melhoramos a Fórmula Integral de Cauchy.

10.40 Fórmula Integral de Cauchy (bis). *Seja Ω um domínio limitado com fronteira dada por curvas de Jordan suaves por partes. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f, f' \in C(\overline{\Omega})$ então,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dz, \ \textit{qualquer que seja } z_0 \textit{ em } \Omega.$$

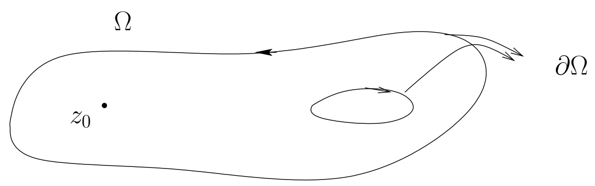

Figura 10.11: Ilustração ao Teorema 10.40

Prova. Consideremos um disco $\overline{D(z_0;r)} \subset \Omega$, $r > 0$. Então, $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{D(z_0;r)}$ é tal que $\partial\Omega_r$ é a união de $\partial\Omega$ e o círculo $\{|z - z_0| = r\}$, este orientado no sentido horário. A função $g(w) = \frac{f(w)}{w-z_0}$ é holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$ e portanto,

$$0 = \int_{\partial\Omega_r} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \;=\; \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \;+\; \int_{\partial D(z_0;r)^-} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw$$

e assim,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \;=\; \int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \;=\; 2\pi i f(z_0) \blacksquare$$

10.41 Corolário. *Se Ω é um aberto em $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, então*

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Prova. Pelas equações de Cauchy-Riemann temos $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Logo, $u_{xx} = v_{yx}$ e $u_{yy} = -v_{xy}$ e, como $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ temos que $u, v \in C^\infty(\Omega)$ e então, pelo Teorema de Schwarz, as derivadas mistas comutam e portanto,

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Assim, para $v =$Re$(-if)$ temos $-if \in \mathcal{H}(\Omega)$ e portanto também temos $\Delta v = 0$ $\blacksquare$

10.42 Definição. *Uma função $u = u(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, é* harmônica *se admite todas as derivadas de segunda ordem e*

$$\Delta u(x,y) = 0, \;\; \forall (x,y) \in \Omega.$$

EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 10

1. Para cada um dos conjunto abaixo, sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva.

   (a) $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\,, \mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$.

   (b) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\,,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

   (c) $V = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leq |z| \leq 1\,,\ \mathrm{Re}(z) \geq\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

2. Calcule $\int_{\partial V} f$, com V cada um dos conjuntos do exer. 2 (V e ∂V positiva/e orientados) e
$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad , \quad f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) .$$

3. Seja V como no enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por
$$\int_{\partial V} x dy \ .$$

4. Use (3) para calcular a área de
$$V = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\,,\ 1 \leq xy \leq 4\right\} .$$

5. Calcule (V e ∂V positiva/e orientados)
$$\int_{\partial V} (x^2 - y^2)dx + 2xydy \quad \text{e} \quad \int_{\partial v} 2xydx + (y^2 - x^2)dy \ ,$$
onde V é

   (i) O retângulo delimitado pelas retas $y = x$, $y = -x + 4$, $y = x + 2$ e $y = -x$.

   (ii) $V = \{(x,y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\,, 1 \leq xy \leq 4\}$.

6. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e se $\tilde{f} = \big(u(x,y)\,, v(x,y)\big)$ é a identificação usual com f através do isomorfismo natural entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ mostramos

$$J(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

a forma matricial das equações C-R . Lembe que já vimos que

$$z = a + bi \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

7. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto em $\mathbb{C}$, seja $\tilde{f}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ com a notação acima e suponhamos $\tilde{f}$ diferenciável [logo, existem $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$].

   (a) Escrevendo,
   $$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i},$$
   $$f = u(x,y) + iv(x,y) = u\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) + iv\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big),$$
   desenvolva, usando a regra da cadeia, as fórmulas (memorize-as) para
   $$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}},$$
   em termos das derivadas parciais das funções a valores reais u e v, em relação às variáveis reais x e y.

   (b) Temos $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ se e só se valem as equações de Cauchy-Riemann:
   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   (c) Valem as equações C-R (de Cauchy-Riemann) se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

   (d) Interprete o resultado em (c).

   (e) Se existe $f'(z_0)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, então $\tilde{f}$ é diferenciável em (x_0, y_0).

8. Verifique se se cumprem as condições $C - R$ para as seguinte funções

   (i) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

   (ii) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

   (iii) $f(z) = e^{-x}(cosy - i \sin y)$

   (iv) $f(z) = e^{y}(\cos x + i \sin x)$.

9. Seja $f(z)$ uma função inteira (holomorfa em todo o plano complexo). Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é inteira. Mostre, ainda, que a função $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em $z_0 = 0$ se e somente se $f'(0) = 0$.

10. Compute as derivadas e expresse na forma $u + iv$ o seno e o co-seno hiperbólicos:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad , \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \ .$$

11. Identifique o erro no Paradoxo de Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log z \quad .$$

12. Usando o ramo principal de z^λ calcule $2^{\sqrt{2}}$, $(5i)^{1+i}$ e 1^i e 1^{-i}.

13. Determine o ramo principal da função $\sqrt{z-1}$.

14. Prove o Teorema de Liouville para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy.

15. Se f é uma função inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$) e existem $M \geq 0$, $R > 0$ e $n \geq 1$ tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq R$, mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

16. Compute $\int_\gamma f(z)\, dz$ onde f e γ são dados.

    (a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (d) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (f) $f(z) = \pi e^{\pi\overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices 0, 1, $1+i$ e i, positivamente orientado.

    (g) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$.

    (h) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$, $n \geq 2$.

(i) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(j) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(k) $f(z) = \frac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(l) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $n \ge 1$.

(m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

17. Mostre que $\int_\gamma \frac{e^{kz}}{z}\,dz = 2\pi i$, onde k é uma constante real e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que
$$\int_0^\pi e^{k\cos t}\cos(k\sin t)\,dt = \pi \ .$$

18. Prove o Princípio do Módulo Máximo, para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, com a Fórmula Integral de Cauchy. Deduza então o Princípio do Módulo Mínimo.

19. Seja f holomorfa num domínio Ω contendo a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ e z um ponto interior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ então,
$$|f(z)| \le K\Big(\frac{L(\gamma)}{2\pi\delta}\Big)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad L(\gamma) \text{ o comprimento de } \gamma\,, \ \forall n \ge 1 \ .$$
Aplique tal desigualdade para provar o Princípio do Módulo Máximo.

20. (Parseval) Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in D_\rho(z_0)$, e se $r < \rho$, então
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}|^2 d\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n} \ .$$
Aplicando tal identidade, dê uma outra prova do Princípio do Módulo Máximo.

21. (Princípio da Identidade). Sejam $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω um dominio. Suponha que $X = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem ponto de acumulação em Ω. Então, $f \equiv g$.

22. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e tal que existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Então, f é constante.

23. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in D(z_0;\rho)$, $\rho > 0$. Então,
$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \,,$$
é uma primitiva de f em $D(z_0;\rho)$.