DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS - UMA ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

3 LISTA DE EXERCÍCIOS

Para entregar: escolha 8 exercícios

1. Suponha que a série $\sum^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. Mostre que também convergem absolutamente as séries

$$(a)\ \sum a_n^2 \qquad (b)\ \sum \frac{a_n}{1+a_n}\,,\ \text{se } a_n \neq -1\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad (c)\ \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}\ .$$

2. Mostre que converge condicionalmente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2} \right] .$$

3. Sejam $(a_i)_I$ e $(b_j)_J$ duas famílias somáveis (I e J enumeráveis). Mostre

$$\Big(\sum a_i \Big)\Big(\sum b_j \Big) = \sum a_i b_j\ .$$

4. Compute, para $|z| < 1$,

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots\ .$$

5. Seja $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$, com $m, n \in \{1, 2, \dots\}$. Mostre que não existe

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}\ .$$

Porém, existem

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} a_{mn}\,, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\ .$$

6. Roteiro para uma prova muito simples e muito fácil de que dadas $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$, duas series absolutamente convergentes, então o produto de Cauchy, $\sum^{+\infty} c_p$, com $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$, satisfaz $\sum^{+\infty} c_p = \alpha\beta$.

(a) Suponha a_n e b_n positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam s_N e t_N as N-ésimas somas parciais das séries $\sum^{+\infty} a_n = \alpha$ e $\sum^{+\infty} b_n = \beta$. Verifique:

$$s_N t_N \;=\; (a_0 + \ldots + a_N)(b_0 + \ldots + b_N) \;\leq\; c_0 + c_1 + \ldots + c_{2N} \;\leq\; s_{2N} t_{2N}.$$

Conclua que $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ (note que $c_p \geq 0\,,\ \forall p$).

(b) Suponha $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam (p_n) e (q_n) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de a_n, $n \in \mathbb{N}$, e (P_m) e (Q_m) as respectivas sequências das partes positivas e negativas de b_m, $m \in \mathbb{N}$. Portanto temos $a_n = p_n - q_n$ e $b_m = P_m - Q_m$. Então, desenvolvendo e aplicando (a) obtemos

$$\begin{aligned}
\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} b_m\Big) &= \Big(\sum^{+\infty} p_n - \sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m - \sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} p_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&\quad - \Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} P_m\Big) + \Big(\sum^{+\infty} q_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n P_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} p_n Q_m\Big) \\
&\quad - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n P_m\Big) + \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} q_n Q_m\Big) \\
&= \sum^{+\infty}\Big[\sum_{n+m=p}\big(p_n P_m - p_n Q_m - q_n P_m + q_n Q_m\big)\Big] \ldots\,.
\end{aligned}$$

(c) Desenvolva o caso em que $\sum^{+\infty} z_n$ e $\sum^{+\infty} w_m$ são séries complexas absolutamente convergentes.

Sugestões:

(1) Utilize as notações $z_n = a_n + ib_n$, com a_n e b_n em $\mathbb{R}$, e $w_m = c_m + id_m$ com c_m e d_m em $\mathbb{R}$.

(2) Devido às desigualdades

$$|a_n| \leq |z_n|\,,\ |b_n| \leq |z_n|\,,\ |c_m| \leq |w_m| \ \text{ e } \ |d_m| \leq |w_n|\,,$$

as séries $\sum^{+\infty} a_n$, $\sum^{+\infty} b_n$, $\sum^{+\infty} c_m$ e $\sum^{+\infty} d_m$ convergem absolutamente.

(3) Desenvolvendo e aplicando o item (b) escreva

$$\Big(\sum^{+\infty} z_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} w_m\Big) = \Big(\sum^{+\infty} a_n + i\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m + i\sum^{+\infty} d_m\Big) =$$

$$= \Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big) - \Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big)$$

$$+ i\Big(\sum^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} d_m\Big) + i\Big(\sum^{+\infty} b_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} c_m\Big)$$

$$= \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} a_n c_m\Big) - \sum^{+\infty}\Big(\sum_{n+m=p} b_n d_m\Big) \dots .$$

7. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, verifique a validade das definições de Euler para as funções trigonométricas:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad , \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ .$$

8. Enuncie e verifique a fórmula de Euler para o seno e o cosseno complexos.

9. Mostre que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   Sugestões:

   (1) Utilize a fórmula de Euler para o seno e o cosseno complexos.

   (2) Utilize as definições (por séries) das funções seno e cosseno complexas.

10. Verifique a fórmula, onde N é ímpar e $z, w \in \mathbb{C}$.

$$(z+w)^N = \sum_{2n+1+2m=N} \left[\binom{N}{2m} z^{2n+1} w^{2m} + \binom{N}{2n+1} z^{2m} w^{2n+1} \right] .$$

   Sugestões: (1) Teste o caso $N = 5$. (2) Troque a notação N ímpar por $2N+1$, se preferir.

11. Verifique a fórmula, para z e w arbitrários em $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w = \operatorname{sen}(z+w) \ .$$

   Sugestão: utilize as definiçoes (por séries) para as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ e o Exercício 8.