MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

A introdução ao Capítulo 4 se baseia em notas do Professor Jorge Aragona.

Capítulo 4 - Séries e Somabilidade

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

4.1 - Introdução

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e uma sequência (a_n), real ou complexa.

A série de termo geral a_n [ou série gerada pela sequência (a_n)] é o par ordenado

$$\big((a_n), (s_n)\big),$$

com (s_n) a sequência das somas parciais de (a_n) e

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

a soma parcial de ordem n da série. [Explicitamos como somar os termos de (a_n).]

Tal série é dita convergente se (s_n) converge em $\mathbb{K}$ e, neste caso, $s = \lim s_n$ é a soma da série indicada por

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

A série é dita divergente se (s_n) é divergente.

Abusando da notação, denotamos uma série arbitrária $\big((a_n), (s_n)\big)$ por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

Se a série é de números reais e $\lim s_n = \pm\infty$, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty.$$

Ainda, dado p em $\mathbb{N}$, definimos a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ como

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \text{ onde } b_n = 0, \text{ se } n < p, \text{ e } b_n = a_n \text{ se } n \geq p.$$

Para investigar a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ podemos ignorar qualquer quantidade finita de seus termos pois temos

$$s_n = s_p + \sum_{m=p+1}^{n} a_m, \text{ para todo } n > p,$$

e é claro que existe $\lim s_n$ se e só se existe

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=p+1}^{m=n} a_m.$$

Isto é, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e só se a série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$ converge. Se uma destas converge, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n.$$

Uma série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge se e somente se suas partes real e imaginária, dadas pelas séries reais $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$, convergem e então segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

4.1 Proposição. *Suponhamos $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se, e só se, a sequência das somas parciais $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ é limitada.*

Prova.

Trivial, devido à propriedade do supremo♣

4.2 Proposição. *O espaço das séries convergentes em $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Ainda, dadas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergentes em $\mathbb{K}$ e λ arbitrário em $\mathbb{K}$ temos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Prova.

Segue das propriedades para limites de sequências♣

4.3 Critério do Termo Geral. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge então* $\lim a_n = 0$.

Prova.

Seja $s = \lim s_n = \lim s_{n+1}$. Temos $\lim a_n = \lim(s_{n+1} - s_n) = s - s = 0$♣

Exercício. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & \text{se } |z| < 1, \\ \text{diverge}, & \text{se } |z| \geq 1. \end{cases}$$

A Figura 4.1, abaixo, ilustra geométricamente a série geométrica e real

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n, \text{ com } 0 < r < 1.$$

Se θ é o ângulo indicado, por semelhança de triângulos temos

$$\frac{1 + r + \cdots + r^n + \cdots}{1} = \frac{1}{1-r} = \frac{r}{r - r^2} = \cdots = \frac{r^n}{r^n - r^{n+1}} = \cdots.$$

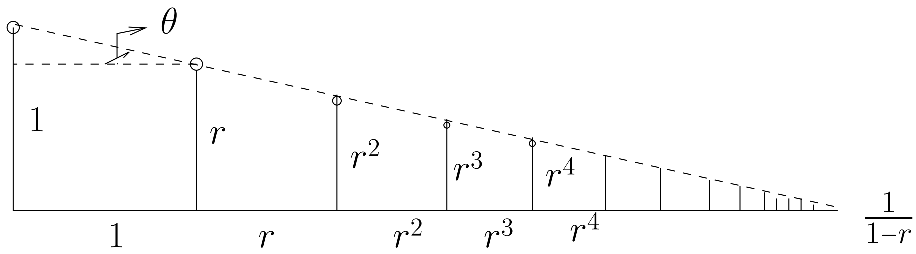

Figura 4.1: Série Geométrica de Razão $0 < r < 1$.

4.4 Critério de Cauchy (para séries numéricas). *A série complexa* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente se e somente se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon, \textit{para quaisquer } n > n_0 \textit{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Prova.

Temos $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, com s_n a n-ésima soma parcial da série, a qual converge se e só se (s_n) é uma sequência de Cauchy. Donde, a tese♣

4.2 - Convergência Absoluta e Testes da Raiz e da Razão.

Definição. *A série complexa* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é*

- absolutamente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty$.
- condicionalmente convergente *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente e* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

No Teorema 4.16 veremos que as séries absolutamente convergentes convergem. Um exemplo clássico de série condicionalmente convergente é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(série harmônica alternada).}$$

4.5 Critério da Comparação. *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *séries complexas, tais que* $|a_n| \leq c|b_n|$, *para algum* $c > 0$ *e para todo* $n > n_0$ *[para algum* n_0 *fixo], e* $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < \infty$. *Então,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Prova. Trivial♣

4.6 Teste da Raiz. *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *uma série complexa e*

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R \in [0, +\infty].$$

(a) Se $R < 1$, *a série dada é absolutamente convergente.*

(b) Se $R > 1$, *a série dada é divergente.*

(c) Se $R = 1$, *o teste é ineficiente.*

Prova.

(a) Fixando λ tal que $0 \leq R < \lambda < 1$, por definição de $\limsup$ existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$ então $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ e portanto $|a_n| < \lambda^n$. Donde,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda^n < \infty.$$

(b) Pela definição de $\limsup$ existe uma subsequência (a_{n_k}) com $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$, para todo k. Donde, $|a_{n_k}| > 1$ se $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim a_n \neq 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

(c) Solicitamos ao leitor encontrar exemplos apropriados♣

4.7 Teste da Razão *Dada* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, *em* $\mathbb{C}$ *e com termos gerais* $a_{n's} \neq 0$, *sejam*

$$r = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad e \quad R = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ .$$

(a) Se $R < 1$, *a série dada é absolutamente convergente.*

(b) Se $r > 1$, *a série dada é divergente.*

(c) Se $r \leq 1 \leq R$, *o teste é ineficiente.*

Prova.

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $R < \lambda < 1$.

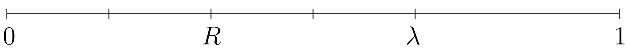

Figura 4.2: Teste da razão com $R < 1$

Pela definição de lim sup, existe n_0 tal que para $n > n_0$ temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lambda.$$

Então, para $n > n_0$ obtemos a desigualdade

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} |a_{n_0}| \leq \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}|,$$

donde segue $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

(b) Existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

e, portanto, $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$.

(c) Solicitamos ao leitor encontrar exemplos apropriados♣

Exercício. Seja (x_n) uma sequência limitada em $(0, +\infty)$. Mostre que

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \ \leq \ \liminf \sqrt[n]{x_n} \ \leq \ \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \ \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Em particular,

$$\text{se } \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in [0, +\infty] \text{ então } \lim \sqrt[n]{x_n} = L.$$

4.3 - Somas Não Ordenadas em $\mathbb{C}$

A Definição 4.10 de famílias somáveis [em $\mathbb{K}$] a seguir, equivale à usual. De fato, decorre da definição clássica de somabilidade que uma família $(v_j)_J$ em um espaço vetorial normado e completo $(V, \|\cdot\|)$ [i.e., um espaço em que as sequências de Cauchy convergem] é somável se e só se ela é absolutamente somável [i.e., $\sum_J \|v_j\| < \infty$]. Com a definição aqui adotada, tal equivalência se mantém.

Seja X um conjunto arbitrário e J um conjunto de índices arbitrário. Uma família em X, indexada em J, é uma função $x : J \to X$. Indicamos a família x por

$$(x_j)_{j\in J} \text{ ou } (x_j)_J \text{ ou, brevemente, } (x_j).$$

Dada uma família (p_j) contida em $[0, +\infty]$, definimos

$$\sum_{j\in J} p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j : \ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \text{ em } [0, +\infty].$$

Tal sup é finito se e somente se existe um real $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{j\in F} p_j \leq M, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ contido em } J.$$

Também escrevemos $\sum_J p_j$ para $\sum_{j\in J} p_j$, ou ainda, $\sum p_j$ se J é subentendido.

4.8 Proposição. *Sejam $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ duas famílias em $[0, +\infty]$. Então,*

(a) $\sum(p_j + q_j) = \sum p_j + \sum q_j$.

(b) $\sum \lambda p_j = \lambda \sum p_j$, *para todo* λ *em* $[0, +\infty)$.

(c) (Propriedade Comutativa) *Se $\sigma : \mathcal{K} \to J$ é uma bijeção, então*

$$\sum_J p_j = \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}.$$

Prova.

(a) e (b). Triviais

(c) São iguais os conjuntos sobre os quais computamos $\sum_J p_j$ e $\sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}$♣

Dada uma família $(p_j)_J$ em $[0,+\infty]$, se $\sum_J p_j$ é finito (um número real), dizemos que $(p_j)_J$ é uma família somável e que sua soma é o número

$$\sum_J p_j.$$

Escrevemos $\sum_J p_j < \infty$, indicando que $(p_j)_J$ é (família) somável.

4.9 Teorema (Associatividade). *Seja $(p_j)_J$ uma família em $[0,+\infty]$ e J uma reunião de conjuntos J_k, com k em $\mathcal{K}$, dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_J p_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

Prova. Mostremos duas desigualdades.

- ◇ Dado F finito e contido em J, por hipótese existem índices distintos $k_1,\ldots,k_l$, todos em $\mathcal{K}$, tal que $F \subset J_{k_1} \uplus \ldots \uplus J_{k_l}$. Donde segue

$$\sum_F p_j = \sum_{F\cap J_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F\cap J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{J_{k_1}} p_j + \;\cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j$$

e então, pela definição de $\sum_J p_j$,

$$\sum_J p_j \;\leq\; \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j.$$

- ◇ Dados índices distintos $k_1,\ldots,k_l$ em $\mathcal{K}$ e conjuntos finitos F_{k_r}, com $F_{k_r} \subset J_{k_r}$ se $1 \leq r \leq l$, os conjuntos $J_{k_1},\ldots,J_{k_l}$ são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos $F_{k_1},\ldots,F_{k_l}$ também. Sendo assim, temos

$$\sum_{F_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j\ .$$

Então, fixando os conjuntos $F_{k_2},\ldots,F_{k_l}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{k_1} contidos em J_{k_1} obtemos a desigualdade

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{F_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \leq \sum_J p_j.$$

Argumentando analogamente $(l-1)$-vezes obtemos

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{J_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j.$$

Por fim, como $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$ é qualquer subconjunto finito de $\mathcal{K}$ concluímos

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{j\in J_k} p_j \;\leq\; \sum_J p_j\ ♣$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Suas partes positiva e negativa são, respectivamente,

$$p = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad q = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq |x| \\ 0 \leq q \leq |x| \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = p - q \\ |x| = p + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2} \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

4.10 Definição. *Seja J um conjunto de índices.*

- *Uma família (x_j) de números reais é* somável *se as famílias (p_j) e (q_j) das partes positivas e negativas de x_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (x_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j.$$

- *Uma família (z_j) de números complexos é* somável *se as famílias $\big(Re(z_j)\big)_J$ e $\big(Im(z_j)\big)_J$, das partes reais e imaginárias de z_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (z_j) é somável, sua* soma (não ordenada) *é*

$$\sum z_j = \sum Re(z_j) + i \sum Im(z_j).$$

- *Uma família (z_j), de números reais ou complexos, é uma família* absolutamente somável *se a família $(\,|z_j|\,)_J$ é somável. Isto é, se*

$$\sum |z_j| < \infty \ .$$

4.11 Teorema. *Seja* (z_j) *uma família de números complexos. São equivalentes:*

(a) (z_j) *é somável.*

(b) (z_j) *é absolutamente somável.*

Prova.

Consideremos as famílias de números reais $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, denotadas (p_j) e (P_j), respectivamente, e de suas partes negativas, denotadas (q_j) e (Q_j), também respectivamente.

Para todo j em J temos

$$(4.11.1) \qquad 0 \le \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \le |z_j| \le p_j + q_j + P_j + Q_j \ .$$

Logo, $\sum |z_j|$ é finita se e somente se $\sum p_j$, $\sum q_j$, $\sum P_j$ e $\sum Q_j$ são finitas. Donde concluímos que a família $(|z_j|)$ é somável se e somente se a família (z_j) é somável♣

4.12 Corolário. *Seja* $(z_j)_J$ *somável e* $\mathcal{K} \subset J$*. Então, a família* $(z_k)_{k\in\mathcal{K}}$ *é somável.*

Prova.

Pelo teorema (4.11) temos $\sum_J |z_j| < \infty$. É fácil ver que $\sum_{\mathcal{K}} |z_k| \le \sum_J |z_j|$. Utilizando novamente o teorema 4.11, concluímos que $(z_k)_{\mathcal{K}}$ é somável♣

4.13 Proposição *Seja* $\mathbb{K}$ *fixo. Sejam* $(a_j)_J$ *e* $(b_j)_J$ *famílias somáveis em* $\mathbb{K}$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Então, as famílias* $(a_j{+}b_j)_J$ *e* $(\lambda a_j)_J$ *são somáveis e valem as propriedades:*

(a) $\sum (a_j + b_j) = \sum a_j + \sum b_j$.

(b) $\sum \lambda a_j = \lambda \sum a_j$.

Prova. Exercício.

4.14 Teorema (Propriedade Comutativa). *Seja* $(z_j)_J$ *uma família somável arbitrária de números complexos e* $\sigma : \mathcal{K} \to J$ *uma bijeção. Então,*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} z_{\sigma(k)}.$$

Prova. Exercício.

4.15 Teorema (Lei Associativa para Somas Não Ordenadas). *Seja* $(z_j)_J$ *uma família somável em* $\mathbb{C}$*. Suponha* J *uma união de conjuntos* J_k*, com* k *em* $\mathcal{K}$*, dois a dois disjuntos. Então, a família* $(z_j)_{j\in J_k}$ *é somável, para todo* k *em* $\mathcal{K}$*, e*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{J_k} z_j.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor (z_j) somável e contida em $[0,\infty)$. Pela associatividade para somas de números positivos (Teorema 4.9), segue a tese♣

4.4 - Séries e Somabilidade. Convergência Comutativa

4.16 Teorema. *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *uma série complexa. São equivalentes,*

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é absolutamente convergente.*

(b) A família $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é somável.*

Ocorrendo (a) ou (b), segue que a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum z_n.$$

Prova.

Decompondo z_n em suas partes real e imaginária e estas em suas partes positiva e negativa concluímos que, graças às desigualdades (4.11.1), à definição de família somável complexa (e de sua soma) e às propriedades de linearidade das séries (absolutamente) convergentes, podemos supor $z_n = p_n$ em $[0,+\infty)$.

Seja (s_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$. Fixemos n em $\mathbb{N}$ e um subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, ambos quaisquer. Seja $\max(F)$ o máximo de F. Temos,

$$s_n = \sum_{\{1,\ldots,n\}} p_j \leq \sum_{\mathbb{N}} p_n \quad \text{e} \quad \sum_F p_j \leq s_{\max F} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Donde segue

$$\sum_{j=1}^{+\infty} p_n \leq \sum p_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \clubsuit$$

4.17 Definição. *Uma série complexa* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é* comutativamente convergente *se para toda* permutação *(ou, bijeção)* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_{\sigma(n)}$$

é convergente. Esta última série é um rearranjo *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

4.18 Teorema. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *uma série real. São equivalentes:*

(a) A série dada é absolutamente convergente.

(b) A série é comutativamente convergente [e a soma independe do rearranjo].

Prova.

(a) $\Rightarrow$(b) Segue do Teorema 4.16 e da propriedade comutativa para a família então somável (x_n).

(b) $\Rightarrow$(a). Por contradição.

Suponhamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge comutativamente e $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Sejam p_n e q_n as partes positiva e negativa de x_n, para todo n. Então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(p_n - q_n) \text{ é finita e } \sum_{n=0}^{+\infty}(p_n + q_n) = +\infty.$$

Segue então (trivialmente) que ambas, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$, divergem.

A seguir, reordenamos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ da seguinte forma.

- Na etapa 0, coletamos os primeiros termos $x_n \geq 0$, com soma > 1.
- Na etapa 1, coletamos os primeiros termos estritamente negativos cuja soma com os já coletados é < 0.
- Na etapa 2, subtraídos de $\mathbb{N}$ os índices já selecionados, coletamos os próximos termos $x_n \geq 0$ cuja soma com os já coletados é > 1.
- Iterando, o rearranjo obtido é tal que a sequência (S_n) de suas somas parciais satisfaz $S_{2n} > 1$ e $S_{2n+1} < 0$, para todo n. Logo, (S_n) diverge♣