DIFUSÃO CULTURAL
FUNÇÕES ANALÍTICAS - UMA ABORDAGEM WEIERSTRASSIANA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - USP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Verão de 2012

1 LISTA DE EXERCÍCIOS

Para entregar (as questões solicitadas estão marcadas em negrito):
10 entre: 1 a 4, 7, 8, 10 a 12, 14, 18 e 19, 24, 27 a 34, 36, 44, 46
4 entre (questões de vestibulares): 56, 59 a 61, 63, 68, 70 a 77.
Todos desde 78 até 88

1. (Fórmula Binomial) Mostre que dados $z, w \in \mathbb{C}$ então

$$(z+w)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} z^p\, w^{n-p},\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

Sugestão: Por indução. Lembrete: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p = 0, 1, ..., n$.

2. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

(a) $(4-i)+i-(6+3i)i$ $\quad(b)$ $\dfrac{5}{-3+4i}$ $\quad(c)$ $\dfrac{3-i}{4+5i}$.

(d) $(1{+}2i)^3$ $\quad(e)$ $(3{+}2i)(\overline{1-4i})$ $\quad(f)$ $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$

(g) $\overline{(4-i)}{\cdot}\overline{(1-4i)}$ $\quad(h)$ $(7{+}4i)(2{-}3i){+}(6{-}i\sqrt{2})(\sqrt{2}{+}i\sqrt{5})$.

3. Se $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, determine as partes real e imaginária de:

(a) z^4 $\quad(b)$ $\dfrac{1}{z}$ $\quad(c)$ $\dfrac{z-1}{z+1}$ $\quad(d)$ $\dfrac{1}{z^2}$.

4. Mostre que $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ e $\left(\frac{\pm 1 i\pm\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1$.

5. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Considere $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que a função

$$\varphi : a + ib = z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

é isomorfismo de corpos. Isto é, φ é bijetora

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w) \qquad\qquad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w) \quad .$$

Dizemos que φ é uma bijeção que preserva adição e multiplicação.

6. Compute $|z|$ nos seguintes casos:

   $(a)\quad z = -2i(3+i)(2+4i)(1+i) \qquad\qquad (b)\quad z = \dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

7. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ mostre que:

   (a) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$

   (b) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$

   (c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (lei do paralelogramo)

   Sugestão: $|z \pm w|^2 = (z \pm w)\overline{(z \pm w)} = (z \pm w)(\overline{z} \pm \overline{w}) = ...$ etc.

8. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas sequências de n números complexos $(z_k)_{1\le k\le n}$ e $(w_k)_{1\le k\le n}$, prove:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \Big|^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \Big) .$$

   Sugestão: Faça primeiro o caso $n = 2$ (o caso $n = 1$ é trivial).

9. (A desigualdade de Cauchy) Dadas duas sequências de m números complexos $(a_k)_{1\le k\le n}$ e $(b_k)_{1\le k\le n}$, prove a desigualdade

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \Big) .$$

   Sugestão: Aplique o Exercício 8 com $z_k = |a_k|$ e $w_k = |b_k|$, $1 \le k \le n$.

10. Calcule i^2, i^3, i^4, i^5. Mostre que se $m \in \mathbb{N}^*$ e q e r são o quociente e o resto da divisão inteira de m por 4 (isto é, $m = 4q + r, \quad 0 \le r \le 3$), então $i^m = i^r$. Compute também:

   (a) i^{20} $\quad (b)$ i^{1041} $\quad (c)$ i^{72} $\quad (d)$ $(1+i)^{12}$ $\quad (e)$ $1+i+i^2+...+i^{2011}$.

11. Determine z sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

12. Desenhe a região do plano determinada por

   (a) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| \le 1$ $\quad (b)$ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 0$ $\quad (c)$ $|z+1| = 2|z|$.

13. Se $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ calcule:

   (a) z^6 $\quad (b)$ $1 + z + z^2 + ... + z^{47}$.

14. Determine e represente graficamente:

   (a) as raízes quadradas de 1.

   (b) as raízes cúbicas de 1.

   (c) as raízes quartas de 1.

15. Ache todos os valores de:

   (a) $(2+2i)^{3/2}$ $\quad (b)$ $(-1+i\sqrt{3})^{1/3}$ $\quad (c)$ $(-1)^{-3/4}$.

16. Sob que condições se tem $|z + w| = |z - w|$? Interprete geometricamente.

17. Sendo $m \in \mathbb{Z}$, que valores pode ter $i^m + i^{-m}$?

18. Determine os valores máximo e mínimo de:

   (a) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|$, onde $|z| = 3$ $\quad (b)$ $|z+i|$, onde $|z-2| = 1$.

19. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = 1$ ou $|w| = 1$. Mostre que $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$.

20. Determine os valores $a \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{a+i}{1+ai} \in \mathbb{R}$.

21. Determine os valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{2+\alpha i}{1+i}$ é imaginário puro.

22. Mostre que $|z| = 1$ se e só se $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

23. Se $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

24. Sendo $a \in \mathbb{R}$, determine $\left|\frac{1-ai}{1+ai}\right|$.

25. Escreva a expressão abaixo na forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

    (a) $(7+4i)(2-3i) + (6-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{5})$

    (b) $(3+2i)\overline{(2-3i)}$.

26. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^m = 1$ e $z \neq 1$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$.

    (a) $1 + z + z^2 + ... + z^{m-1} = 0$

    (b) $1 + z^p + z^{2p} + ...z^{(m-1)p} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$ tal que $\text{mdc}(m,p) = 1$. Sugestão: Teorema de Bézout: existem $r\,, s \in \mathbb{Z}$ tais que $rm + sp = 1$.

    (c) Se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + ... + z^m = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

27. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1-i) = 3+2i$. Compute $p(1+i)$.

28. Sejam a, b e c as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

    $(A) \quad \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ $\qquad\qquad (B) \quad a^2 + b^2 + c^2$.

29. Sabendo que $1-i$ é raíz de $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2 = 0$, ache todas as raízes da equação.

30. Determine a e b tais que $p(z) = z^4 - 10z^3 + az^2 - 50z + b$ seja um quadrado perfeito.

31. Determine k tal que a divisão de $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$ por $z^3 - 5 - 4z$ seja exata.

32. Seja $p \in \mathbb{C}[z]$, com $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j z^{m-j}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. Supondo que os zeros de p estão em uma p.a. determine estes zeros.

33. Prove e interprete geometricamente a chamada "Lei do Paralelogramo":

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2\,, \ \forall z\,, w \in \mathbb{C}\ .$$

34. Desenhe a região do plano determinado pelas relações:

(a) $\operatorname{Re}(z) = 1$ $\quad$ (b) $\operatorname{Im}(z) = -1$ $\quad$ (c) $1 \le \operatorname{Im}(z) < 3$.

(d) $-1 < \operatorname{Re}(z) \le 2$ $\quad$ (e) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ $\quad$ (f) $\operatorname{Re}(z^2) = 1$.

35. (a) Mostre que $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{z}{|z|^2}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}^*$.

(b) Utilize (a) e a observação "$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w}$" para desenhar o conjunto,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

36. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$ e $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(A) Desenhe os subconjuntos:

(1) $\{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$, com a condição $2a > |z_1 - z_2|$.

(2) $\{z : |z - z_1| - |z - z_2| = 2a\}$, com a condição $2a < |z_1 - z_2|$.

(3) $\{z : |z - z_1| = a\}$.

(B Apresente as equações cartesianas (simplificadas) dos subconjuntos acima.

37. Dado $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, desenhe o conjunto $P := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z - z_1|}{\operatorname{Im}(z)} = 1 \right\}$.

38. Dados z_1 e z_2 e a como no Exercício 36 considere o conjunto

$$X := \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z - z_1| + |z - z_2| \le r\}\,, \text{ onde } r = 2a\ .$$

(a) Mostre que se $r = |z_1 - z_2|$, X é um segmento fechado e determine X.

(b) Desenhe o conjunto X nos casos $r > |z_1 - z_2|$ e $r < |z_1 - z_2|$.

(c) Como ficam as questões (a) e (b) acima (e suas respostas) se trocarmos na definição de X o símbolo $\le$ por $<$?

39. Compute

$$\frac{(\alpha+i)^4 + \alpha i(1+i)}{(1+i)^4+3i},$$

onde α é a determinação de $\sqrt[3]{-8i}$ cujo afixo pertence ao quarto (4) quadrante.

40. Dado $m \in \mathbb{N}^*$, calcule o produto de todas as determinações de

$$I := \Big(\sum_{k=0}^{m} i^k\Big)^{\frac{1}{m}} .$$

Discuta o resultado segundo m.

41. Fixada a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e utilizando o isomorfismo $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ definido no Exercício 5, mostre que um número complexo z é identificado com o produto da matriz que representa a homotetia de coeficiente $|z|$ sobre $\mathbb{R}^2$,

$$T_{|z|} = \begin{bmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{bmatrix} = |z| I \ , \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pela matriz representante da rotação pelo ângulo θ no sentido anti-horário.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z) \ .$$

Isto é,

$$z \equiv T_{|z|} \circ R_\theta = |z| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \arg(z) \ .$$

42. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Verifique:

a) Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\{z : z^m = 1\} = \{1, w, w^2, ..., w^{m-1}\}$. Dizemos que w é um gerador do conjunto das m raízes m-ésimas da unidade.

b) Se z_1 é uma raiz m-ésima qualquer de $z \in \mathbb{C}^*$ e w é como no ítem (a) então $\{z_1, z_1 w, ..., z_1 w^{m-1}\}$ é o conjunto das m raízes m-ésimas de z.

c) O complexo w no ítem (a) não é único.

43. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

44. Resolva os sistemas lineares em z e w:

$$a)\quad \begin{cases} z + iw &= 1 \\ iz + w &= 2i - 1 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad \begin{cases} iz + (1+i)w &= 1 \\ (1+i)\overline{z} - (6+i)\overline{w} &= -4 - 8i\ . \end{cases}$$

45. Resolva as equações:

$$(a)\ x^6 + ix^3 = 0 \qquad (b)\ x^{10} + 64x^2 = 0 \qquad (c)\ 2x^6 + \frac{i}{2}x^2 = 0 \qquad (d)\ x^6 + 3x^3 + 2 = 0\ .$$

46. Dados $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, prove que as raízes da equação em z,

$$(z - b_1)^m + a(z - b_2)^m = 0$$

estão sobre uma circunferência ou uma reta e resolva a equação.

47. (A) Determine a relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ para que sejam todas reais as raízes de

$$(*) \qquad \left(\frac{i - z}{i + z}\right)^m = a + ib \qquad (m \in \mathbb{N}^*)\ .$$

(B) Supondo verificada a relação encontrada em (A), resolva a equação (*) admitindo conhecido o argumento θ do número complexo $a + bi$.

48. (A) Mostre que são reais todas as raízes da equação

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^m = \frac{1 + ai}{1 - ai}\ , \quad (a \in \mathbb{R}\,, m \in \mathbb{N}^*)\ .$$

(B) Compute as raízes da equação no item acima no caso $a = 1$ e $m = 3$.

49. Compute as somas (supondo $a\,, r \in \mathbb{R}$):

$$C_m := \sum_{n=0}^{m-1} \cos(a + rn) \qquad \text{e} \qquad S_m := \sum_{n=0}^{m-1} \sin(a + rn)\,,$$

(A) Multiplicando as dadas expressões por $2\sin\left(\frac{r}{2}\right)$.

(B) Considerando o número complexo $C_m + iS_m$.

50* Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, com $|z| \le 1$, $|w| \le 1$ e $z + w = 1$. Mostre que $|z + w^2| \le 1$.

51. Dados $a \in (0, +\infty)$, $c \in [0, +\infty)$ e $b \in \mathbb{C}$ mostre que a equação

$$az\overline{z} + bz + \overline{bz} + c = 0\,,$$

representa uma circunferência se $ac < b\overline{b}$.

52. Mostre que a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ pode ser escrita na forma

$$z^2 + \overline{z}^2 = 2\ .$$

53. (FUVEST 2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$.

54. (ITA 2007) Considere a equação:

$$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4\ .$$

Sendo $x \in \mathbb{R}$, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é:

A ( ) 3 B ( ) 6 C ( ) 9 D ( ) 12 E ( ) 15 .

55. (ITA 2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo:

$$\frac{1}{1 + i\,\mathrm{cotan} x}\ ,\ x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

A ( ) $|\cos x|$ B ( ) $\dfrac{1+\mathrm{sen} x}{2}$ C ( ) $\cos^2 x$ D ( ) $|\mathrm{cossec} x|$ E ( ) $|\mathrm{sen} x|$.

56. (ITA 2007) Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

A ( ) 9 B ( ) 7 C ( ) 5 D ( ) 3 E ( ) 1 .

57. (ITA 2007) Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\overline{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\overline{z}+2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z - 2i| \leq 1\ .$$

58. (ITA 2008) Sejam α e β em $\mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então, $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

A ( ) 2 $\quad$ B ( ) 0 $\quad$ C ( ) 1 $\quad$ D ( ) 2 $\quad$ E ( ) $2i$.

59. (ITA 2008) Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ também é sua raíz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

A ( ) -1 $\quad$ B ( ) 1 $\quad$ C ( ) 2 $\quad$ D ( ) 3 $\quad$ E ( ) 4 .

60. (ITA 2008) Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \; 1 < |z + 2| < 3\} \; .$$

61. (FUVEST 2008 - questão adaptada) Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss o número

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \; .$$

Ainda mais,

(a) Determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3 .

(b) Represente $\frac{1}{\omega}$ e ω^3 na figura já esboçada.

(c) Determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

62. (ITA 2009) Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \text{sen}\frac{\pi}{5}$, então, $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A ( ) $a + bi$ $\quad$ B ( ) $-a + bi$ $\quad$ C ( ) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.

D ( ) $a - bi$ $\quad$ E ( ) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

63. (ITA 2009) Suponha que os coeficientes reais a e b da equação algébrica $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a mesma tem solução não real r, com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.

II. As raízes podem ser duplas.

III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) só I. B ( ) só II. C ( ) só III. D ( ) apenas II e III. E ( ) nenhuma.

64. (ITA 2009) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C} .$$

Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathrm{Re}w \ \leq \ -13 \ \text{ e } \ \mathrm{Im}w \ \leq \ 4 \ \}.$$

65. (ITA 2009) Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} \ + \ \sum_{n=1}^{10} a_n x^n \ + \ a_0 \ = \ 0$$

tenha coeficientes reais $a_0, ..., a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os γ_n, $n = 1, 2, ..., 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.

II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

66. (ITA 2010) Se z é uma solução de equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \overline{z} + |z|^2 = -\left[(\sqrt{2}+i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que

A ( ) $i(z-\overline{z}) < 0$ B ( ) $i(z-\overline{z}) > 0$ C ( ) $|z| \in [5,6]$

D ( ) $|z| \in [6,7]$ E ( ) $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| > 8$.

67. (ITA 2010) Os argumentos principais ds soluções da equação em z,

$$iz + 3\overline{z} + (z+\overline{z})^2 - i = 0$$

pertencem a

A ( ) $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ B ( ) $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[$ C ( ) $\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

D ( ) $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right[$ E ( ) $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

68. (ITA 2010) Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, onde $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro das raízes são imaginária puras.

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.

III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I B ( ) II C ( ) III D ( ) I e III E ( ) II e III.

69. (ITA 2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, para $n = 1, 2, ..., 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \in \mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \leq 4(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}), \ \forall x \in [-1,1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é(são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I B ( ) II C ( ) III D ( ) I e II E ( ) II e III.

70. (ITA 2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais. sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p então $-r$ também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade ds afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raíz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0 < 0$.

71. (ITA 2011) Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ então, $\sum\limits_{n=1}^{n=89} z^n$ é igual a

A ( ) $-\dfrac{89}{2}\sqrt{3}i$ B ( ) -1 C ( ) 0 D ( ) 1 E ( ) $\dfrac{89}{6}\sqrt{3}i$.

72. (ITA 2011 - questão alterada) Das afirmações abaixo sobre os números complexos z_1 e z_2:

I. $|z_1 - z_2| \leq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

II. $|\overline{z_1} z_2| = \big||\overline{z_1}|.|\overline{z_2}|\big|$.

III. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\text{sen}\theta)$.

Temos que é (são) sempre verdadeira(s):

A ( ) apenas I B ( ) apenas II C ( ) apenas III

D ( ) apenas II e III E ( ) todas .

73. (ITA 2011) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$:

$$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$$

é igual a

A ( ) 2 B ( ) $\dfrac{i}{2}$ C ( ) 0 D ( ) $-\dfrac{1}{2}$ E ( ) $-2i$.

74. (ITA 2011) Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes da equação algébrica $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_j - z_k|$, onde $1 \leq j, k \leq n$, e $j \neq k$ (i.e., j e k distintos).

75. (ITA 2012) Sejam $z = n^2(\cos 45^o + i\text{sen}45^o)$ e $w = n(\cos 15^o + i\text{sen}15^o)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

A ( ) $\sqrt{3}+i$ B ( ) $2(\sqrt{3}+i)$ C ( ) $2(\sqrt{2}+i)$ D ( ) $2(\sqrt{2}-i)$ E ( ) $2(\sqrt{3}-i)$.

76. (ITA 2012) Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é:

A ( ) $-\dfrac{\pi}{2}$ B ( ) $\dfrac{\pi}{4}$ C ( ) $\dfrac{\pi}{2}$ D ( ) $\dfrac{3\pi}{4}$ E ( ) $\dfrac{7\pi}{4}$.

77. (ITA 2012) Considere um polinomio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ sao duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

A ( ) $5(5-2\sqrt{3})$ B ( ) $15(5-2\sqrt{3})$ C ( ) $30(5-2\sqrt{3})$

D ( ) $45(5-2\sqrt{3})$ E ( ) $50(5-2\sqrt{3})$.

78. Sejam $z_1, ..., z_n$ arbitrários em $\mathbb{C}$. Mostre que

$$(A) \qquad |z_1 + ... + z_n| \;\geq\; |z_1| - |z_2| - ... - |z_n| \;\; .$$

$$(B) \qquad |z_1 + ... + z_n|^2 = \left(|z_1|^2 + ... + |z_n|^2\right) \;+\; 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathrm{Re}[z_j \overline{z_k}] \;.$$

79. Seja $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com a e b arbitrários em $\mathbb{R}$. Definamos a função $|\,.\,|_1 : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}$ por,

$$|z|_1 = |a| + |b| \;.$$

Mostre que:

- $|z|_1 \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e $|z|_1 = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
- $|\lambda z|_1 = |\lambda|\,|z|_1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $|z + w|_1 \leq |z|_1 + |w|_1$, $\forall z\,, w \in \mathbb{C}$.

Dizemos que $|\,.\,|_1$ é uma **norma** sobre $\mathbb{C}$.

80. Sejam a, b, c e d quatro números reais.

(A) Mostre que

- $$(|a| + |b|)^2(|c| + |d|)^2 \;\leq\; 4[\,|ac - bd| \;+\; |ad + bc|\,]^2$$
- $$|ac - bd| \;+\; |ad + bc| \;\leq\; (|a| + |b|)(|c| + |d|) \;.$$

(B) Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$. Mostre que

- $|\overline{z}|_1 = |z|_1$
- $\dfrac{|z|_1 |w|_1}{2} \leq |zw|_1 \;\leq |z|_1\,|w|_1$.

(C) Mantendo a notação, seja $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ a norma usual. Mostre:

$$|z| \;\leq\; |z|_1 \;\leq \sqrt{2}|z| \;.$$

Dizemos que $|\,.\,|_1$ e $|\,.\,|$ são **normas equivalentes** sobre $\mathbb{C}$.

81. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$. Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, ..., b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^n \ , \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

82. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$, com grau$(p) = n$ (i.e., $a_n \neq 0$). Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Considere a função $P(z) = p(z + z_0)$.

(A) Mostre que P é um polinômio.

(B) Mostre que P e p tem mesmo grau e mesmo coeficiente dominante: a_n.

(C) Mostre que o termo independente de P é $p(z_0)$.

83. (Raízes Quadradas) Determine (elementarmente; i.e. não utilize Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler ou Forma Polar) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^2 = a + ib \, , \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Dica: Determine as partes real e imaginária de z e uma fórmula para z.

84. Seja $z = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^2$ e k um número natural par, $k \geq 2$. Mostre, diretamente,

(Estermann 1956) $$\text{Re}[z^k] < 0 < \text{Im}[z^k] \, .$$

Atenção: A desigualdade acima é também válida se k é ímpar.

85. A **derivada (formal)** de um polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \dots + a_1 \ .$$

Mostre que:

(A) α é **raíz simples** de p se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

(B) α é **raíz dupla** de p se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

(C) α é **raíz de multiplicidade** k $(k \leq n)$ de p se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0 \ .$$

86. (**Fórmula de Taylor**) Mostre que um polinômio de grau n pode ser escrito:

$$p(X) = p(\alpha) + p'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n \ .$$

87. Um número α é algébrico se temos $p(\alpha) = 0$, para algum polinômio p com coeficientes inteiros. Mostre que são algébricos os numeros:

$$(A) \ \sqrt{2} \qquad\qquad (B) \ \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3} \ .$$

88. Sejam $(z_j)_{1 \leq j \leq n}$ e $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ sequências finitas em $\mathbb{C}$. Prove a **Identidade de Lagrange**:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j} \right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j w_k - z_k w_j|^2 \ .$$

Deduza então, a desigualdade de Cauchy (vide Exercícios 1.8 e 1.9).