MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira`   oliveira@ime.usp.br

Capítulo 8 - Teorema de Cauchy Homotópico e Logaritmo

8.1 - O Teorema de Cauchy Homotópico, se f tem primitiva em bolas.

8.2 - Logaritmo de uma Função.

8.3 - A Função Logaritmo.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

8.1 - O Teorema de Cauchy Homotópico, se f tem Primitiva em Bolas

Como se hábito, Ω indica um aberto. Nesta seção, todas as curvas são contínuas em um aberto Ω.

Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, uma função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma primitiva de f se temos

$$F' = f.$$

Nesta seção estudamos funções holomorfas (i.e., deriváveis) que admitem uma primitiva em cada bola contida em Ω [no Capítulo 10 - Integração Complexa - veremos que toda função holomorfa possui tal propriedade] e curvas contínuas em Ω.

É claro que toda f analítica em Ω tem uma primitiva em cada bola em Ω.

O trivial resultado a seguir, para funções holomorfas arbitrárias, é fundamental. Notemos que a prova difere bastante da correspondente prova que já mostramos para funções analíticas.

8.1 Proposição. *Seja f em $\mathcal{H}(\Omega)$, com Ω conexo. Se $f' \equiv 0$ então f é constante. Ainda, duas primitivas de f (se existirem) diferem por uma constante.*

Prova.

Pondo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $z = x + iy$ em Ω, sabemos que

$$F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

é diferenciável num aberto conexo O de $\mathbb{R}^2$ e tem diferencial nulo. Logo, u e v são $\mathbb{R}$-diferenciáveis em O e tem gradiente nulo. Pelo teorema do valor médio, em $\mathbb{R}^2$, concluímos que u e v são constantes. A conclusão é trivial♣

A seguir, consideremos uma função holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$, admitindo primitiva em bolas abertas, e uma curva contínua $\gamma : [a,b] \to \Omega$.

Seja $3r > 0$ a distância do compacto Imagem(γ) ao fechado $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Como γ é uniformemente contínua, segue que existe uma partição $\{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ satisfazendo $|\gamma(t) - \gamma(s)| \le r$, para todos t e s em $[a_{k-1}, a_k]$ e $k = 1, \ldots, n$. Então, temos (Vide Figura 8.1)

$$\gamma([a_{k-1}, a_k]) \subset A_k = B\big(\gamma(a_k); 2r\big) \subset \Omega \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

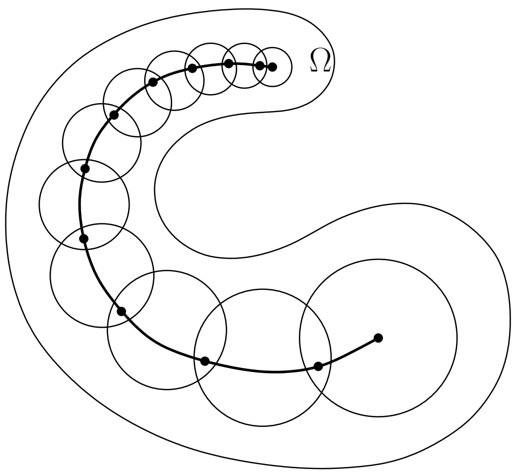

Figura 8.1:

Seja $g_k : A_k \to \mathbb{C}$ uma primitiva local de f, para cada $k = 1, \ldots, n$.

8.2 Definição. A "integral discreta" de f ao longo da curva contínua γ *é a soma*

$$\sum(f;\gamma) = \sum_{k=1}^{n}[g_k(\gamma(a_k)) - g_k(\gamma(a_{k-1}))]. \tag{8.2.1}$$

Na próxima proposição provaremos que tal definição é bem posta.

No Capítulo 10 - Integração - veremos que o somatório (8.2.1) estende a definição de integral de f sobre γ, se γ é de classe C^1 por partes.

A utilização das aspas em "integral discreta" justifica-se pois tal somatório não envolve aproximações.

8.3 Proposição. *O valor do somatório* (8.2.1) *independe das escolhas das partições, das bolas abertas e das primitivas, sujeitas às condições especificadas.*

Prova.

Mantenhamos as notações acima.

Seja $\{a = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = b\}$ uma partição, com $\gamma([b_{k-1}, b_k]) \subset B_k$ e B_k uma bola aberta em Ω, e $h_k : B_k \to \mathbb{C}$ primitiva local de f, para $k = 1, \ldots, m$.

Seja $\{a = c_0 < \cdots < c_p = b\}$ formada por $\{a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m\}$, com $\gamma([c_{k-1}, c_k])$ na bola C_k em Ω e $F_k : C_k \to \mathbb{C}$ primitiva local de f, para cada $k = 1, \ldots, p$.

Temos

$$[a_0, a_1] = [c_0, c_1] \cup \cdots \cup [c_{p_1-1}, c_{p_1}] \text{ para algum } p_1 \text{ em } \{1, \ldots, p\}.$$

Logo,

$$g_1(\gamma(a_1)) - g_1(\gamma(a_0)) = \sum_{k=1}^{p_1}\big[g_1(\gamma(c_k)) - g_1(\gamma(c_{k-1}))\big].$$

Dado k em $\{1, \ldots, p_1\}$, temos $\gamma([c_{k-1}, c_k])$ contido no aberto conexo $A_1 \cap C_k$. Portanto, em $A_1 \cap C_k$ as funções g_1 e F_k diferem por uma constante. Donde segue

$$\sum_{k=1}^{p_1}\big[g_1(\gamma(c_k)) - g_1(\gamma(c_{k-1}))\big] = \sum_{k=1}^{p_1}\big[F_k(\gamma(c_k)) - F_k(\gamma(c_{k-1}))\big].$$

Repetindo a argumentação para $g_2, \ldots, g_n$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{n}\big[g_k(\gamma(a_k)) - g_1(\gamma(a_{k-1}))\big] = \sum_{k=1}^{p}\big[F_k(\gamma(c_k)) - F_k(\gamma(c_{k-1}))\big] \clubsuit$$

É trivial ver que a definição (8.2) independe da particular parametrização da curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ (se o sentido de γ é mantido). De fato, se $\xi : [c,d] \to [a,b]$ é contínua, com $\xi(c) = a$ e $\xi(d) = b$, considerando c_k tal que $\xi(c_k) = a_k$, para cada $k = 1, \ldots, n$, então temos

$$\sum(f;\gamma) = \sum(f;\gamma \circ \xi).$$

Dadas $\eta : [b,c] \to \Omega$ e a curva reversa $\gamma^- : [a,b] \to \Omega$, temos

$$\sum(f;\gamma \vee \eta) = \sum(f;\gamma) + \sum(f;\eta) \quad \text{e} \quad \sum(f;\gamma^-) = -\sum(f;\gamma).$$

8.4 Definição. *Consideremos duas curvas contínuas*

$$\gamma : [a,b] \to \Omega \quad e \quad \eta : [a,b] \to \Omega.$$

Dizemos que γ e η são próximas *se existe uma partição $\{a = a_0 < \cdots < a_n = b\}$ e bolas abertas $B_1, \ldots, B_n$ em Ω tais que*

$$\gamma\big([a_{k-1}, a_k]\big) \bigcup \eta\big([a_{k-1}, a_k]\big) \subset B_k, \ \textit{para todo } k = 1, \ldots, n.$$

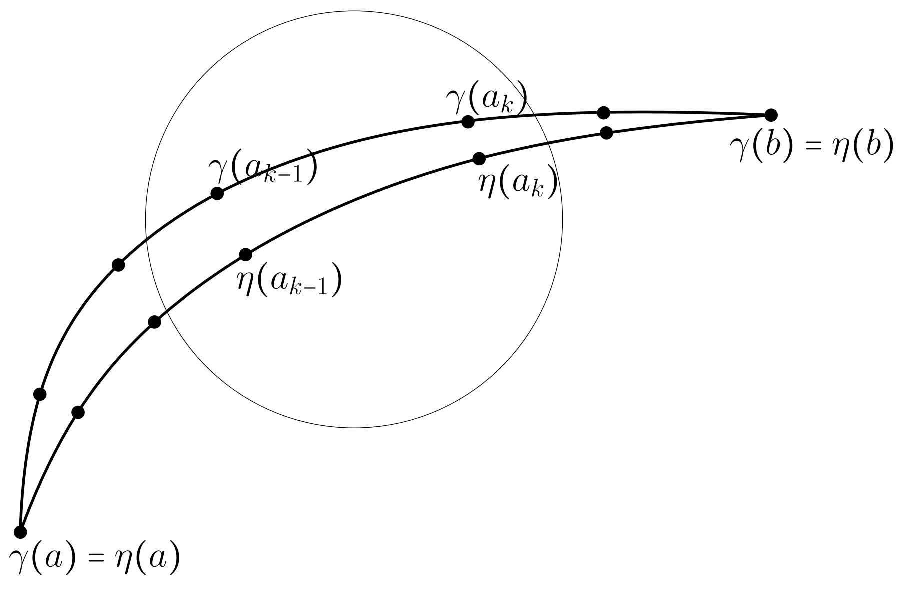

Figura 8.2: Curvas próximas (com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final)

8.5 Lema. *Sejam $\gamma, \eta : [a,b] \to \Omega$ curvas próximas e f uma função holomorfa com primitiva em cada bola aberta em Ω. Suponhamos que ao menos uma das condições ocorre:*

(A) γ e η tem mesmo ponto inicial e mesmo ponto final.

(B) γ e η são fechadas.

Então,

$$\sum(f;\gamma) = \sum(f;\eta).$$

Prova.

Esquematicamente, temos duas possibilidades para o par γ, η:

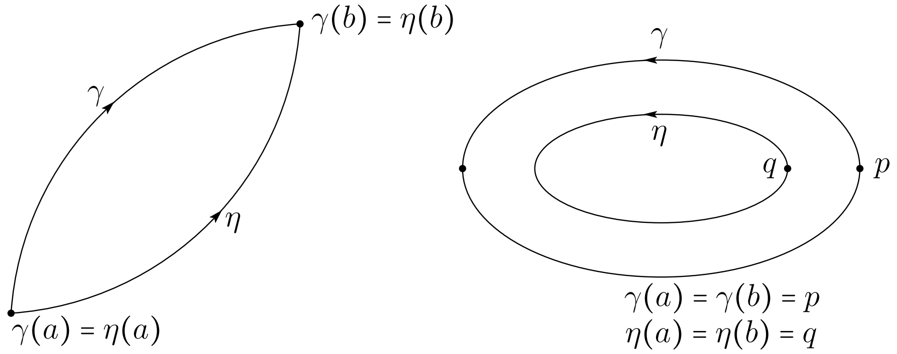

Figura 8.3: Ilustração ao Lema 8.5

A seguir, mantenhamos a notação na definição de curvas próximas.

Consideremos $g_k : B_k \to \mathbb{C}$ uma primitiva local de f, para cada $k = 1, \ldots, n$. No conexo $B_k \cap B_{k+1}$, com $1 \leq k \leq n-1$, a diferença $g_{k+1} - g_k$ é constante e

$$g_{k+1}(\eta(a_k)) - g_{k+1}(\gamma(a_k)) = g_k(\eta(a_k)) - g_k(\gamma(a_k)).$$

Então, sob a condição (A) ou sob a condição (B), temos

$$\sum(f;\eta)-\sum(f;\gamma) = \sum_{k=1}^{n}[g_k(\eta(a_k))-g_k(\eta(a_{k-1}))]-\sum_{k=1}^{n}[g_k(\gamma(a_k))-g_k(\gamma(a_{k-1}))] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}[g_k(\eta(a_k)) - g_k(\gamma(a_k))] - \sum_{k=1}^{n-1}[g_{k+1}(\eta(a_k)) - g_{k+1}(\gamma(a_k))]+$$

$$+ [g_n(\eta(a_n)) - g_n(\gamma(a_n))] - [g_1(\eta(a_0)) - g_1(\gamma(a_0))] =$$

$$= g_n(\eta(b)) - g_n(\gamma(b)) - g_1(\eta(a)) + g_1(\gamma(a)).$$

$$= 0 \clubsuit$$

Sejam

$$\gamma_0 : [a,b] \to \Omega \quad \text{e} \quad \gamma_1 : [a,b] \to \Omega,$$

duas curvas contínuas e com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final. Analogamente à definição de homotopia para curvas fechadas no capítulo 7, dizemos que γ_0 e γ_1 são Ω-homotópicas (com extremos fixos) se existe uma função

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$$

contínua (a homotopia) satisfazendo

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t), \ \forall t \in [a,b] \\ H(1,t) = \gamma_1(t), \ \forall t \in [a,b] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} H(s,a) = \gamma_0(a), \ \forall s \in [0,1] \\ H(s,b) = \gamma_0(b), \ \forall s \in [0,1]. \end{cases}$$

Fixado $s \in [0,1]$, escrevemos $H_s = \gamma_s$ para a curva $H(s,t)$, onde $t \in [a,b]$.

Também indicamos a homotopia H pela família de curvas $\{H_s\}_{0 \le s \le 1}$.

Doravante, toda homotopia entre curvas com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final é uma homotopia que mantém os extremos fixos.

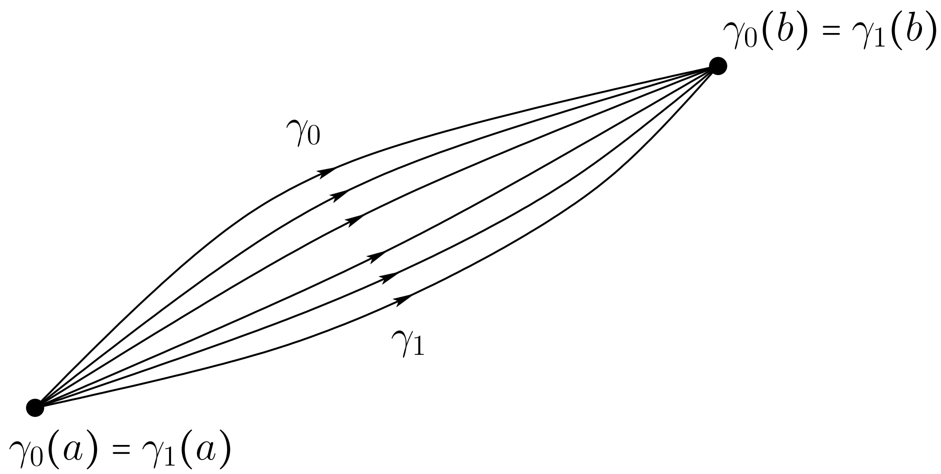

Figura 8.4: Homotopia entre curvas com mesmas extremidades

Dadas duas curvas homotópicas com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final, subentendemos que a homotopia mantém os extremos fixos.

Dadas duas curvas homotópicas e fechadas, subentendemos que a homotopia é entre curvas fechadas.

8.6 Teorema de Cauchy Homotópico (na presença de primitiva em bolas). *Consideremos*

$$\gamma_0 : [a,b] \to \Omega \quad e \quad \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$$

curvas contínuas e homotópicas, com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou ambas fechadas. Seja f holomorfa em Ω e admitindo primitiva em bolas abertas. Então,

$$\sum(f;\gamma_0) = \sum(f;\gamma_1).$$

Em particular, se γ_0 é homotópica a um ponto,

$$\sum(f;\gamma_0) = 0.$$

Prova.

Mantidas as notações, basta ver que

$$s \mapsto \sum(f;H_s)$$

é localmente constante.

Fixemos s em $[0,1]$. Existem uma partição $\{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$, e uma sequência finita de bolas abertas B_k tais que

$$H_s([a_{k-1},a_k]) \subset B_k \subset \Omega$$

e funções $g_k : B_k \to \mathbb{C}$, primitivas locais de f, para $k = 1,\ldots,n$. Temos

$$H\big([a_{k-1},a_k] \times \{s\}\big) \subset B_k, \text{ para } k = 1,\ldots,n.$$

Como H é contínua, existem $I_1,\ldots,I_n$ abertos em $[0,1]$ e contendo s tais que

$$H([a_{k-1},a_k] \times I_k) \subset B_k, \text{ para cada } k.$$

Então, o conjunto $I = I_1 \cap \cdots \cap I_n$ é aberto em $[0,1]$ e contém s. Dado $u \in I$, a curva H_u é próxima a H_s sendo que elas tem mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou são fechadas. Pelo Lema 8.5

$$\sum(f;H_u) = \sum(f;H_s) \clubsuit$$

8.7 Teorema [Primitiva Global (para funções com primitiva em bolas)]. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que admite primitiva em cada bola abeta em Ω, onde Ω é um aberto simplesmente conexo. Fixemos α em Ω. Dado $z \in \Omega$ e uma curva contínua $\gamma : [a,b] \to \Omega$, com $\gamma(a) = \alpha$ e $\gamma(b) = z$, definimos a função*

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ por } F(z) = \sum (f; \gamma).$$

Então, F está bem definida e é uma primitiva de f. Isto é, F é derivável e

$$F'(z) = f(z).$$

Em particular, se f é analítica então a primitiva existe e é analítica.

Prova.

- A definição é boa. Se $\eta : [b,c] \to \Omega$ é uma outra curva contínua de α a z, ao justapormos a curva reversa $\eta^- : [b,c] \to \Omega$ [desde z até α] à curva γ obtemos a curva fechada $\gamma \vee \eta^-$. Pelo Teorema de Cauchy homotópico segue

$$0 = \sum(f; \gamma \vee \eta^-) = \sum(f;\gamma) + \sum(f;\eta^-) = \sum(f;\gamma) - \sum(f;\eta).$$

- A derivada de F. Fixemos z em Ω e uma bola $B(z;r)$ em Ω, com raio $r > 0$, na qual f tem uma primitiva g. Dado h com $0 < |h| < r$, seja $\sigma : [b,c] \to B(z;r)$ tal que $\sigma(b) = z$ e $\sigma(c) = z + h$. Pelas propriedades já verificadas do somatório (8.2.1) segue

$$F(z+h) = F(z) + \sum (f;\sigma).$$

  Por definição, temos

$$\sum(f;\sigma) = g(z+h) - g(z).$$

  Donde segue

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \xrightarrow{h \to 0} g'(z) = f(z).$$

- Se f é analítica, localmente temos $F' \equiv \sum a_n (z - z_0)^n$ e, pela Proposição 8.1,

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} + C$$

  para alguma constante C♣

8.2 - Logaritmo de uma Função

8.8 Teorema. *Seja Ω um aberto simplesmente conexo e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, sem zeros.*

(a) Existe $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, dita um logaritmo para *f, tal que*

$$e^{\varphi} = f.$$

Notação: $\varphi = \log f$.

(b) Existe $\psi \in \mathcal{A}(\Omega)$, dita uma raíz quadrada (analítica) para *f, tal que*

$$\psi^2 = f.$$

Notação: $\psi = \sqrt{f}$. Ainda, $\sqrt{f}$ é única a menos da multiplicação por ± 1.

Prova.

(a) Pelo teorema 8.7 existe $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que

$$g' = \frac{f'}{f}.$$

Então $h = e^g$ não se anula e satisfaz

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f}.$$

Donde segue $f'h - fh' = 0$ e $\left(\frac{f}{h}\right)' = 0$. Logo, existe uma constante não nula, a qual podemos supor da forma e^{w_0} para algum $w_0 \in \mathbb{C}$, tal que

$$f = e^{w_0} h = e^{g + w_0}.$$

(b) Basta definir $\psi = e^{\varphi/2}$, onde $e^{\varphi} = f$♣

Notemos que a função $z \mapsto \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e admite primitiva local.

8.9 Corolário. *Sejam Ω um aberto simplesmente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Então, existe um* logatimo analítico *$g(z) = \log(z - \alpha)$ para $z \mapsto z - \alpha$, onde $z \in \Omega$.*

Prova. Segue trivialmente do teorema 8.8♣

8.3 - A Função Logaritmo

O Teorema 8.8 permite uma abordagem bastante asséptica de uma função logaritmo $\log(z)$. Para isto proponho o seguinte exercício (é simples).

Exercício. Mostre que o plano fendido $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é simplesmente conexo.

Com tal exercício, o teorema 8.8 nos garante a existência de uma $f(z)$ analítica tal que $e^{f(z)} = z$ para todo z no plano fendido. Tal função é o logaritmo principal. Porém, é também importante uma abordagem direta.

Através do argumento principal $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$, definimos o logaritmo principal

$$\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C} \quad \text{por} \quad \operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z),$$

onde $\ln : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ é a inversa da exponencial real. Evidentemente, $\operatorname{Log}(z)$ é uma função injetora e contínua. Ainda mais,

$$\exp(\operatorname{Log}(z)) = e^{\ln|z|} e^{i\operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i\operatorname{Arg}(z)} = z.$$

Então, temos $\exp \circ \operatorname{Log} = \operatorname{Id}$, onde Id é a função identidade no plano fendido. Computemos a derivada de $\operatorname{Log}(z)$. Supondo $h \neq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(\exp \circ \operatorname{Log})(z+h) - (\exp \circ \operatorname{Log})(z)}{h} \\ &= \frac{(\exp \circ \operatorname{Log})(z+h) - (\exp \circ \operatorname{Log})(z)}{\operatorname{Log}(z+h) - \operatorname{Log}(z)} \frac{\operatorname{Log}(z+h) - \operatorname{Log}(z)}{h}. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Log}(z+h) - \operatorname{Log}(z) \xrightarrow{h \to 0} 0$ e $\exp'(w) = \exp(w) \neq 0$, concluímos que $\operatorname{Log}(z)$ é derivável e ainda $1 = \exp'(\operatorname{Log}(z))\operatorname{Log}'(z) = z\operatorname{Log}(z)$. Isto é

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}.$$

É simples obter uma série de potências para $\operatorname{Log}(z)$ na bola $B(1;1)$. Temos

$$\big(\operatorname{Log}(1+z)\big)' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad \text{se } |z| < 1,$$

e portanto, pelo princípio de unicidade para séries de potências convergentes [vide comentário ao Teorema de Abel (5.12)], temos

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad \text{se } |z| < 1.$$