Oswaldo Rio Branco de Oliveira

MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira oliveira@ime.usp.br

Capítulo 13 - Continuação Analítica e Monodromia

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

Capítulo 9

TEOREMA E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 11

APLICAÇÕES DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 12

RUNGE E MITTAG-LEFFLER

Capítulo 13

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA E MONODROMIA

13.1 - Introdução

Neste capítulo, todas as curvas são contínuas.

Com frequência, funções holomorfas em uma região (i.e., um conjunto aberto e conexo) admitem extensões holomorfas a uma região maior. Pelo Princípio de Identidade (6.5) a extensão, se existir, é única. O processo de extensão é chamado continuação analítica e permite trocar funções multi-valuadas (e.g., raíz quadrada, argumento/logaritmo, etc.) por funções. Vimos um pouco desta técnica nos capítulos 7 e 8 [vide Teorema 7.11 e Teorema de Cauchy homotópico 8.6].

Sejam U e V abertos conexos, com $U \cap V \neq \varnothing$. Seja $f : U \to \mathbb{C}$ analítica.

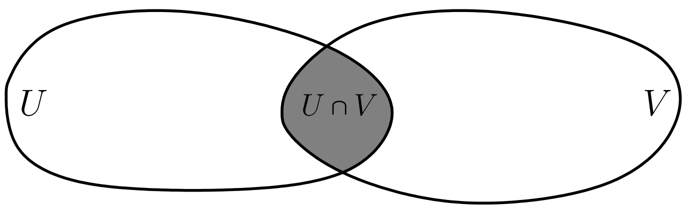

Figura 13.1: Continuação analítica direta

Desejamos saber se existe $g : V \to \mathbb{C}$ analítica e satisfazendo $f = g$ na intersecção $U \cap V$ ou, pelo menos, $f = g$ em um subconjunto não discreto de $U \cap V$. Se existir, g é única. Neste caso, g é uma continuação analítica direta de f e o par (g, V) é dito uma continuação analítica direta do par (f, U).

O adjetivo “direta” é útil para haver uma distinção com o conceito de continuação analítica ao longo de uma curva. Se não há risco de confusão, é frequente a omissão do termo “direta”.

Se houver uma continuação analítica direta, como citada, então existe uma única função h analítica na reunião $U \cup V$ satisfazendo

$$h = f \text{ em } U \text{ e } h = g \text{ em } V.$$

No caso do Princípio da Reflexão de Schwarz (vide seção 10.6), os abertos são disjuntos entretanto tem parte de suas fronteiras em comum.

13.2 - Continuação Analítica ao longo de uma Curva

Neste seção as curvas são contínuas (não necessariamente deriváveis).

Sejam $B_{j's}$ bolas abertas (ao invés, podemos escolher abertos convexos).

Seja f_0 analítica em B_0. Uma continuação analítica de (f_0, B_0) ao longo de uma sequência $(B_0, \ldots, B_n)$ é uma sequência de pares

$$(f_0, B_0), \ldots, (f_n, B_n),$$

com (f_{j+1}, B_{j+1}) uma continuação analítica direta de (f_j, B_j), para $j = 0, \ldots, n-1$.

A função f_n (se existir) é unicamente determinada pelo par (f_0, B_0) e pela sequência $(B_0, \ldots, B_n)$. De fato, se

$$(g_0, B_0) = (f_0, B_0), (g_1, B_1), \ldots, (g_n, B_n)$$

é também continuação analítica de (f_0, B_0), então na intersecção $B_0 \cap B_1$ [a qual é não vazia] temos $g_1 = g_0 = f_0 = f_1$. Como B_1 é conexo, segue $g_1 = f_1$ em B_1. Isto é, $g_1 = f_1$. Por indução, obtemos $g_n = f_n$.

Dizemos que o par (f_n, B_n) é

a continuação analítica de (f_0, B_0) ao longo de $(B_0, \ldots, B_n)$.

Atenção. Contra-exemplo. *Se o par (f_n, B_n) é a continuação analítica do par (f_0, B_0) ao longo da sequência $(B_0, \ldots, B_n)$ e se $B_n \cap B_0 \neq \emptyset$, não podemos garantir que tal continuação analítica é direta. Desta forma, a continuação analítica direta (que claramente satisfaz as propriedades reflexiva e simétrica) pode não ser transitiva. Exemplifiquemos com a "função $\sqrt{z}$".*

Verificação. Consideremos três bolas abertas [todas de raio 1]

$$B_0 = B(1;1), \quad B_1 = B(\omega;1) \quad \text{e} \quad B_2 = B(\omega^2;1),$$

onde ω é uma raíz primitiva de $\omega^3 = 1$.

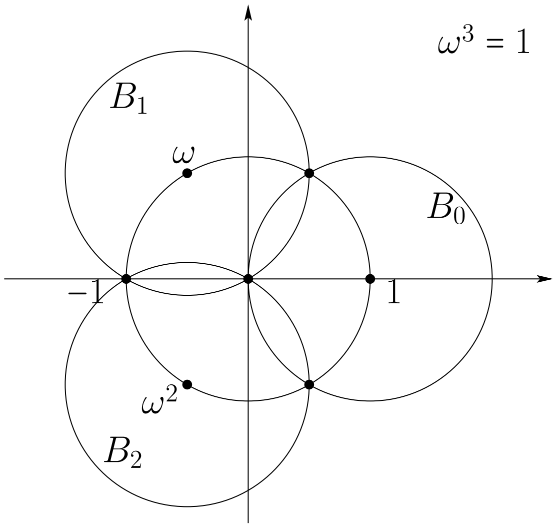

Figura 13.2: Contra-exemplo à transitividade da continuação analítica direta

Escolhamos

$$f_j \in \mathcal{H}(B_j) \text{ satisfazendo } f_j^2(z) = z, \text{ para cada } j = 0, 1, 2,$$

e tais que o par (f_1, B_1) é uma continuação analítica direta do par (f_0, B_0), com

$$f_0(x) = \sqrt{x} \in (0,1) \text{ se } 0 < x < 1,$$

ao passo que o par (f_2, B_2) é uma continuação analítica direta do par (f_1, B_1).

No aberto conexo e não vazio $B_2 \cap B_0$ temos

$$f_2^2 = f_0^2$$

e então

$$(f_2 - f_0)(f_2 + f_0) = 0$$

o que implica

$$f_2 = f_0 \text{ em } B_2 \cap B_0 \quad \text{ou} \quad f_2 = -f_0 \text{ em } B_2 \cap B_0.$$

- No primeiro caso [ito é, no caso $f_2 = f_0$ em $B_2 \cap B_0$], deduzimos que existe uma função f analítica satisfazendo

  $$f^2(z) = z \text{ para todo } z \text{ em } \Omega = B_0 \cup B_1 \cup B_2.$$

  Porém, dado $-x \in (-1,0)$ não existe z em Ω tal que $f(z) = -x$; caso contrário temos

  $$z = f^2(z) = x^2 \in (0,1) \text{ e então } -x = f(z) = f(x^2) = x \lightning$$

  Sendo assim, a imagem de f [isto é, $f(\Omega)$] é disjunta de $(-\infty, 0]$.

  Portanto, está bem definida a função

  $$\text{Log}(f(z)), \text{ para todo } z \in \Omega \qquad [\text{onde Log é o logaritmo principal}].$$

  Segue então a continuidade de

  $$\text{Log}(f(z)) = \ln|f(z)| + i\text{Arg}(f(z)), \text{ onde } z \in \Omega.$$

  Encontramos então

  $$f(z) = |f(z)|e^{i\text{Arg}(f(z))}$$

  e, elevando ao quadrado,

  $$z = |z|e^{2i\text{Arg}(f(z))} \text{ para todo } z \in \Omega.$$

  Desta forma, a função $2\text{Arg}(f(z))$ é um argumento contínuo em $\Omega \lightning$ [Tal fato contradiz o Teorema 7.9.]

Concluímos então que temos

$$f_2 = -f_0 \quad \text{em} \quad B_2 \cap B_0.$$

Assim, "após uma volta em torno da origem" obtivemos um determinação diferente da determinação inicial.

Observemos que

$$B_0 \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset \clubsuit$$

Exercício. *Suponha $B_0 \cap B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Mostre que se o par (f_{j+1}, B_{j+1}) é continuação analítica direta do par (f_j, B_j), para $j = 0$ e $j = 1$, então (f_2, B_2) é continuação analítica direta de (f_0, B_0).*

A seguir, nesta seção, fixemos uma curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua, com início $\gamma(0) = \alpha$ e final $\gamma(1) = \beta$. Ainda, consideremos uma partição

$$\mathcal{P} : \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = 1.$$

Seja B_j uma bola aberta contendo $\gamma(t_j)$, com $0 \leq j \leq n$. Dizemos que a sequência

$$(B_0, B_1, \ldots, B_n)$$

é conexa pela curva γ ao longo da partição $\mathcal{P}$ se a imagem $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ está contida em B_j, para $j = 0, \ldots, n$. Claramente, $\gamma(t_{j+1})$ pertence a $B_j \cap B_{j+1}$.

Seja f_0 analítica em B_0. Uma continuação analítica de (f_0, B_0) ao longo de uma sequência conexa $(B_0, \ldots, B_n)$ [por γ e ao longo de $\mathcal{P}$] é uma sequência de pares

$$(f_0, B_0), \ldots, (f_n, B_n)$$

tal que (f_{j+1}, B_{j+1}) é uma continuação analítica direta de (f_j, B_j).

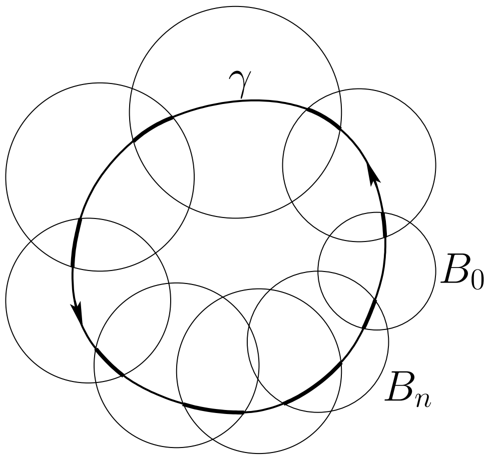

Figura 13.3: Continuação analítica (ao longo de uma curva fechada)

A seguir mostramos que f_n, em uma vizinhança de $\gamma(1)$, independe da partição e da sequência conexa. Dizemos, brevemente, que o par final (f_n, B_n) é a continuação analítica de (f_0, B_0) ao longo de γ. Indicamos o par final por f_γ.

13.1 Teorema. *Mantenhamos as notações acima [logo, γ fixada]. Seja*

$$(g_0, C_0), \ldots, (g_m, C_m)$$

uma continuação analítica de (g_0, C_0) ao longo de uma sequência conexa $(C_0, \ldots, C_m)$ com respeito a uma partição $\mathcal{Q}$. Se $f_0 = g_0$ numa vizinhança do ponto inicial $\gamma(0)$, então temos $f_n = g_m$ em uma vizinhança do ponto final $\gamma(1)$.

Prova.

- O caso $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$. Temos $f_0 = g_0$ em uma vizinhança de $\gamma(0)$ e $B_0 \cap C_0$ é conexo. Donde segue $g_0 = f_0$ no aberto $B_0 \cap C_0$, o qual também contém $\gamma(t_1)$.

  Por hipótese, temos $f_1 = f_0$ em $B_1 \cap B_0$ e $g_1 = g_0$ em $C_1 \cap C_0$. Donde segue $g_1 = f_1$ na vizinhança aberta $C_1 \cap B_1 \cap C_0 \cap B_0$ do ponto $\gamma(t_1)$. Por indução concluímos $g_n = f_n$ em um aberto contendo $\gamma(t_{n+1}) = \gamma(1)$.

- O caso $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Vejamos o efeito de inserir um ponto t^* à partição $\mathcal{P}$. Digamos que $t^* \in (t_k, t_{k+1})$, para algum k. Consideremos a sequência conexa

  $$(B_0, \ldots, B_{k-1}, B_k, B_k, B_{k+1}, \ldots, B_n),$$

  com B_k repetido duas vezes. Então, $\gamma([t_k, t^*]) \subset B_k$ e $\gamma([t^*, t_{k+1}]) \subset B_k$ e

  $$(f_0, B_0), \ldots, (f_{k-1}, B_{k-1}), (f_k, B_k), (f_k, B_k), (f_{k+1}, B_{k+1}), \ldots, (f_n, B_n)$$

  é continuação analítica de (f_0, B_0) ao longo de $(B_0, \ldots, B_{k-1}B_k, B_k, B_{k+1}, \ldots, B_n)$.

  Assim, com a partição $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ [refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$] obtemos uma sequência conexa $(B_0, B_1^*, \ldots, B_l^*, B_n)$ tal que

  $$(f_0, B_0), (f_1^*, B_1^*), \ldots, (f_l^*, B_l^*), (f_n, B_n)$$

  é uma continuação analítica de (f_0, B_0). Com a mesma partição $\mathcal{L}$, temos uma continuação analítica

  $$(g_0, C_0), (g_1^*, C_1^*), \ldots, (g_l^*, C_l^*), (g_m, C_m)$$

  de (g_0, C_0). Pelo primeiro caso segue $f_n = g_m$ numa vizinhança de $\gamma(1)$♣

13.3 - Monodromia

O termo monodromia vem de *monos (único)+dromos (corrida)* ou "uma volta". Monodromia é o estudo de funções que falham em ser mono-valentes quando definidas em uma curva que dá uma volta em torno de uma singularidade.

Fixemos notações. Sejam Ω um aberto conexo e α e β dois pontos em Ω [notemos que tais pontos estão fixos, são arbitrários em Ω e podem coincidir]. Consideremos γ_0 e γ_1 duas curvas contínuas em Ω, ambas com início α e final β. Isto é,

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \alpha \quad \text{e} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \beta.$$

Seja

$$(13.3.1) \qquad \gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega, \quad \text{com} \quad \gamma(s,t) = \gamma_s(t),$$

uma homotopia entre γ_0 e γ_1, com as extremidades inicial α e final β fixas.

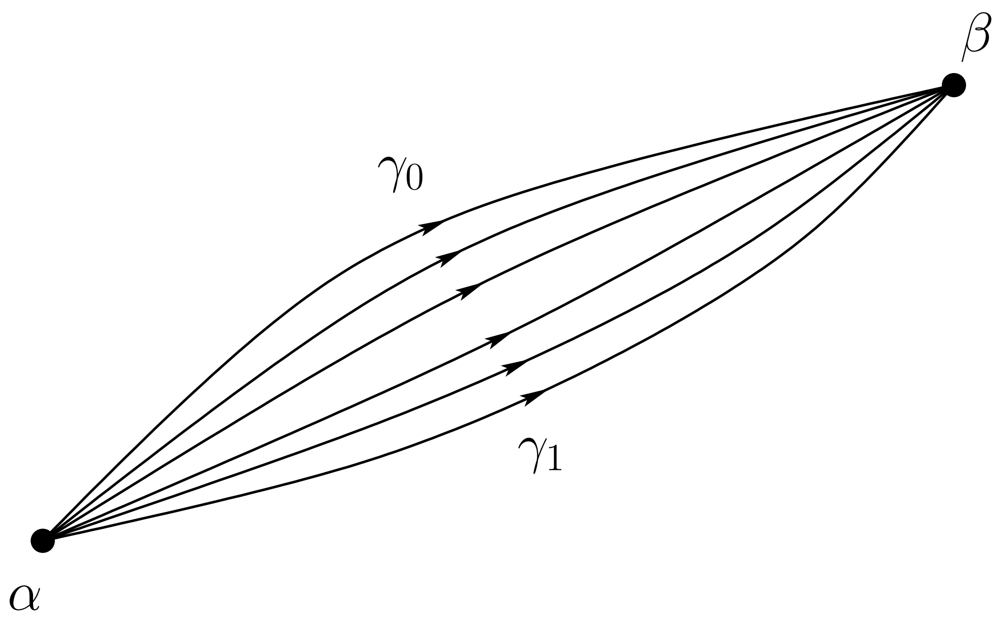

Figura 13.4: Homotopia entre curvas com mesmas extremidades (distintas)

Consideremos uma função f analítica numa vizinhança de α.

No que segue, mantemos as notações já introduzidas nesta seção.

O lema abaixo é central na prova do Teorema da Monodromia e torna a prova de tal teorema particularmente simples.

13.2 Lema. *Para s e s' (ambos no intervalo $[0,1]$) suficientemente próximos, as continuações analíticas da função f (se existirem) ao longo das curvas γ_s e $\gamma_{s'}$ coincidem em alguma vizinhança do ponto final β.*

Prova.

Pelo teorema 13.1 a continuação analítica de f, ao longo de uma curva, independe da partição e da sequência conexa consideradas.

Consideremos uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$$

e uma continuação analítica

$$(f_0, B_0), \ldots, (f_n, B_n)$$

ao longo de γ_s.

Pela continuidade uniforme da homotopia γ temos

$$\gamma_{s'}([t_j, t_{j+1}]) \subset B_j$$

para $|s' - s|$ pequeno o suficiente.

Consequentemente, a sequência

$$(f_0, B_0), \ldots, (f_n, B_n)$$

é uma continuação analítica de $\gamma_{s'}$ também♣

13.3 Teorema (Monodromia). *Suponhamos que f tem continuação analítica ao longo de cada curva γ_s. Então, f_{γ_0} e f_{γ_1} coincidem numa vizinhança de β.*

Prova.

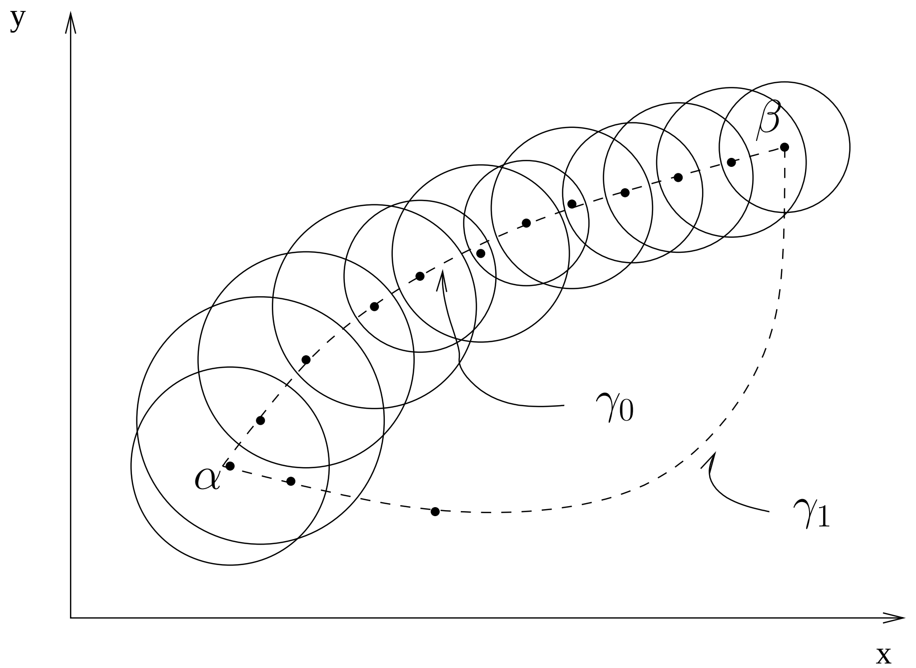

Figura 13.5: Monodromia

Pelo lema acima (13.2), o conjunto

$$S = \{s \in [0,1] : f_{\gamma_s} = f_{\gamma_0} \text{ em uma vizinhança de } \beta\}$$

é aberto e $0 \in S$. Fixado $s' \in \overline{S}$, pelo mesmo lema existe uma vizinhança V de s' tal que para todo v em V as continuações analíticas $f_{\gamma_{s'}}$ e f_{γ_v} coincidem numa vizinhança de β. Ora, existe $s^* \in V \cap S$. Então, $f_{\gamma_{s'}}$ e $f_{\gamma s^*}$ e f_{γ_0} coincidem numa vizinhança de β. Logo, $s' \in S$ que é então fechado. Por conexidade,

$$S = [0,1] \clubsuit.$$

Vejamos o teorema da monodromia em simplesmente conexos.

Interpretemos uma curva contínua fechada $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ como uma função

$$f : S^1 \to \mathbb{C}, \quad \text{onde} \quad f(e^{i\theta}) = \gamma(\theta), \quad \text{para todo} \quad \theta \in [0,2\pi].$$

13.4 Lema. *Seja Ω simplesmente conexo. A homotopia γ em (13.3.1) existe.*

Prova.

Parametrizemos γ_0 e γ_1 na semi-circunferência $\{\omega \in S^1 : \mathrm{Im}(\omega) \geq 0\} = S^1_+$, com $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \alpha$ e $\gamma_0(-1) = \gamma_1(-1) = \beta$. A curva fechada $\Gamma : S^1 \to \Omega$, com

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} \gamma_0(\omega), & \text{se } \mathrm{Im}(\omega) \geq 0, \\ \gamma_1(\overline{\omega}), & \text{se } \mathrm{Im}(\omega) \leq 0, \end{cases} \qquad \text{e diagrama} \quad \beta \underset{\Gamma}{\overset{\Gamma}{\leftrightarrows}} \alpha\,,$$

está bem definida. Existe uma homotopia $H : [0,1] \times S^1 \to \Omega$ contínua satisfazendo

$$H(0,\omega) = \Gamma(\omega), \quad H(1,\omega) = \alpha \text{ e } H(s,1) = \alpha, \text{ para todos } s \text{ e } \omega.$$

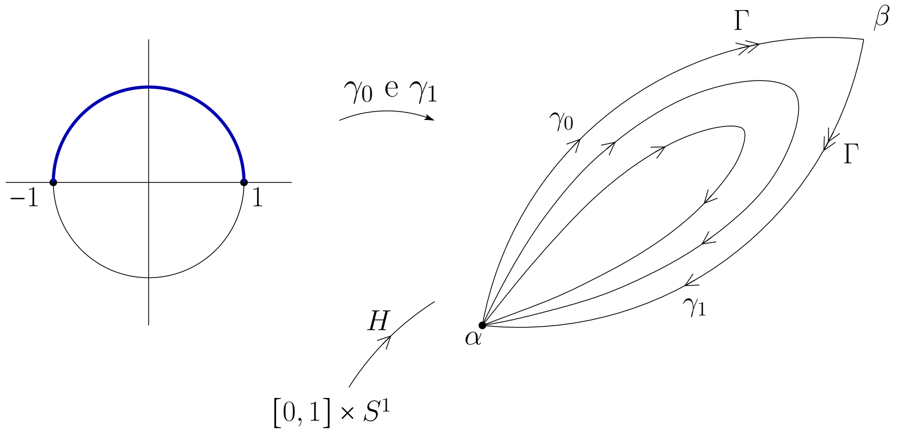

Figura 13.6: Homotopia entre curvas com mesmas extremidades

É bem definida [cheque] e contínua $\Phi : D(0;1) \to \Omega$ dada por

$$\Phi(r\omega) = H(1-r,\omega), \quad \text{onde } 0 \leq r \leq 1 \text{ e } \omega \in S^1.$$

Definamos

$$\gamma(s,\omega) = \Phi\big[(1-s)\omega + s\overline{\omega}\big], \quad \text{para } (s,\omega) \in [0,1] \times S^1.$$

Concluímos

$$\begin{array}{lllll} \gamma(s,1) & = \Phi(1) & = \Gamma(1) & = \alpha, & \text{para } s \in [0,1], \\ \gamma(s,-1) & = \Phi(-1) & = \Gamma(-1) & = \beta & \text{para } s \in [0,1], \\ \gamma(0,\omega) & = \Phi(\omega) & = \Gamma(\omega) & = \gamma_0(\omega), & \text{para } \omega \in S^1_+, \\ \gamma(1,\omega) & = \Phi(\overline{\omega}) & = \Gamma(\overline{\omega}) & = \gamma_1(\omega), & \text{para } \omega \in S^1_+ \clubsuit \end{array}$$

Exercício (outra prova do Lema 13.4). Complete a instrutiva prova (baseada em geometria cartesiana) em S. Lang, Undergraduate Analysis, 2nd ed., p. 453.

13.5 Teorema. *Seja Ω um aberto simplesmente conexo. Seja α um ponto em Ω e f analítica em α. Suponhamos que f pode ser continuada analiticamente ao longo de toda curva em Ω e com início α. Seja γ_z uma curva contínua em Ω e de α até o ponto z. Seja f_{γ_z} a continuação analítica de f ao longo de γ_z. Então,*

$$f_{\gamma_z}(z)$$

independe de γ_z e a função $z \mapsto f_{\gamma_z}(z)$ é analítica em Ω.

Prova. Solicito ao leitor (é simples)♣

Exercício. *Seja $\gamma : [0,1] \to \Omega$ contínua e fechada com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Suponhamos que γ é* livremente homotópica *a um ponto $q \in \Omega$ [isto é, a homotopia $\{H_s\}$ (de curvas fechadas) não necessariamente mantém os extremos fixos]. Mostre que γ_0 é homotópica a p por uma homotopia que mantém os extremos fixos.*

Exemplo. *Seja g analítica em um aberto conexo Ω (não necessariamente simplesmente conexo) [por exemplo, $g(z) = 1/z$ e $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$]. Fixemos z_0 em Ω. Seja f_0 uma primitiva de g em alguma bola aberta B_0 contendo z_0. Por exemplo,*

$$f_0(z) = \int_{z_0}^{z} g(w)dw, \text{ para todo } z \in B_0,$$

com a integral sendo computada ao longo de qualquer curva (C^1 por partes) com início z_0, final z e contida em B_0.

Vejamos que a função f_0 tem continuação analítica ao longo de qualquer curva

$$\gamma : [a,b] \to \Omega \text{ (de classe } C^1 \text{ por partes) com início } z_0.$$

Verificação. Consideremos c em $(a,b]$ e o ponto $z_c = \gamma(c)$. Então, definimos uma função f_c em uma bola aberta B_c centrada em z_c, e contida em Ω, essencialmente utilizando a integral de g ao longo do caminho que vai de z_0 até z_c.

Isto é, computamos a integral de g ao longo da restrição $\gamma : [a,c] \to \Omega$ (desde o ponto z_0 até o ponto z_c) e então, dado um ponto ζ arbitrário na bola B_c, definimos $f_c(\zeta)$ computando a integral de g ao longo de um caminho arbitrário (C_1 por partes) desde o ponto z_c ao ponto ζ e contido em B_c. Isto é,

$$f_c(\zeta) = \int_{\gamma|_{[a,c]}} g(w)dw + \int_{z_c}^{\zeta} g(w)dw, \text{ para todo } \zeta \in B_c.$$

É trivial ver que a função f_b é uma continuação analítica da função f_0.

Então, o teorema da monodromia se aplica a esta situação. Isto é, dadas duas curvas σ e η com mesmo início z_0, com mesmo ponto final e Ω homotópicas então as continuações analíticas de f_0 ao longo de σ e η coincidem em uma vizinhança do ponto final ♣