DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS - UMA ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Para entregar as questões numeradas em negrito:
Sobre o supremo e o infímo: 1, 3, 4 e 9.
Sobre sequências: 10, 11, 12, 17, e 18.
Continuidade e polinômios: 23 a 29 (todos essenciais).
Somatórios finitos: 30, 32, 33 e 34.
Séries infinitas: 35, 36, 37, 53 e 54.

1. Determine $\sup X$, $\inf X$, $\max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

a) $X =]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$; com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

b) $X =]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ ou $X =]a, +\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.

c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, com $X \subset Y$. Prove que

$$\inf\, Y \leq \inf\, X \leq \sup\, X \leq \sup\, Y\ .$$

3. Seja X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}$. Definamos o conjunto $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Verifique as afirmações:

(a) $X + Y$ é limitado

(b) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$

(c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

4. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios e arbitrários em $\mathbb{R}$. Então vale,

$$\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)\ ,$$

com a convenção $\sup X = +\infty$ se X não é majorado superiormente.

Atenção: este resultado é **essencial** no capítulo 6.

5. Sejam X e Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $x \leq y$, $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$. Mostre que:

   a) $\sup X \leq \inf Y$.

   b) $\sup X = \inf Y$ se e só se, $\forall \epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$. Sugestão: No ítem (b), use a Propriedade de Aproximação.

6. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Verifique que o conjunto $-X$ é limitado superiormente e que $\sup(-X) = -\inf X$.

7. Seja X um subconjunto não vazio e limitado em $\mathbb{R}$. Dado $c \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, mostre que o conjunto $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X \ .$$

   Enuncie e verifique o que ocorre se $c < 0$.

8. Sejam X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. Defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Mostre que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \quad \text{e} \quad \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y \ .$$

9. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

   (a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$

   (b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

   (c) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

   Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

   (d) $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$

   (e) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$.

10. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx\,, \alpha \geq 1$.

(d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

(e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$.

(f) $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

(g) $a_n = n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

(h) $a_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n)$.

11. Calcule:

$(a)\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

$(b)\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\ (x \in \mathbb{R})$

$(c)\quad \lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\ (x \in \mathbb{R})$

12. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$ é convergente a 2.

13. Suponha que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Verifique que:

$(a)\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+.....+a_n}{n} = a\ .$

$(b)\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 ......a_n} = a\,,\qquad \text{se } a>0 \text{ e } a_n>0\,, \forall n\in\mathbb{N}\,.$

Sugestão: Em (b) utilize (a).

14. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

$(a)\quad a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}}{n}$

$(b)\quad a_n = \dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+......+\sqrt[n]{2}}{n}\ .$

Sugestão: Utilize o exercício 13.

15. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $a_n = \frac{1}{(n\log^2 n)^p}$ $, n \geq 2\,, p\in\mathbb{R}$.

16. Sejam $a>0$ e $b>0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b)\ .$$

17. Calcule os limites da razão, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raíz, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$, ou pelo menos um deles, em cada um dos casos abaixo.

$(a)\quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$(b)\quad a_n = n$

$(c)\quad a_n = \dfrac{1}{n^p}\ , p\in\mathbb{R}\,,$

$(d)\quad a_n = \dfrac{1}{(\ln\, n)^p}\ .$

18. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}\,, a_n > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L\ .$$

Retorne ao exercício 17 e, se necessário, complete-o.

19. Mostre que se $\lim z_n = 0$ e (w_n) é limitada então, $\lim z_n w_n = 0$.

20. Mostre que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (parte do Teorema 3.11).

21. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ se e somente se X é um subconjunto conexo de $\mathbb{C}$.

22. Mostre, a partir da definição, que o intervalo $[0,1]$ é compacto.

    Sugestão: Seja $\mathcal{C} = \{O_j : j \in J\}$ uma coleção de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $[0,1] \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Considere o conjunto

    $$A = \{\ x \in [0,1] :\ [0,x] \text{ é uma união finita de abertos na cobertura } \mathcal{C}\ \}\ .$$

    Mostre que A é não vazio e limitado superiormente, $\sup A = 1$ e $\sup A \in A$.

23. Prove que todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raíz real.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma função contínua e positiva. Suponha ainda que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Mostre que f assume um valor mínimo absoluto; i.e., existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \, , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

25. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio complexo, $n \geq 1$. Mostre:

(a) $|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |a_1||z| - |a_0|, \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$.

(c) Existe um raio $R > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)| + 1$ se $|z| > R$.

(d) A função $|p(z)|$, com $z \in \overline{D}(0; R)$, tem valor mínimo num ponto z_0.

(e) O ponto z_0 é o ponto de mínimo absoluto da função $|p(z)|$, $z \in \mathbb{C}$.

26. O Teorema da Aplicação Aberta (TAA) para polinômios implica o Princípio do Módulo Mínimo para polinômios.

27. O TAA para polinômios implica o TFA.

28. O TAA para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios

29. A Desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios implica o Princípio do Módulo Máximo para polinômios.

Atenção: Tal prova prescinde da continuidade polinomial.

30. Mostre que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e quaisquer que sejam $n, N \in \mathbb{N}$, com $N \geq n$, temos

$$\sum_{j=n}^{N} z^j = \frac{z^n - z^{n+N+1}}{1-z} \ .$$

31. Verifique as fórmulas abaixo.

(a) $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

32. Mostre que $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} z_j w_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_k = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{m} w_k\right)$.

33. Verifique a Propriedade Telescópica:

$$\sum_{k=m}^{n} \left(z_{k+1} - z_k\right) = z_{n+1} - z_m.$$

34. Calcule, aplicando a propriedade telescópica,

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} [\ (k+1)^3 - k^3\ ]$.

(b) $\sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)}$

(c) $\sum\limits_{j=100}^{500} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$

Sugestão para (c): verique que $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}\right)$

35. Calcule a soma da série dada.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \pi^{-k}$.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

(d) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$.

36. Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n\ ,\ \ 0 < x < 1\ .$$

37. Determine a convergência ou divergência das séries (v. Guidorizzi, Vol. 4).

(a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

(b) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \log(k)}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^4}$

(d) $\sum\limits_{p=4}^{+\infty} \log \frac{2p}{p+1}$

(e) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \frac{n^2-3n+1}{n^2+4}$.

38. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{4k^3-k+10}$.

(b) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$.

(c) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}{k^2+7k+11}$.

(d) $\sum\limits_{k=20}^{+\infty} \frac{2^k}{k^5}$.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$

(f) $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^{10}}$

(g) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$.

39. Determine se convergem ou não as séries abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$.

(d) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{n^3+4}{2^n}$

40. Seja $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$. Mostre que

$$\text{se } \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|}\right) \in (-\infty, +\infty) \quad \text{então} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|} = 1 \ .$$

41. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

(a) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$, $\alpha > 0$.

(b) $\sum\limits_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$, $\alpha > 1$

(c) $\sum\limits_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n [\log(\log n)]^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

(d) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$

(e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$, $\alpha > 0$.

42. Dadas as séries $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$ e $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, seja a_n o termo geral de cada uma delas. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ (Teste da razão).

   (b) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = 1$ (Critério de Raabe).

   (c) A primeira diverge e a segunda converge.

43. Determine os valores de $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que são convergentes as séries:

   (a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$

   (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$.

44. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Consideremos a sequência $(|a_n|)$, $n \geq 1$, dos coeficientes binomiais $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim a_n = 0$ e $(|a_n|)_{n\geq n_0}$, $n_0 > \alpha$, decresce.

   (b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim a_n \neq 0$.

   (c) Se $\alpha < -1$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ diverge.

45. Seja $0 < \alpha < 1$. Então,

   (a) A série (não alternada) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é convergente.

   (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ é alternada e convergente.

46. Se $-1 < \alpha < 0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ converge condicionalmente.

47. Mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, satisfaz,

   (a) Diverge, se $|x| > 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

   (b) Converge absolutamente, se $|x| < 1$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

   (c) Se $\alpha > 0$, converge (absolutamente) se somente se $x \in [-1, 1]$.

   (d) Se $-1 < \alpha < 0$, converge se somente se $x \in (-1, 1]$ e converge condicionalmente se $x = 1$.

   (e) Se $\alpha \leq -1$, converge se e somente se $x \in (-1, 1)$.

48. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

49. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n+n^2}{n^4}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n^2})$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$

(d) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+3n+1}}{n^3(\log n)^2}$

(e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3}-1\right)$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$.

50. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^n$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n\frac{n!}{n^n}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3.5.7.....(2n+1)}$

51. Determine se é convergente ou divergente a série dada abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum\limits_{n\geq p}^{+\infty} \frac{n^{n-p}}{n!}$, com p fixo em $\mathbb{N}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.....(2n+1)}{4.6.8......(2n+4)}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6....(2n)}}$.

52. Nos exercícios abaixo determine se a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ é convergente ou divergente. No caso de convergência, verifique se a convergência é absoluta ou condicional.

(a) $a_n = \frac{\sin(2n+1)}{n^{20}}$

(b) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n-3}{10n+4}$

(c) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\log n}$

(d) $a_n = (-1)^n\frac{\log n}{n}$

(e) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n+e^{-n})}$.

53. Determine $z \in \mathbb{C}$ para que a série dada seja convergente:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n z^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

(c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

(e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{\log n}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)z^n}{n!}$.

54. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad \text{com } z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}.$$

Determine um disco aberto centrado na origem $D(0;r)$, $r > 0$, sobre o qual f pode ser expressa como uma soma de duas séries geométricas convergentes. Sugestão: encontre $A \in \mathbb{C}$ e $B \in \mathbb{C}$ tais que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}, \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}\ .$$