DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS - UMA ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

4 LISTA DE EXERCÍCIOS

Para entregar: sete exercícios.
São obrigatórios: 1, 2, 7, 8 e 9. Escolha outros dois.

1. Mostre que o TAA p/ polinômios implica o TFA.

2. Demonstre a Propriedade Poligonal do Valor Médio Para Polinômios [Teorema de Kakutani-Nagamo (1935), Walsh (1936)].

Consideremos $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ um polinômio e $\omega = e^{i\pi/n}$. Dados z_0 e z arbitrários em $\mathbb{C}$ temos,

$$P(z_0) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} P(z_0 + z\omega^k) \ .$$

3. Determine o domínio de convergência da série e esboce o gráfico de f:

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

4. Determine o limite $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x \in X$, e mostre que a sequência (f_n) não converge uniformemente a f, nos casos abaixo.

(a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2x^2}$, $X = \mathbb{R}$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

(b) $\frac{n}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$. Dica: analise o que ocorre nos pontos $x_n = n$.

(c) $X = [0, 1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x\,, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 - x\,, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \ . \end{cases}$$

5. Mostre a convergência uniforme de (f_n) em $X \subset \mathbb{R}$ nos casos abaixo.

   (a) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^7}$, onde $X = \mathbb{R}$.

   (b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin x$, onde $X = [0, +\infty)$.

   (c) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, onde $X = \mathbb{R}$.

6. Determine o limite $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, onde $x \in [0,1]$, e mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \Big) dx , \qquad \text{supondo}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x , & 0 \le x \le \frac{1}{2^n} , \\ n^2(\frac{1}{n} - x) , & \frac{1}{2^n n} \le x \le \frac{1}{n} , \\ 0 , & \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \text{(esboce os gráficos).} \end{cases}$$

7. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.

   (a) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r]$, $0 < r < 1$.

8. Mostre que a função dada é contínua.

   (a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

9. Considere a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (z + \frac{1}{2})^k$. Verifique:

   (a) A série converge se $|z + \frac{1}{2}| < 1$.

   (b) Se as potências de $(z + \frac{1}{2})$ são expandidas e o resultado é então rearranjado como uma série em potências de z, então a nova série de potências não converge em $z = -1$.

   (c) Explique porque não valeu a Lei Associativa neste caso.