DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS - UMA ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

5 LISTA DE EXERCÍCIOS

São obrigatórios: Os onze primeiros exercícios.

1. Enuncie a Regra da Cadeia em $\mathbb{C}$. Tente escrever sozinho a prova da regra da cadeia (ao menos por uma hora, caso não consiga). Escreva uma prova da Regra da Cadeia com sua próprias palavras.

2. Demonstre, com suas palavras, que toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

3. Roteiro para uma prova muito simples e muito fácil de que dadas $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$, duas series absolutamente convergentes, então o produto de Cauchy, $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, satisfaz $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$.

   (a) Suponha a_n e b_n positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam s_N e t_N as N-ésimas somas parciais das séries $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$. Verifique:

   $$s_N t_N \;=\; (a_0 + \ldots + a_N)(b_0 + \ldots + b_N) \;\leq\; c_0 + c_1 + \ldots + c_{2N} \;\leq\; s_{2N} t_{2N}.$$

   Conclua que $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ (note que $c_p \geq 0\,,\ \forall p$).

   (b) Suponha $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam (p_n) e (q_n) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de a_n, $n \in \mathbb{N}$, e (P_m) e (Q_m) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de b_m, $m \in \mathbb{N}$. Portanto temos $a_n = p_n - q_n$ e $b_m = P_m - Q_m$. Então, desenvolvendo e aplicando (a) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m - \sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&\quad -\Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) + \Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n P_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n Q_m\Big) \\
&\quad - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n P_m\Big) + \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big[\sum_{n+m=p}\big(p_n P_m - p_n Q_m - q_n P_m + q_n Q_m\big)\Big] \ldots \,.
\end{aligned}
$$

(c) Desenvolva o caso em que $\sum^{+\infty} z_n$ e $\sum^{+\infty} w_m$ são séries complexas absolutamente convergentes.

Sugestões:

(1) Utilize as notações $z_n = a_n + ib_n$, com a_n e b_n em $\mathbb{R}$, e $w_m = c_m + id_m$ com c_m e d_m em $\mathbb{R}$.

(2) Devido às desigualdades

$$|a_n| \leq |z_n|\,,\ \ |b_n| \leq |z_n|\,,\ \ |c_m| \leq |w_m| \ \text{ e } \ |d_m| \leq |w_n|\,,$$

as séries $\sum^{+\infty} a_n$, $\sum^{+\infty} b_n$, $\sum^{+\infty} c_m$ e $\sum^{+\infty} d_m$ convergem absolutamente.

(4) Desenvolvendo e aplicando o item (b) escreva

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} z_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} w_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} a_n + i\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m + i\sum^{+\infty} d_m\Big) = \\
&= \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) \\
&\quad + i\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) + i\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} a_n c_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} b_n d_m\Big) \ldots \,.
\end{aligned}
$$

4. Mostre que

$$|\cos z|^2 + |\text{sen z}|^2 \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R} \; .$$

5. Prove o seguinte resultado sobre a Série Binomial Complexa:

   Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Então, é convergente a série

$$B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n} z^n \,, \text{ se } z \in D(0;1) \; .$$

   Ainda mais, é válida a identidade

$$B(z)^p \;=\; 1 + z \,, \quad \text{para todo } z \in D(0;1) \; .$$

   Sugestão: Utilize a existência da Série Binomial Complexa, enunciada em aula e provada nas notas de aula.

6. Enuncie e demonstre:

   (a) A Desigualdade de Gutzmer-Parseval para Séries de Potências.

   (b) O Princípio do Módulo Máximo para Funções Analíticas a partir da Desigualdade de Gutzmer Parseval para Séries de Potências.

7. O Teorema de de Liouville para funções do tipo $f(z) = \sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ – funções complexas inteiras representadas em todo o plano complexo pela sua série de Taylor na origem – a partir da Desigualdade de Gutzmer-Parseval.

8. Mostre que o Princípio do Módulo Máximo para Funções Analíticas é equivalente ao Princípio do Módulo Mínimo para Funções Analíticas.

9. (a) Enuncie o Teorema da Aplicação Aberta (TAA) para Funções Analíticas.

   (b) Mostre que o TAA para Funções Analíticas implica o Princípio do Módulo Mínimo para Funções Analíticas.

10. Mostre que o TAA para Funções Analíticas implica o Princípio do Módulo Máximo para Funções Analíticas.

11. Prove o TFA a partir do Teorema de Liouville para Funções Analíticas.

12. Demonstre o Teorema de Liouville Estendido em $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, utilizando a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para Séries de Potências.

13. Adapte a prova do TAA para Polinômios para produzir uma prova do TAA para Funções Analíticas.