MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Semestre 2 de 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Capítulo 7 - A Exponencial Complexa e Trigonometria, o Índice, Princípio do Argumento e Teorema de Rouché

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

A EXPONENCIAL E TRIGONOMETRIA, O ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

7.1 - A Exponencial Complexa e Trigonometria

7.1 Teorema. *A função exponencial complexa*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

é bem definida, contínua e satisfaz as propriedades abaixo.

(a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ *para quaisquer* z *e* w*, ambos em* $\mathbb{C}$.

(b) $\exp(0) = 1$ *e para todo* $z \in \mathbb{C}$ *temos* $\exp(z) \neq 0$ *e* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

(c) $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$*, onde* $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *é o número de Euler.*

(d) $\exp(x) = e^x$ *para todo racional* x.

(e) Com a notação $e^z = \exp(z)$ *temos* $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *e* $|e^z| = e^{Re(z)}$*, para todo* z *em* $\mathbb{C}$.

(f) $\exp'(z) = \exp(z)$*, para todo* z *em* $\mathbb{C}$

Prova.

(a) Pelo Critério da Razão, a série dada converge absolutamente em $\mathbb{C}$. Então, com a linguagem de somas não ordenadas obtemos

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \Big(\sum \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum \frac{w^m}{m!}\Big)\\ &= \sum_{p\geq 0}\sum_{n+m=p} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m\\ &= \sum \frac{(z+w)^p}{p\,!} = \exp(z+w).\end{aligned}$$

(b) É óbvio que $\exp(0)=1$. Dado $z\in\mathbb{C}$, por (a) segue

$$1=\exp(0)=\exp(z-z)=\exp(z)\exp(-z).$$

(c) Em Exemplos 2.23(e) vimos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!},\ \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}\\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Fixemos m tal que $m\leq n$. Então segue

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geq\\ &\geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).\end{aligned}$$

A seguir, impondo $n\to+\infty$ concluímos que

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!},\ \text{ para todo } m\in\mathbb{N}.$$

Por favor, conclua.

(d) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}^*$. Pelos itens (a), (b) e (c), temos

$$\begin{aligned}
\exp(n) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \prod_{j=1}^{n} \exp(1) = e^n,\\
\exp(-n) &= e^{-n},\\
\left[\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m &= \exp\left(\frac{m}{m}\right) = \exp(1) = e,\\
\exp\left(\frac{1}{m}\right) &= e^{\frac{1}{m}} \quad \text{e}\\
\exp\left(\frac{n}{m}\right) &= \left[\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = e^{\frac{n}{m}}.
\end{aligned}$$

Por favor, complete.

(e) A função $z \mapsto \overline{z}$ é contínua em $\mathbb{C}$. Donde segue

$$\overline{e^z} = \overline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{z}^j}{j!} = e^{\overline{z}} \ .$$

Ainda,

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = \left[e^{\mathrm{Re}(z)}\right]^2.$$

Para $x \geq 0$ temos $e^x > 0$ e $e^{-x} = (e^x)^{-1} > 0$. Done segue $e^{\mathrm{Re}(z)} = |e^z|$.

(f) Pelo teorema de derivação para séries de potências segue

$$\begin{aligned}
\exp'(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)'\\
&= 1 + 2\frac{z}{2!} + 3\frac{z^2}{3!} + \cdots\\
&= \exp(z) \clubsuit
\end{aligned}$$

Devido à lei associativa para somas não ordenadas temos [cheque],

$$(7.1.1) \quad e^{iz} = \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right] + i\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right], \ \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

7.2 Definição. *Dado* $z \in \mathbb{C}$*, indicamos*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad , \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Então, devido a tais definições temos

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Claramente, a função $\cos z$ é par, a função $\sin z$ é ímpar e $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Seguem então

$$\text{(Fórmulas de Euler)} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

O corolário abaixo é imediato e omitimos sua prova.

7.3 Corolário [Fórmula (real) de Euler]. *Dado* $\theta \in \mathbb{R}$*, temos*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Vejamos que $\cos x$ e $\sin x$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazem as propriedades esperadas.

7.4 Teorema. *As funções* $\cos x$ *e* $\sin x$*, definidas na variável real* x*, são ambas deriváveis e satisfazem*

$$\cos' x = -\sin x \qquad e \qquad \sin' x = \cos x.$$

Prova.

Do teorema 7.1(f) segue, supondo a variável $h \in \mathbb{R}$ no cômputo abaixo,

$$e^{ix} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{ix+ih} - e^{ix}}{ih} = -i \lim_{h \to 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h}.$$

Identificando as partes reais e imaginárias na identidade acima segue

$$\cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin' x,$$

$$\sin x = -\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\cos' x \; \clubsuit$$

7.5 Teorema. *Existe o menor número estritamente positivo l tal que* $\cos l = 0$.

Prova.

Claramente, $\cos 0 = 1$. Mostremos $\cos 2 < 0$. Escrevendo

$$\cos 2 = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \left[\left(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\right) + \left(-\frac{2^{10}}{(10)!} + \frac{2^{12}}{(12)!}\right) + \cdots\right],$$

temos

$$1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

e cada uma das parcelas entre colchetes satisfaz

$$-\frac{2^{2n}}{(2n)!} + \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{4}{(2n+2)(2n+1)}\right) < 0, \text{ com } n \text{ ímpar e } n \geq 3.$$

Donde segue $\cos 2 < 0$.

A função $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ é contínua na reta e pelo Teorema do Valor Intermediário se anula entre 0 e 2. Cheque que existe o menor $l > 0$ tal $\cos l = 0$♣

7.6 Definição (O número π). *Indicamos $\pi = 2l$, onde l é o número de Landau*[1].

7.7 Proposição. *Valem as propriedades abaixo.*

(a) $|e^{i\theta}| = 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) $e^{i\pi/2} = i$ *e* $e^{i\pi} + 1 = 0$.

(c) A função $\exp(z)$ *é periódica com período* $2\pi i$. *Isto é,* $e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$.

(d) Se $\theta \in (0, 2\pi)$ *então* $e^{i\theta} \neq 1$.

(e) $e^z = 1$ *se e somente se* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(f) Se $\omega \in \mathbb{C}$ *é tal que* $|\omega| = 1$, *então existe um único* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tal que* $e^{i\theta} = \omega$.

(g) A função exponencial real $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *é um difeomorfismo.*

[1] Landau foi perseguido durante o nazismo por ser judeu, perdendo o posto de professor em Berlim. Bierberbach, um dos seus detratores, alegara que sua matemática não era germânica. Talvez se referindo, entre outras "razões", à definição de π sugerida por Landau.

(h) A imagem da função exponencial complexa é $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

Prova.

(a) Segue de $1 = e^0 = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta}\,\overline{e^{i\theta}} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = |e^{i\theta}|^2$.

(b) Pela Fórmula de Euler e pela definição de π segue

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Por (a) temos

$$1 = |e^{i\frac{\pi}{2}}| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Logo, $\sin(\pi/2) = \pm 1$. É fácil ver que $\cos\theta$ é estritamente positiva no intervalo aberto $(0,\pi/2)$. Assim, $\sin\theta$ é estritamente crescente em $(0,\pi/2)$, com $|\sin\theta| \le |e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\sin\frac{\pi}{2} = +1 \quad \text{e} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

(c) Temos

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = e^z i^4 = e^z.$$

(d) Dado $\theta \in (0,2\pi)$, consideremos

$$\alpha = \frac{\theta}{4} \quad \text{no intervalo} \quad \left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Como

$$\cos 0 = 1 \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e a função $\cos x$ (com $\cos x = \sin' x$) é estritamente positiva em $(0,\pi/2)$ temos que $\sin x$ é estritamente crescente em $(0,\pi/2)$. É trivial ver que

$$\sin 0 = 0 \quad \text{e [vide (b)]} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Logo, concluímos que $\sin x \in (0,1)$ se $x \in (0,\pi/2)$. Portanto, supondo $1 = e^{i\theta} = (e^{i\alpha})^4$ obtemos

$$e^{i\alpha} \in \{+1,-1,+i,-i\}.$$

Logo, $\sin\alpha \in \{0,+1,-1\}$, com $\alpha \in (0,\pi/2)$ $\lightning$

(e) Dado $n \in \mathbb{Z}$, pelo item (c) temos

$$e^{2\pi ni} = (e^{2\pi i})^n = (e^0)^n = 1.$$

Inversamente, se $e^z = 1$ então $1 = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ e $e^{-\operatorname{Re} z} = (e^{\operatorname{Re} z})^{-1} = 1$. Se $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $e^{\operatorname{Re} z} = 1$, temos $\operatorname{Re} z = 0$. Se $-\operatorname{Re}(z) \geq 0$ e $e^{-\operatorname{Re} z} = 1$, temos $-\operatorname{Re} z = 0$. Assim, podemos escrever $z = iy$, com $y \in \mathbb{R}$. É fácil ver que existe um único número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in [2n\pi, 2(n+1)\pi)$. Logo, $y - 2n\pi \in [0, 2\pi)$. Desta forma, utilizando o item (c) seguem as identidades

$$1 = e^z = e^{iy} = e^{iy-2n\pi i} = e^{(y-2n\pi)i}, \text{ com } y - 2n\pi \in [0, 2\pi).$$

Então, pelo item (d) obtemos $y - 2n\pi = 0$, Portanto, $z = iy \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(f) Seja $\omega = a + ib$, com $1 = |\omega| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Suponhamos $a > 0$ e $b > 0$ [logo, $a, b \in (0, 1)$]. Como a função $\cos x$ restrita ao intervalo

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

é contínua, estritamente decrescente e satisfaz

$$\cos 0 = 1 \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

pelo Teorema do Valor Intermendiário existe um só $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos\theta = a$. Então, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - a^2 = b^2$. Assim, como a função $\sin x$ é positiva em $[0, \pi/2]$ [vide a prova do item (b)], segue que $\sin\theta = b$. Logo,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = a + ib = \omega.$$

Suponhamos $a < 0$ e $b > 0$. Então, existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que $e^{i\theta} = b - ai$. Assim,

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \text{e} \quad e^{i\alpha} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}} = (b - ai)i = a + bi = \omega.$$

Suponhamos $b < 0$ e $a \neq 0$. Pelos casos acima existe $\theta \in (0, \pi)$ tal que $e^{i\theta} = -a - bi$. Assim, $\alpha = \theta + \pi \in (0, 2\pi)$ e $e^{i\alpha} = e^{i\theta}e^{i\pi} = (-a - bi)(-1) = a + bi = \omega$.

Os casos $a = 0$ ou $b = 0$ são triviais.

A unicidade segue do item (d). De fato, dados θ_1 e θ_2 em $[0, 2\pi)$ tais que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, é claro que podemos supor $\theta_2 \geq \theta_1$. Logo, temos $\theta_2 - \theta_1 \in [0, 2\pi)$ e ainda, $e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = e^{i\theta_2}e^{-i\theta_1} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_1} = e^0 = 1$. Portanto, $\theta_2 - \theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta_1$.

(g) Claramente a exponencial real $\exp(x)$ é estritamente crescente em $[0, +\infty)$ e tende a $+\infty$ se $x \to +\infty$. Se $x \in (-\infty, 0]$, temos

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

e portanto e^x é estritamente crescente em $(-\infty, 0]$ e

$$e^x \to 0^+ \quad \text{se} \quad x \to -\infty.$$

Pelo Teorema 7.1(f), a função $\exp(x)$ é derivável [cheque] e contínua. Pelo teorema do valor intermediário, a função e^x é bijetora de $(-\infty, +\infty)$ em $(0, +\infty)$. É claro que $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ para todo x na reta.

Portanto, a inversa de $\exp(x)$ tem derivada e a inversa é contínua.

(h) Dado $w \in \mathbb{C}^*$, temos $|w| \neq 0$ e, por (g), existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = |w|$. Como

$$\frac{w}{|w|}$$

tem módulo 1, pelo item (f) existe um real y tal que

$$e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

Logo, $e^{x+iy} = w$♣

Comentário. Pela Proposição 7.7, itens (e) e (f), segue que a curva contínua

$$\gamma(t) = e^{it}, \text{ onde } t \in [0, 2\pi],$$

é fechada $[\gamma(0) = \gamma(2\pi)]$, injetora em $[0, 2\pi)$ e que sua imagem é a circunferência unitária centrada na origem [o S^1]. A velocidade escalar de um ponto que descreve a trajetória $\gamma(t) = e^{it}$ é

$$|\gamma'(t)| = 1.$$

Logo, o comprimento da trajetória descrita por tal ponto é igual ao tempo de percurso $2\pi - 0 = 2\pi$. Isto mostra que o número π, da forma como o definimos, tem o significado geométrico usual.

7.8 Proposição. *Consideremos a identificação* $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$*, como espaços vetoriais. Fixemos um inteiro* $k \in \mathbb{Z}$*. Então, a restrição*

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} \times [k\pi, k\pi + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \\ \\ \exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), \end{cases}$$

é uma bijeção.

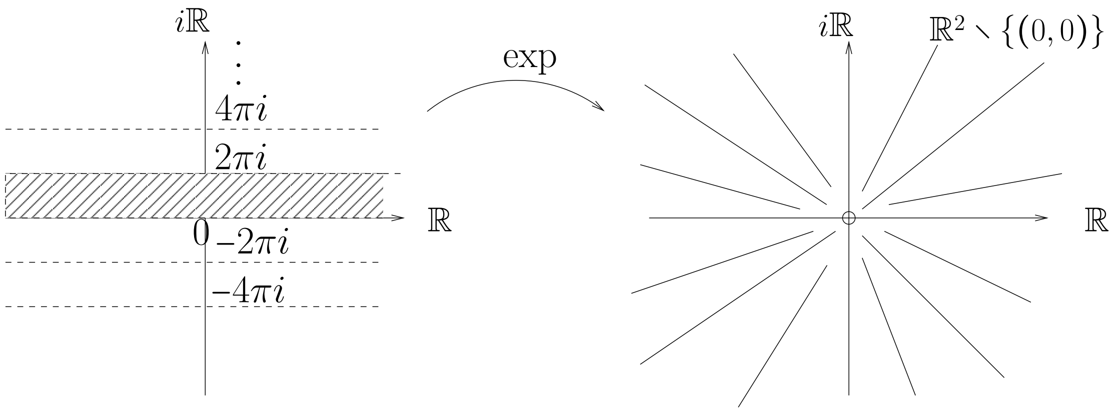

Figura 7.1: A aplicação $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$

Prova. Deixamos a verificação ao leitor♣

Seja $b \in \mathbb{R}$. Pela proposição acima e o teorema da função inversa segue que

$$\exp(z) \text{ restrita à faixa horizontal } \{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Im}(z) < b + 2\pi\}$$

é um isomorfismo analítico e que a função

$$\exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \text{ restrita à faixa } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : b < y < b + 2\pi\}$$

é um difeomorfismo C^∞.

A inversa da função exponencial real $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é a função denominada logaritmo natural que é indicada por

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Seja z em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Um número real $\phi = \arg(z)$ tal que

$$z = |z|e^{i\phi},$$

é chamado um **argumento** de z. Pela Proposição 7.7(e), o argumento $\arg(z)$ é definido módulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Dado $z \in S^1 \setminus \{-1\}$, existe um único $\theta \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = e^{i\theta}$. Chamamos $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ de **argumento principal de** z. O argumento principal de z coincide com

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right), \text{ para } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

e é contínuo. De fato, denotando por $E(z)$ a restrição de $\exp(z)$ à faixa horizontal $\Omega = \{z = x + i\theta : x \in \mathbb{R} \text{ e } -\pi < \theta < \pi\}$, a fórmula $E(z) = e^z = e^x e^{i\theta}$ estabelece uma bijeção entre Ω e $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Pelo teorema da função inversa, $E : \Omega \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é isomorfismo analítico. Logo [cheque],

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{1}{i} E^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right) \text{ é contínua.}$$

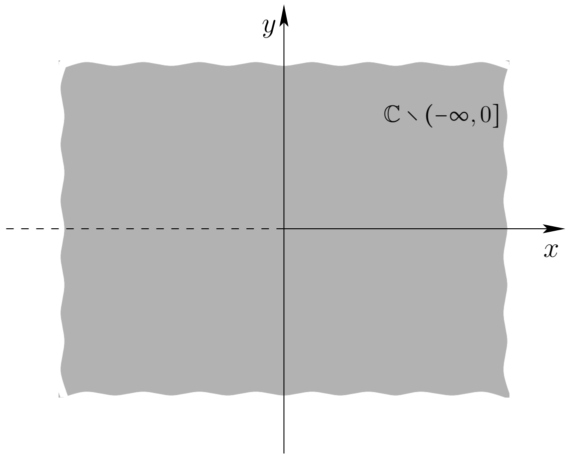

Figura 7.2: O domínio da função argumento principal

7.9 Teorema. *Não existe uma função argumento contínua* $\arg : S^1 \to \mathbb{R}$.

Prova.

Caso contrário, arg e Arg são contínuas no conexo $S^1 \setminus \{-1\}$. Por continuidade, conexidade, e pelo teorema 7.7(e) concluímos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que temos $\arg(\omega) = \operatorname{Arg}(\omega) + 2k\pi$ para todo $\omega \in S^1 \setminus \{-1\}$. Para ω em S^1 e tendendo a -1 pelo semi-plano superior obtemos $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ e para ω em S^1 e tendendo a -1 pelo semi-plano inferior obtemos $\arg(-1) = -\pi + 2k\pi$ ↯

7.2 - O Índice para Curvas Contínuas.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$. Pela proposição 7(e), tal φ é sobrejetora. Obviamente, φ é contínua.

7.10 Lema. *A função φ acima definida é um homeomorfismo local (logo, aberta).*

Prova. Fixemos $\theta \in \mathbb{R}$.

A 2π-periodicidade de φ implica na bijetividade de

$$\varphi|_J : J = (\theta - \pi, \theta + \pi) \longrightarrow S^1 \setminus \{-e^{i\theta}\}.$$

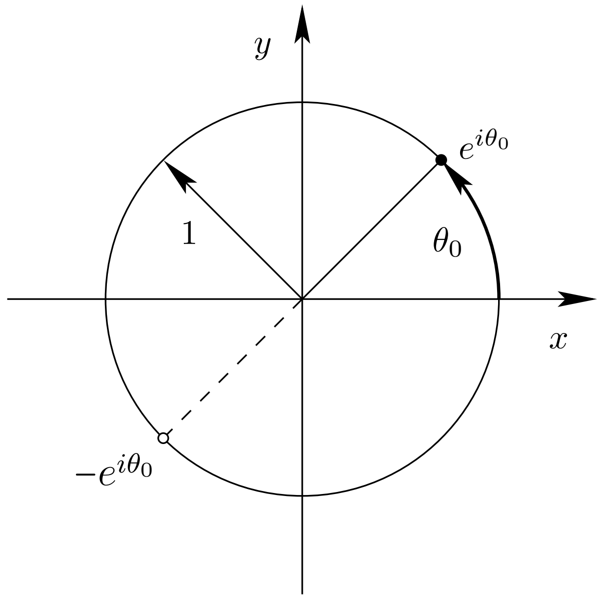

Figura 7.3: Ilustração ao Lema 7.10

Claramente, $S^1 \setminus \{-e^{i\theta}\}$ é aberto em S^1. Resta ver que $(\varphi|_J)^{-1}$ é contínua. Seja (θ_n) uma sequência em J [logo, limitada] tal que

$$\varphi(\theta_n) \to \varphi(\alpha), \text{ com } \alpha \in J.$$

Seja (θ_{n_k}) uma subsequência de (θ_n) tal que $\theta_{n_k} \to \beta \in \mathbb{R}$. Então segue que $\beta \in [\theta - \pi, \theta + \pi]$ e $\varphi(\theta_{n_k}) \to \varphi(\beta)$. Assim, $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) \in S^1 \setminus \{-e^{i\theta}\}$. Donde, $\beta \in J$ e $\beta = \alpha$. Isto vale para toda subsequência convergente de (θ_n). Logo, $\theta_n \to \alpha$♣

7.11 Teorema. *Seja $\gamma : J \to S^1$ uma curva contínua, onde $J = [a, b]$. Fixemos um arbitrário $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(a) = e^{i\theta_0}$. Então, existe uma única função contínua*

$$\theta : J \to \mathbb{R} \ \textit{satisfazendo} \ \theta(a) = \theta_0 \ \textit{e} \ \gamma(t) = e^{i\theta(t)}, \ \textit{para todo} \ t \in J.$$

Prova.

◇ Existência.

Como a curva γ é uniformemente contínua, segue que existe uma partição $\{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ satisfazendo

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| \le 1 \text{ para quaisquer } t \text{ e } s \text{ em } J_k = [a_{k-1}, a_k], \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

Temos $\gamma(J_1) \subset S^1 \setminus \{p\}$, para algum $p = e^{i\alpha} \in S^1$ [pois $\gamma(J_1)$ está contido em um disco de raio 1]. Pelo Lema 7.10, a curva $\varphi : (\alpha, \alpha + 2\pi) \to S^1 \setminus \{p\}$, onde $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ é um homeomorfismo. Dado $t \in J_1$, definimos

$$\theta_1(t) = \varphi^{-1}\big(\gamma(t)\big) + \theta_0 - \varphi^{-1}\big(\gamma(a)\big).$$

Notemos que $\theta_0 - \varphi^{-1}\big(\gamma(a)\big) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Portanto,

$$\theta_1 : J_1 \to \mathbb{R} \text{ é contínua}, \quad \theta_1(a) = \theta_0 \text{ e } \quad e^{i\theta_1(t)} = \gamma(t), \text{ para todo } t \in J_1.$$

De forma análoga definimos uma função contínua $\theta_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\theta_2(a_1) = \theta_1(a_1) \text{ e } e^{i\theta_2(t)} = \gamma(t), \text{ para todo } t \in J_2.$$

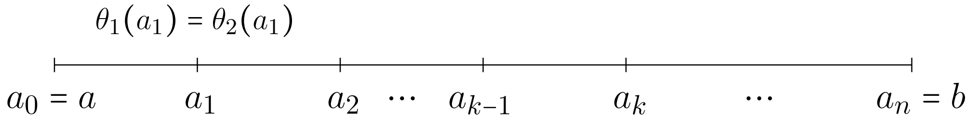

Figura 7.4: Um argumento para γ

Iterando tal procedimento encontramos n funções contínuas $\theta_k : J_k \to \mathbb{R}$, para $k = 1, \ldots, n$, satisfazendo

$$\theta_k(a_{k-1}) = \theta_{k-1}(a_{k-1}) \text{ e } e^{i\theta_k(t)} = \gamma(t), \text{ para todo } t \in J_k, \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

É claro que a justaposição [vide Figura 7.4]

$$\theta = (\theta_1 \vee \cdots \vee \theta_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$$

atende as exigências (quanto à existência) no enunciado. Isto é,

$$\theta \text{ é contínua e satisfaz } \theta(a) = \theta_0 \ \text{ e } \ \gamma(t) = e^{i\theta(t)}, \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Esquematicamente, temos o diagrama abaixo

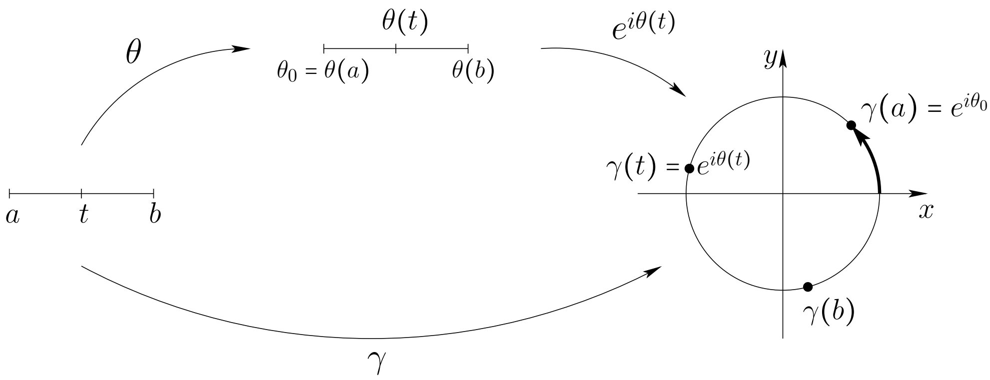

Figura 7.5: Um argumento contínuo para γ

◇ Unicidade.

Se $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaz as mesmas condições que $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ então temos

$$\phi(t) - \theta(t) \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Então, por continuidade e conexidade obtemos que $\phi - \theta$ é constante. Por fim, como $\phi(a) = \theta_0 = \theta(a)$, concluímos que

$$\phi \equiv \theta$$

Isto estabelece a unicidade anunciada para θ ♣

A seguir apresentamos algumas consequências deste importante teorema.

7.12 Corolário. *Consideremos uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ derivável. Então, as funções $|\gamma(t)|$ e $\theta(t)$ [como no enunciado do teorema] também são deriváveis.*

Prova.

Seja t_0 um ponto arbitrário em $[a, b]$. Consideremos a faixa horizontal infinita $\Omega = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R} \text{ e } \theta(t_0) - \pi < y < \theta(t_0) + \pi\}$. A função

$$\exp\big|_{\Omega} : \Omega \to \exp(\Omega)$$

é um difeomorfismo e em uma vizinhança de t_0 temos

$$i\theta(t) = \left(\exp\big|_{\Omega}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}\right) \clubsuit$$

Dada uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ contínua e fixado um θ_0 em $\mathbb{R}$, existem

$$\begin{cases} \text{uma única função } r : [a, b] \to (0, +\infty) \text{ e} \\ \text{uma única função } \theta : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ contínua} \end{cases}$$

satisfazendo

$$\theta(a) = \theta_0 \quad \text{e} \quad \gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \text{ para todo } t \text{ em } [a, b].$$

Obviamente, temos $r(t) = |\gamma(t)|$ para todo t em $[a, b]$.

Se tal γ é derivável então $r : [a, b] \to (0, +\infty)$ e $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ também o são.

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ contínua. Se $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\theta(t)$ são contínuas e satisfazem

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)} = r(t)e^{i\theta(t)} \text{ para todo } t \text{ em } [a, b],$$

então a função contínua

$$\frac{\theta(t) - \phi(t)}{2\pi}$$

assume valores em $\mathbb{Z}$ e é constante. Donde segue $\theta(b) - \phi(b) = \theta(a) - \phi(a)$ e

$$\theta(b) - \theta(a) = \phi(b) - \phi(a).$$

A função θ [e também a função ϕ] é dita um ramo de $\arg(\gamma)$ no intervalo $[a, b]$. Assim, a diferença $\theta(b) - \theta(a)$ depende apenas da curva γ e não da particular escolha do ramo θ.

Definimos o índice fracionário de γ (assim chamado em alguns textos) por

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Suponhamos que γ é fechada [isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$]. Neste caso,

$$\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

7.13 Definição. *Seja* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *contínua e fechada e* $\alpha \notin$ *Imagem*(γ). *O* índice *de* γ *em relação ao ponto* α *é o número inteiro definido por, e denotado,*

$$Ind_\gamma(\alpha) = Ind(\gamma;\alpha) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi},$$

onde $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e satisfaz*

$$\gamma(t) - \alpha = r(t)e^{i\theta(t)}, \text{ com } r(t) = |\gamma(t) - \alpha| \text{ para todo } t \in [a,b].$$

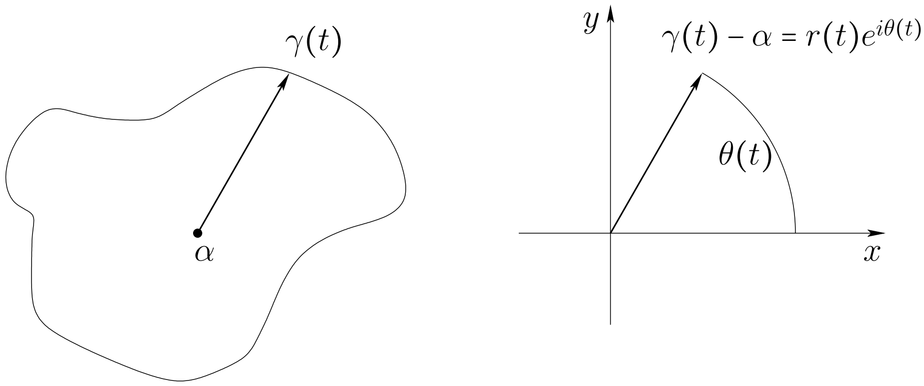

Figura 7.6: Ilustração à Definição 7.13

Claramente, $0 \notin \text{Imagem}(\gamma - \alpha)$, a função $\theta(t)$ é um ramo para $\arg(\gamma - \alpha)$ e

$$\boxed{\text{Ind}(\gamma;\alpha) = \text{Ind}(\gamma - \alpha; 0).}$$

Seguem algumas propriedades do índice, com as notações na Definição 7.13.

(I1) Seja $\xi : [c,d] \to [a,b]$ contínua e tal que $\{\xi(c), \xi(d)\} = \{a,b\}$. Logo,

$$\begin{cases} \text{se } \xi(c) = a, \text{ então } \boxed{\text{Ind}(\gamma \circ \xi;\alpha) = \text{Ind}_\gamma(\alpha),} \\ \\ \text{se } \xi(c) = b, \text{ então } \boxed{\text{Ind}(\gamma \circ \xi;\alpha) = -\text{Ind}_\gamma(\alpha).} \end{cases}$$

Vejamos. Seja $\theta = \theta(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $\gamma(t) - \alpha = r(t)e^{i\theta(t)}$. Então, $\theta \circ \xi$ é contínua e $\gamma(\xi(s)) - \alpha = r(\xi(s))e^{i\theta(\xi(s))}$ para todo $s \in [c,d]$. Para completar, vale a identidade $(\theta \circ \xi)(d) - (\theta \circ \xi)(c) = \pm[\theta(b) - \theta(a)]$.

Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, γ definida em $[0,1]$.

Mantenhamos as notações da Definição 7.13. A chamada curva reversa

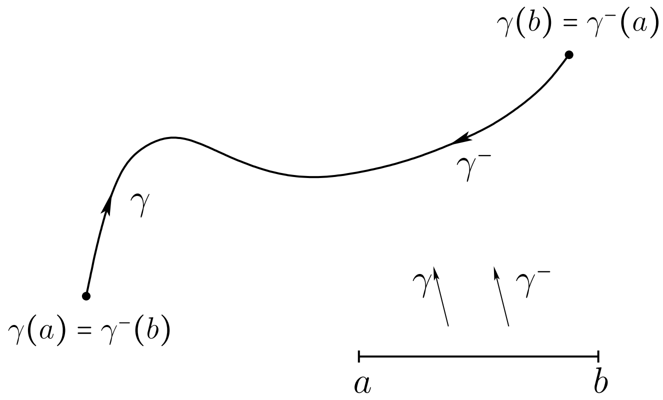

Figura 7.7: Ilustração à Definição 7.13

definida por $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, onde $t \in [a, b]$, satisfaz

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma^-; \alpha) = -\mathrm{Ind}(\gamma; \alpha).}$$

(I2) Se $f(z) = az + b$, com $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$, então

$$\boxed{\mathrm{Ind}(f \circ \gamma; f(\alpha)) = \mathrm{Ind}(\gamma; \alpha).}$$

Isto é, o índice é invariante por translações $[a = 0]$, homotetias $[a > 0 \text{ e } b = 0]$ e rotações $[\,|a| = 1 \text{ e } b = 0]$ sobre a curva γ.

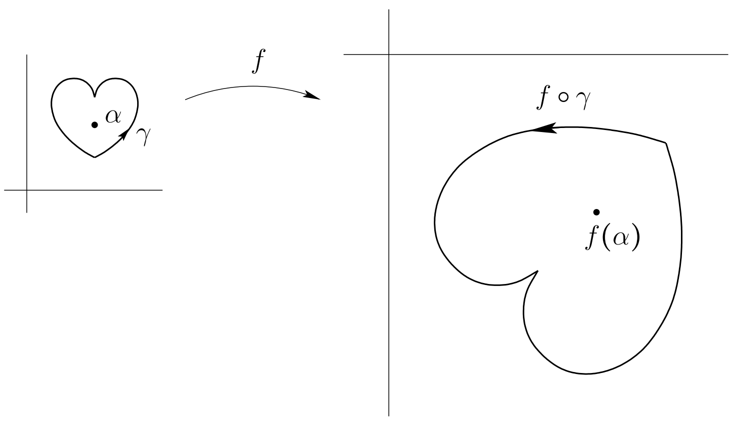

Figura 7.8: Arrastar, girar e expandir.

Efetuemos a verificação. Pela propriedade I2 podemos considerar γ parametrizada no intervalo $[0, 1]$. Seja $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) - \alpha = r(t)e^{i\theta(t)}$. Então, $f(\gamma(t)) - f(\alpha) = |a|r(t)e^{i(\theta(t)+\phi)}$, com $a = |a|e^{i\phi}$. Por fim, temos

$$\theta(1) + \phi - \theta(0) - \phi = \theta(1) - \theta(0).$$

(I3) Se γ é um ponto p, então

$$\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0.}$$

Isto é óbvio, pois se $p - \alpha = |p-\alpha|e^{i\theta_0}$, pomos $\theta(t) = \theta_0$ para todo $t \in [a,b]$.

(I4) Se $\gamma(t) = \alpha + \gamma_1(t)\cdots\gamma_n(t)$, então

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma;\alpha) = \mathrm{Ind}(\gamma_1;0) + \cdots + \mathrm{Ind}(\gamma_n;0).}$$

Provemos. Como $\alpha \notin \mathrm{Imagem}(\gamma)$, então $0 \notin \mathrm{Imagem}(\gamma_j)$ para $j = 1,\ldots,n$. Seja $\theta_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma_j(t) = r_j(t)e^{i\theta_j(t)}$, para $j = 1,\ldots,n$. Então temos

$$\gamma(t) - \alpha = r_1(t)\cdots r_n(t)e^{i[\theta_1(t)+\cdots+\theta_n(t)]} \quad \text{e}$$

$$\mathrm{Ind}(\gamma;\alpha) = [\theta_1(b) + \cdots + \theta_n(b)] - [\theta_1(a) + \cdots + \theta_n(a)] = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}(\gamma_j;0).$$

7.14 Lema. *Suponha que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ são fechadas e*

$$|\gamma(t) - \sigma(t)| < |\gamma(t) - \alpha|, \quad \textit{para todo } t \in [a,b].$$

Então, α não pertence à imagem de γ nem à imagem de σ e

$$\boxed{\mathit{Ind}(\gamma;\alpha) = \mathit{Ind}(\sigma;\alpha).}$$

[Interpretação: $\sigma(t)$ está mais próximo de $\gamma(t)$ que α e o segmento $[\sigma(t),\gamma(t)]$ não contém α e podemos "deformar" σ a γ sem alterar o índice].

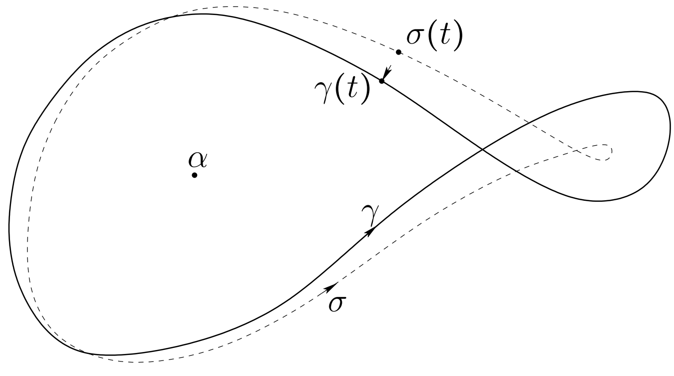

Figura 7.9: Ilustração para $|\gamma(t) - \sigma(t)| < |\gamma(t) - \alpha|$

Prova. Notemos que $\alpha \notin \text{Imagem}(\gamma) \cup \text{Imagem}(\sigma)$.

A curva fechada

$$\Gamma(t) = \frac{\sigma(t) - \gamma(t)}{\gamma(t) - \alpha}$$

satisfaz $|\Gamma(t)| < 1$ para todo t.

Logo, $\Gamma(t) + 1$ está contida no semi-plano "à direita" e aberto

$$\Omega = \{z : \text{Re}(z) > 0\}.$$

Em Ω, é contínua a função argumento

$$\theta(z) = \arg(z) = \arcsin\left[\text{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right] \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

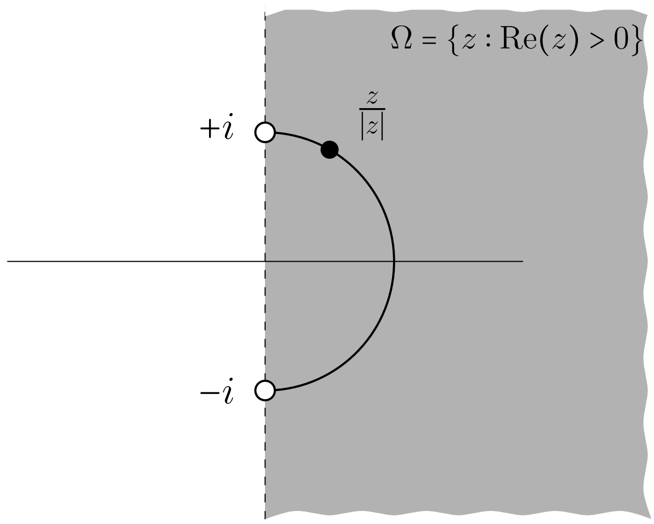

Figura 7.10: Um argumento no semi-plano à direita

Escrevendo $\Gamma(t) + 1 = r(t)e^{i\arg[\Gamma(t)+1]}$ temos

$$2\pi\text{Ind}(\Gamma + 1; 0) = \arg[\Gamma(b) + 1] - \arg[\Gamma(a) + 1] = 0.$$

Donde, $\text{Ind}(\Gamma + 1; 0) = 0$. Por outro lado, temos

$$\sigma(t) - \alpha = [\Gamma(t) + 1][\gamma(t) - \alpha].$$

Então, pela Propriedade (I4) segue

$$\text{Ind}(\sigma; \alpha) = \text{Ind}(\Gamma + 1; 0) + \text{Ind}(\gamma; \alpha) = \text{Ind}(\gamma; \alpha)\clubsuit$$

7.15 Teorema. *Consideremos γ uma curva contínua e fechada no plano complexo e o aberto $\Omega = \mathbb{C} \setminus$ Imagem(γ). Então, a função índice Ind$_\gamma : \Omega \to \mathbb{Z}$ é*

(a) contínua e, ainda, constante sobre cada componente (conexa) de Ω e

(b) nula sobre a única *componente (conexa) ilimitada de Ω.*

Prova. Podemos supor (já vimos) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$.

(a) Fixemos α em Ω. Seja $\beta \in \Omega$ tal que $|\beta - \alpha| < d = d(\alpha; \text{Imagem}(\gamma))$. Temos,

$$|\gamma(t) - [\gamma(t) - \beta + \alpha]| = |\beta - \alpha| < d \leq |\gamma(t) - \alpha|, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Então, pelo lema imediatamente acima,

$$\text{Ind}(\gamma - \beta + \alpha; \alpha) = \text{Ind}(\gamma; \alpha).$$

Mas, $\text{Ind}(\gamma - \beta + \alpha; \alpha) = \text{Ind}(\gamma - \beta + \alpha - \alpha; 0) = \text{Ind}(\gamma - \beta; 0) = \text{Ind}(\gamma; \beta)$. Logo, o índice é contínuo e constante na componente de Ω que contém α.

(b) Seja $r > 0$ tal que $D(0; r)$ contém Imagem(γ). A curva fechada $\gamma + 2r$ está em $D(2r; r)$ contido em $\Omega = \{z : \text{Re}(z) > 0\}$. Seja $\theta(z)$ o argumento em Ω.

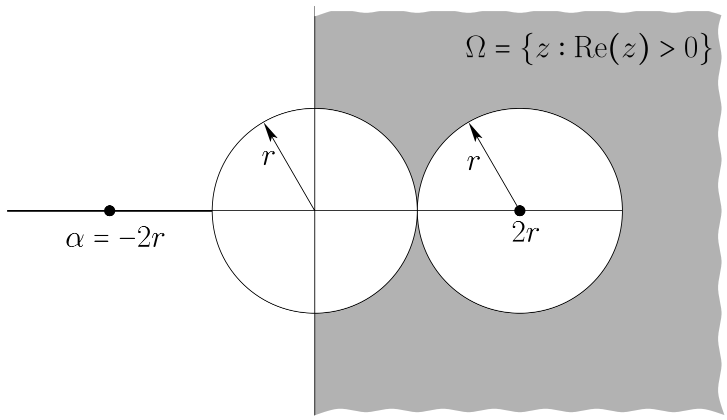

Figura 7.11: Teorema 7.15(b)

Desta forma, o ponto $\alpha = -2r$ está no complementar de $D(0; r)$ e satisfaz

$$\text{Ind}(\gamma; -2r) = \text{Ind}(\gamma + 2r; 0) = 0.$$

Logo, o índice é nulo na única componente (aberta) de $\mathbb{C} \setminus$ Imagem(γ) que contém o aberto conexo $\mathbb{C} \setminus D(0; r)$. Assim, as demais componentes de $\mathbb{C} \setminus$ Imagem(γ) estão contidas em $D(0; r)$ e são limitadas♣

7.16 Definição. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva contínua e fechada e α em $\mathbb{C}$.*

- α é interior a γ *se* $\alpha \notin Imagem(\gamma)$ *e* $Ind(\gamma;\alpha) \neq 0$.

- α está em γ *se* $\alpha \in Imagem(\gamma)$.

- α é exterior a γ *se* $\alpha \notin Imagem(\gamma)$ *e* $Ind(\gamma;\alpha) = 0$.

Tal definição algebriza os conceitos de interior e exterior a γ. Por exemplo, o ponto α na Figura 7.12 pertence ao exterior de γ.

Os números atribuídos às componentes de $\mathbb{C} \smallsetminus \text{Imagem}(\gamma)$ são os valores de $\text{Ind}(\gamma; w)$ para w nesta componente.

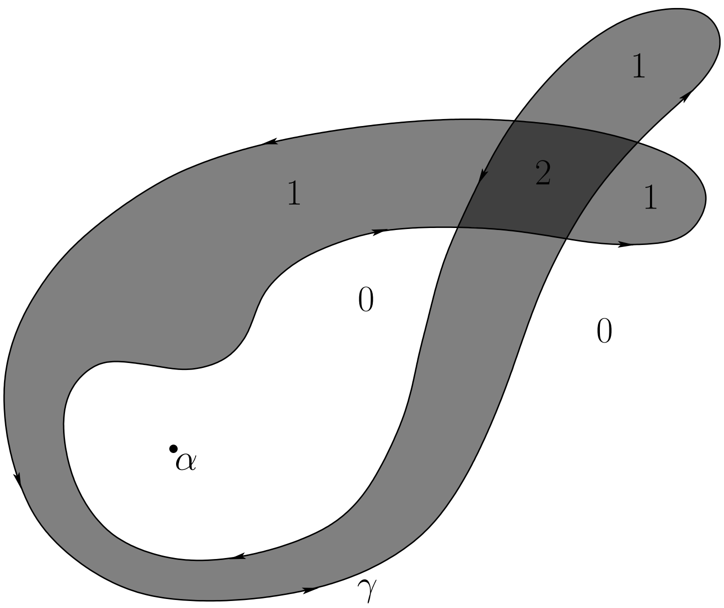

Figura 7.12: Ilustração à Definição 7.16

Definamos o interior de γ e o exterior de γ e introduzamos algumas notações.

- $E(\gamma)$, o exterior de γ, é o conjunto dos pontos exteriores a γ.

Pelo Teorema 7.15 (a), o exterior de γ é o conjunto aberto dado pela união das componentes conexas (abertas) de $\mathbb{C} \smallsetminus$ Imagem(γ) nas quais o índice é zero.

Pelo Teorema 7.15(b), o exterior de γ contém o complementar de um disco.

- $I(\gamma)$, o interior de γ, é o conjunto dos pontos interiores a γ.

Assim, o interior de γ está contido no disco (fechado) citado acima.

Temos

$$\mathbb{C} = I(\gamma) \uplus \text{Imagem}(\gamma) \uplus E(\gamma) \qquad [\text{“}\uplus\text{” indica união disjunta}]$$

e portanto

$$K(\gamma) = I(\gamma) \cup \text{Imagem}(\gamma)$$

é fechado e limitado e então compacto.

Algumas outras observações.

- A maioria dos textos somente define interior e exterior para uma curva γ de Jordan. Isto é,

  $$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

  é contínua, fechada e simples, sendo que simples significa que a restrição de γ ao intervalo (a, b) é injetora.

  Pode ser provado (trata-se de um teorema sofisticado), que se γ é uma curva de Jordan, então

  $$\mathbb{C} \setminus \text{Imagem}(\gamma)$$

  tem exatamente duas componentes conexas: uma limitada (e classicamente dita interior de γ) e outra ilimitada (e classicamente dita exterior de γ).

  Ainda comentando sobre uma curva γ de Jordan , pelo Teorema 7.15(b) segue que Ind_γ é nulo na componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagem}(\gamma)$. Na componente limitada, pode se provar que o índice é

  $$\text{constante e igual a } +1 \text{ ou constante e igual a } -1.$$

  O sinal depende da orientação de γ.

- A definição de interior e exterior de uma curva neste texto coincide com a definição clássica (ao tratarmos de curvas de Jordan) e permite trabalhar de modo eficiente com uma classe bem mais ampla de curvas.

Para mais comentários, vide *Complex Analysis*, S. Lang, pp. 146–147 e p.181.

7.3 - Homotopia e Simplesmente Conexos.

A palavra homotopia vem do grego *homo (mesmo, similar) + tópos (lugar)*. A teoria da homotopia é útil para, via álgebra, classificar espaços topológicos segundo seus "espaços vazios" ou "buracos".

Dizemos que duas curvas contínuas e fechadas no aberto Ω, digamos que

$$\gamma_0 : [a,b] \to \Omega \text{ e } \gamma_1 : [a,b] \to \Omega,$$

são Ω-homotópicas se existe uma função (uma Ω-homotopia entre curvas fechadas)

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$$

tal que H é contínua e

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{e} \quad H(s,a) = H(s,b).$$

Fixado $s \in [0,1]$, indicamos a curva fechada $H(s,t)$, onde $t \in [a,b]$, por H_s. Interpretamos a homotopia H como uma família de curvas fechadas (contínuas)

$$\{H_s\}_{0 \leq s \leq 1}$$

que se "deforma continuamente" desde $H_0 = \gamma_0$ até a curva $H_1 = \gamma_1$.

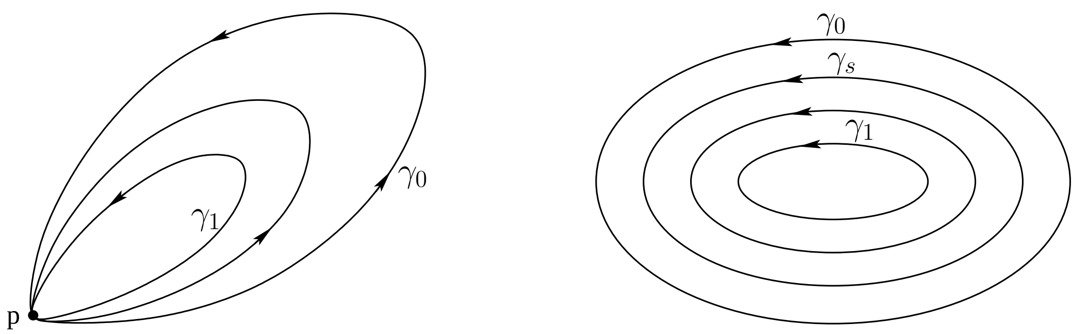

Figura 7.13: Homotopia entre curvas fechadas

Uma Ω-homotopia entre curvas fechadas é dita, brevemente, uma homotopia.

7.17 Lema. *Com as notações acima e α no complementar de Imagem(H),*

$$\text{a função } Ind(H_s;\alpha), \text{ onde } s \in [0,1], \text{ é constante.}$$

Prova.

Sejam s_0 em $[0,1]$ e $d = d\big(\alpha; \text{Imagem}(H_{s_0})\big) > 0$.

Como H é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$|H_s(t) - H_{s_0}(t)| < d \leq |H_{s_0}(t) - \alpha|$, para quaisquer $|(s,t) - (s_0,t)| = |s - s_0| < \delta$.

Pelo Lema 7.14 segue

$$\text{Ind}(H_s;\alpha) = \text{Ind}(H_{s_0};\alpha), \text{ se } |s - s_0| < \delta.$$

Logo, $s \mapsto \text{Ind}(H_s;\alpha)$ é localmente constante no conexo $[0,1]$, e constante [cheque]♣

Um conjunto aberto e conexo Ω é dito **simplesmente conexo** se toda curva fechada e contínua $\gamma : [a,b] \to \Omega$ é Ω-homotópica a algum ponto em Ω. Isto é, existe p em Ω tal que γ é Ω-homotópica à curva constante $\gamma_p(t) = p$, com $t \in [a,b]$.

Se Ω e O são abertos homeomorfos e Ω é simplesmente conexo, então O é simplesmente conexo [por favor, cheque].

Veremos [Proposição 9.11 e Teorema 12.4] que um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo se e só se seu complementar $\mathbb{C} \setminus \Omega$ não tem componente limitada. Intuitivamente, interpretamos um conjunto simplesmente conexo como um conjunto que não tem "buracos".

7.18 Proposição. *Seja Ω simplesmente conexo e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e fechada. Então, a função $Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus$ Imagem$(\gamma) \to \mathbb{Z}$, é nula no complementar de Ω. Equivalentemente, o interior de γ está contido em Ω.*

Prova.

Seja α no complementar de Ω.

Seja $\{H_s\}$ uma Ω-homotopia de γ a um ponto $p \in \Omega$. Pelo Lema 7.17 temos

$$\text{Ind}(\gamma;\alpha) = \text{Ind}(H_0;\alpha) = \text{Ind}(H_1;\alpha) = \text{Ind}(p;\alpha) = 0♣$$

Exercício. A imagem de um simplesmente conexo por uma função contínua pode não ser simplesmente conexa. [Dica: $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e Proposição 7.18.]

7.4 - Princípio do Argumento e Teorema de Rouché.

Dada $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e um ponto a em $\mathcal{Z}_f$, a ordem de a como um zero de f é $\nu(f;a)$.

7.19 Proposição. *Sejam f analítica e não constante no aberto conexo Ω e a um zero de f. Consideremos a circunferência (orientada no sentido anti-horário)*

$$\gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta}, \ \ com\ \theta \in [0, 2\pi] \ \ e\ r > 0.$$

Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, temos

$$Ind(f \circ \gamma_r; 0) = \nu(f;a).$$

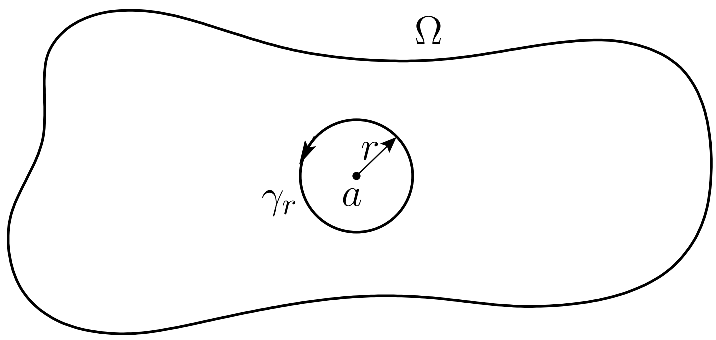

Figura 7.14: Ilustração à Proposição 7.19

Prova.

Pelo PZI, temos $f(z) = (z-a)^m g(z)$, com $m = \nu(f;a)$, $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e g sem zeros numa vizinhança de a. Fixado r pequeno o suficiente temos

$$(f \circ \gamma_r)(\theta) = r^m e^{im\theta} g(a + re^{i\theta}).$$

Sejam $\sigma_1(\theta) = r^m e^{im\theta}$ e $\sigma_2(\theta) = g(a+re^{i\theta})$ [fechadas]. Pela propriedade (I4),

$$\mathrm{Ind}(f \circ \gamma_r; 0) = \mathrm{Ind}(\sigma_1; 0) + \mathrm{Ind}(\sigma_2; 0).$$

É imediato que $\mathrm{Ind}(\sigma_1; 0) = m$. Ainda, como $g(a) \neq 0$, se r é pequeno o suficiente a curva fechada σ_2 está contida em um dos quatro semi-planos: $\{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$,$\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Em cada um dos quatro podemos definir continuamente uma função argumento [cheque]. Logo, $\mathrm{Ind}(\sigma_2; 0) = 0$ e

$$\mathrm{Ind}(f \circ \gamma_r; 0) = m\nu(f;a)\clubsuit$$

Comentários (importantes). Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua e fechada.

- Não é necessário que $I(\gamma)$, o interior a γ, esteja contido em Ω. Vide figura:

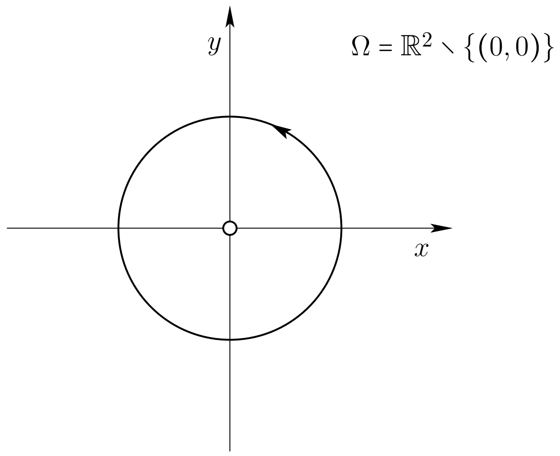

Figura 7.15: O interior de γ não está dentro de Ω

Peço ao leitor que encontre exemplos "não óbvios" de uma tal geometria.

- Se γ é Ω-homotópica a um ponto p então $p \in \Omega$.

- Se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ está contido em $E(\gamma)$, o exterior de γ, então

$$K(\gamma) = I(\gamma) \cup \mathrm{Imagem}(\gamma) \ \ \text{é um compacto contido em } \Omega.$$

- A condição

$$\mathrm{Ind}_\gamma \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega \ [\text{i.e., } \mathbb{C} \setminus \Omega \subset E(\gamma)] \text{ indica que}$$

  γ não dá "voltas" (num sentido algébrico) em torno de pontos que estão fora do aberto Ω.

- Se γ é Ω-homotópica a um ponto, temos $\mathrm{Ind}_\gamma \equiv 0$ no complementar de Ω. Tal fato segue da prova da Proposição 7.18 [cheque].

Exercício. Parametrize a curva γ (contínua) em S^1 que inicia em $z = 1$ e no sentido anti-horário retorna ao ponto $z = 1$ e então no sentido horário continua do ponto $z = 1$ até o ponto $z = 1$. Determine $\mathrm{Ind}(\gamma; 0)$, o interior de γ e o exterior de γ. Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostre que γ é então Ω-homotópica a um ponto. Mostre diretamente que temos $\mathrm{Ind}_\gamma \equiv 0$ para todo ponto no complementar de Ω.

7.20 Definição. *Uma curva contínua* $\gamma : [a, b] \to \Omega$ *satisfazendo*

$$Ind_\gamma \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega,$$

é denominada Ω-homóloga *a* 0.

Notação. *Se* γ *é* Ω*-homóloga a* 0, *escrevemos*

$$\gamma \sim 0 \quad [em\ \Omega].$$

Assim como a teoria da homotopia, também a teoria da homologia (*estudo das semelhanças*) serve para, via álgebra, classificar espaços topológicos segundo seus "buracos". Somente a partir da Seção 10.5 (Teorema de Cauchy Homológico) é que usamos a terminologia "homologia" com frequência.

Sejam f analítica em Ω e uma curva γ contínua e fechada em Ω e satisfazendo

$$\text{Ind}_\gamma \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega \text{ e } \text{Ind}_\gamma \equiv 1 \text{ em } I(\gamma), \text{ o interior de } \gamma.$$

O número de zeros de f no interior de γ e contados com suas multiplicidades é

$$Z(f;\gamma) = \sum_{a \in \mathcal{Z}_f \cap I(\gamma)} \nu(f;a).$$

7.21 Teorema. *Seja* Ω *um aberto conexo e* γ *uma curva fechada, contínua e* Ω*-homotópica a um ponto [logo,* $Ind_\gamma \equiv 0$ *no complementar de* Ω*].*

- **Princípio do Argumento, para funções analíticas.** *Seja* f *analítica em* Ω *e não se anulando em Imagem*(γ)*. Então,*

$$Ind(f \circ \gamma; 0) = \sum_{a \in \mathcal{Z}_f} \nu(f;a) Ind(\gamma;a).$$

- **Teorema de Rouché.** *Suponhamos que* γ *satisfaz* $Ind_\gamma \equiv 1$ *em* $I(\gamma)$*. Sejam* f *e* g *analíticas em* Ω *e tais que* $|g| < |f|$ *em Imagem*(γ)*. Então,*

$$Z(f+g;\gamma) = Z(f;\gamma).$$

Prova.

- Princípio do Argumento. Seja $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ a homotopia de γ a um ponto p em Ω. Pelos comentários prévios, e a continuidade de H, segue que

$$K = I(\gamma) \cup \text{Imagem}(\gamma) \cup \text{Imagem}(H)$$

é compacto em Ω. Pelo princípio dos zeros isolados, a função f tem uma quantidade finita $z_1, \ldots, z_n$ de zeros distintos em K. Vale a fatoração

$$f(z) = (z - z_1)^{\nu_1} \cdots (z - z_n)^{\nu_n} g(z), \text{ com } g \text{ não se anulando em } K,$$

onde $\nu_j = \nu(f; z_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Pela Propriedade (I4) segue

$$\text{Ind}(f \circ \gamma; 0) = \nu_1 \text{Ind}(\gamma; z_1) + \cdots + \nu_n \text{Ind}(\gamma; z_n) + \text{Ind}(g \circ \gamma; 0).$$

Claramente $g \circ H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ é uma $\mathbb{C}$-homotopia da curva $g \circ \gamma$ ao ponto $g(p) \neq 0$. Ainda mais, $0 \notin \text{Imagem}(g \circ H)$. Pelo Lema 7.17 segue

$$\text{Ind}(g \circ \gamma; 0) = \text{Ind}(g \circ H_0; 0) = \text{Ind}(g \circ H_1; 0) = \text{Ind}(g(p); 0) = 0.$$

Para completar a prova deste princípio, notemos que

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_f} \nu(f; a) \text{Ind}(\gamma; a) = \sum_{a \text{ é interior a } \gamma} \nu(f; a) \text{Ind}(\gamma; a) = \sum_{j=1}^{n} \nu(f; z_j) \text{Ind}(\gamma; z_j).$$

- Teorema de Rouché. Devido à hipótese temos

$$|(f + g) \circ \gamma - f \circ \gamma| < |f \circ \gamma|.$$

Pelo Lema 7.14 segue

$$\text{Ind}\left[(f + g) \circ \gamma; 0\right] = \text{Ind}(f \circ \gamma; 0).$$

Então, pelo Princípio do Argumento (para analíticas) segue

$$\sum_{a \in Z_{f+g}} \nu(f + g; a) \text{Ind}(\gamma; a) = \sum_{a \in Z_f} \nu(f; a) \text{Ind}(\gamma; a).$$

Pela hipótese $\text{Ind}_\gamma \equiv 1$ no interior de γ, segue imediatamente a tese ♣