MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

http://www.ime.usp.br/~oliveira   oliveira@ime.usp.br

Capítulo 12 - Runge e Mittag-Leffler

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

Capítulo 9

TEOREMA E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 11

APLICAÇÕES DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 12

RUNGE E MITTAG-LEFFLER

12.1 - Teoremas de Runge

Pelo Teorema de Weierstrass, toda função contínua em um intervalo compacto pode ser aproximada uniformemente por polinômios. É então razoável investigarmos resultados análogos em análise complexa. Formulamos então a questão: "quais condições sobre um compacto K garantem que toda função f holomorfa numa vizinhança de K é tal que $f|_K$ é limite uniforme de polinômios?"

Um exemplo é dado pela expansão em séries de potências. Dada $f(z) = \sum a_n z^n$ holomorfa em uma bola aberta B, então $f|_K$ é limite uniforme de polinômios qualquer que seja o compacto K contido em B.

Em geral, entretanto, alguma condição deve ser imposta em K pois a função

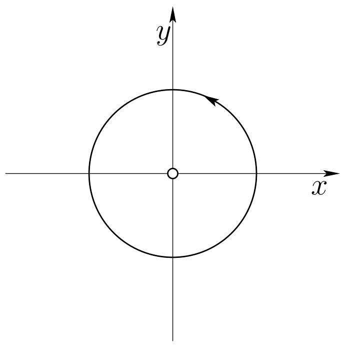

Figura 12.1: Contra-exemplo fundamental ao teorema de Runge

$1/z$ no compacto $K = S^1$ satisfaz

$$\int_{S^1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

e todo polinômio p satisfaz

$$\int_{S^1} p(z)dz = 0.$$

Logo, a função

$$\frac{1}{z} \text{ restrita ao } S^1$$

não é limite uniforme de polinômios.

A restrição sobre K que garante a aproximação refere-se à topologia do complementar:

$$K^c = \mathbb{C} \setminus K \text{ tem que ser conexo.}$$

Uma pequena modificação do exemplo

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

revela tal necessidade (vide exercício em Stein & Shakarchi p. 69).

Inversamente, existe aproximação uniforme polinomial se o complementar K^c é conexo e este resultado segue de um teorema de Runge que garante que para todo compacto K existe uma aproximação uniforme por funções racionais com "singularidades" (polos) prescritas em um subconjunto arbitrário no complementar de K.

Este teorema de Runge é espetacular pois as funções racionais são globalmente definidas ao passo que a função f é dada apenas na vizinhança de K. Em particular, f poderia ser definida independentemente em diferentes componentes de K, tornando a conclusão do teorema ainda mais surpreendente.

Como intuição geométrica (mínima) para esta seção, e a próxima, é útil ter em mente as seguintes (entre as infinitas) possibilidades para

$$\text{um aberto } O \text{ e seu complementar } O^c = \mathbb{C} \setminus O.$$

[Em geral, analisaremos o aberto $O = \Omega \setminus K$, com Ω aberto e K um compacto em Ω, ou o fechado $\mathbb{C} \setminus O$, ou mesmo ambos.]

- Uma componente limitada (compacta) de $\mathbb{C} \setminus O$ é um "buraco" em O.

- Se $O = \mathbb{C}$, então O é conexo, sem "buracos", e $\mathbb{C} \setminus O = \emptyset$ é conexo.

- Se $O = B(0;r)$, então O é conexo, sem buracos, e $\mathbb{C} \setminus O = \{z : |z| \geq r\}$ é conexo, com um "buraco", e tem uma única componente ilimitada.

- Se O é o anel circular
$$O = \{z : r < |z| < R\},$$
então O é conexo e $\mathbb{C} \setminus O$ tem duas componentes, uma compacta (um "buraco" em O) e uma ilimitada.

- Se
$$O = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x < 1\}$$
[uma "faixa" vertical ilimitada], então O é conexo e o complementar de O tem duas componentes ilimitadas. Ainda, O não tem "buracos". Ainda mais, $O^c = \mathbb{C} \setminus O$ também não tem "buracos".

- Se
$$O = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x < 1\} \setminus D\left(0; \frac{1}{2}\right),$$
então O é conexo e o complementar de O tem três componentes: duas ilimitadas e uma compacta. Assim, O tem um "buraco". Ainda, seu complementar $O^c = \mathbb{C} \setminus O$ não tem "buracos".

- Se $O = [B(0;10) \cup B(100;10)] \setminus [B(-4;1) \cup B(0;1) \cup B(4;1) \cup B(96;1) \cup B(100;1) \cup B(104;1)]$, então O não é conexo e tem duas componentes. Ainda, O tem 6 "buracos". Ainda mais, seu complementar $\mathbb{C} \setminus O$ tem 7 componentes: uma única componente ilimitada e 6 componentes compactas (os denominados "buracos de O].

Solicitamos ao leitor esboçar algumas outras possibilidades.

12.1 Lema (Sequência Exaustiva de Compactos). *Seja* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$. *Então, existe uma sequência de compactos* (K_n) *tal que*

(a) $K_n \subset int(K_{n+1})$,

(b) $\Omega = \bigcup K_n$,

(c) Para cada compacto $K \subset \Omega$, *existe* n *tal que* $K \subset int(K_n)$,

(d) Cada componente limitada de $\mathbb{C} \setminus K_n$ *contém uma componente de* $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

(e) Se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *não contém componentes limitadas, então* $\mathbb{C} \setminus K_n$ *é conexo.*

Intuitivamente, (d) expressa que os "buracos" de K_n *são os que provém de "buracos" de* Ω. *Já (e), diz que se* Ω *não tem "buracos" então* K_n *também não.*

Prova. O caso $\Omega = \mathbb{C}$ é trivial. Notemos $X^c = \mathbb{C} \setminus X$, para $X \subset \mathbb{C}$. Seja

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq n \text{ e } d(z;\Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\} \subset \Omega, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Claramente, K_n é limitado e uma intersecção de fechados. Logo, K_n é compacto.

(a) Dados
$$z \text{ em } K_n \text{ e } w \text{ em } B\left(z; \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$
encontramos $|w| \leq |w - z| + |z| \leq 1 + n$. A seguir, utilizando a desigualdade $|d(z;\Omega^c) - d(w;\Omega^c)| \leq |z - w|$ [verifique-a] obtemos
$$d(w;\Omega^c) \geq d(z;\Omega^c) - |w - z| \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$
Logo,
$$B\left(z; \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \subset K_{n+1}.$$

(b) Dado $z \in \Omega$, existe n em $\mathbb{N}^*$ tal que
$$|z| \leq n \text{ e } d(z;\Omega^c) \geq \frac{1}{n}.$$
Então, $z \in K_n$.

(c) Trivial, pois por (a) e (b) obtemos $\Omega = \bigcup \mathrm{int}(K_n)$.

(d) Seja
$$F_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : d(z;\Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Então, $K_n = D(0;n) \cap F_n$. Temos [cheque],
$$K_n^c = D(0;n)^c \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : d(z;\Omega^c) < \frac{1}{n} \right\} = D(0;n)^c \cup \bigcup_{w \in \Omega^c} B\left(w;\frac{1}{n}\right).$$

Os conjuntos $D(0;n)^c$ e $B(w;1/n)$, onde $w \in \Omega^c$, são conexos.

Seja C uma componente limitada de K_n^c. Como C é a união dos subconjuntos conexos de K_n^c que intersectam C, vemos que C não intersecta $D(0;n)^c$. Ainda mais,
$$C = \bigcup_{w \in \Omega^c} B\left(w;\frac{1}{n}\right) \cap C = \bigcup_{w \in C \cap \Omega^c} B\left(w;\frac{1}{n}\right) \quad \text{[cheque]}.$$

Em particular, $C \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Logo, $C \cap \Omega^c$ intersecta alguma componente (conexo maximal) $\mathcal{C}$ de Ω^c. Donde, $\mathcal{C}$ é um subconjunto conexo de $\Omega^c \subset K_n^c$. Logo, $\mathcal{C}$ é conexo em K_n^c e $\mathcal{C}$ intersecta C (uma componente de K_n^c). Logo,
$$\mathcal{C} \subset C.$$

(e) Segue de (d), pois K_n^c tem exatamente uma componente ilimitada♣

Façamos alguns esclarecimentos sobre a terminologia a seguir.

- Dizemos que um polinômio (não constante) é uma função racional com polo no infinito. Assim, uma função racional pode não ter polos em $\mathbb{C}$.
- A frase "uma função racional $R(z)$ com polos em um conjunto P", significa que os polos de $R(z)$, se existirem , formam um subconjunto de P. Assim, não é necessário que todo ponto de P seja um polo de $R(z)$

A demonstração do Teorema de Runge Polinomial I, que segue abaixo, apresenta o bastante útil argumento apelidado: "arrastar o polo".

12.2 Teorema (Runge). *Seja f holomorfa em uma vizinhança aberta Ω de um compacto K. Valem as propriedades a seguir.*

(a) $f\big|_K$ *é limite uniforme de funções racionais com polos em* $K^c = \mathbb{C} \setminus K$.

(b) **(Runge Polinomial I).** *Se* $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ *é conexo, então*

$$f\big|_K \text{ é limite uniforme de polinômios (restritos a } K\text{).}$$

(c) **(Runge Polinomial II).** *Se* $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ *não tem componente limitada, então existe uma sequência de polinômios* (P_n) *tal que*

$$P_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ nos compactos de } \Omega.$$

(d) **(Runge Racional I).** *Seja* $P \subset \mathbb{C}$ *tal que* P *intersecta cada componente limitada de* $\mathbb{C} \setminus K$. *Então,*

$$f\big|_K \text{ é limite uniforme de funções racionais com polos somente em } P.$$

(e) **(Runge Racional II).** *Seja* $P \subset \mathbb{C}$ *tal que* P *intersecta cada componente limitada de* $\mathbb{C} \setminus \Omega$. *Então, existe uma sequência* (R_n) *de funções racionais, com polos somente em* P, *tal que*

$$R_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ nos compactos de } \Omega.$$

Prova.

(a) Seja Ω um aberto contendo K e $\delta > 0$ tal que

$$\delta\sqrt{2} < d(K; \Omega^c).$$

Consideremos no plano uma grade de quadrados convexos e fechados de lados de comprimento δ e paralelos aos eixos coordenados, que cobre o plano. Os quadrados não são degenerados e tem interiores dois a dois disjuntos. Seja

$$\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$$

a coleção finita dos quadrados, na grade, intersectando K.

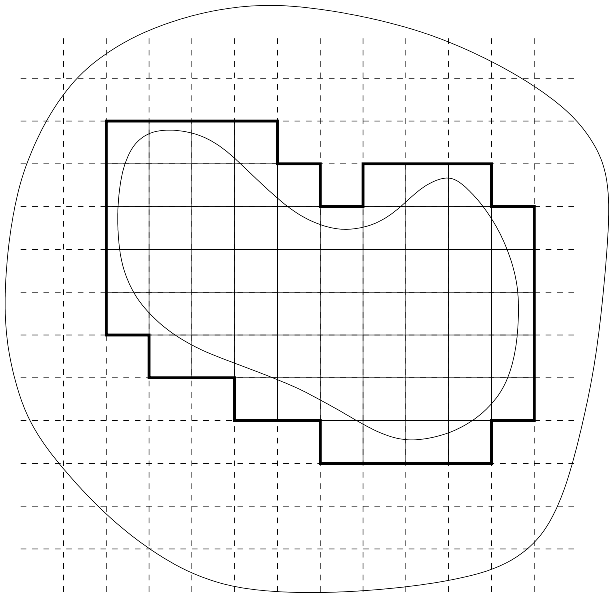

Figura 12.2: A grade e o compacto K.

Devido à escolha de δ, temos [verifique]

$$Q_\mu \subset \Omega, \text{ para todo } \mu = 1, \ldots, m.$$

Dado z em $\operatorname{int}(Q_1) \cup \cdots \cup \operatorname{int}(Q_m)$, pelo teorema de Cauchy temos

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_\mu} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Se Q_μ e $Q_{\mu'}$ são adjacentes, as integrais sobre o lado comum a eles tem sentidos opostos e se cancelam. Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ os lados dos quadrados em $\mathcal{Q}$ que não pertencem a dois quadrados adjacentes [ambos em $\mathcal{Q}$]. Tais lados não intersectam K [caso contrário, faltaria um quadrado em $\mathcal{Q}$]. Temos

$$2\pi i f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \text{para todo } z \text{ em } \bigcup_{\mu=1}^{m} \operatorname{int}(Q_\mu).$$

Cada função

$$z \mapsto \int_{\gamma_\nu} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

é derivável no aberto $\mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n)$. Assim, por continuidade segue

$$2\pi i f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{para todo } z \text{ em } (Q_1 \cup \cdots \cup Q_m) \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n).$$

[Note que tal identidade vale em $Q_\mu \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n)$ para cada $\mu = 1, \ldots, m$.]

Em particular, temos

$$2\pi i f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{para todo } z \in K.$$

Fixado um arbitrário ν, sejam

$$\gamma = \gamma_\nu \quad \text{e} \quad 2r = d(K;\gamma) > 0.$$

A seguir, dividimos γ em sub-segmentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de comprimentos menor que r. Então temos

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{\rho=1}^{p} \int_{\sigma_\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ para todo } z \text{ em } K.$$

Fixado um arbitrário ρ, sejam $\sigma = \sigma_\rho$ e fixemos um arbitrário α em Imagem(σ). Dado um arbitrário w em Imagem(σ) e um arbitrário z em K temos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-\alpha+\alpha-z} = \frac{\frac{1}{\alpha-z}}{1-\frac{\alpha-w}{\alpha-z}}, \qquad \text{com } \left|\frac{\alpha-w}{\alpha-z}\right| \leq \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Pelo teste-M de Weierstrass, a série (com α fixo) que define a função

$$(w,z) \longmapsto \frac{1}{1-\frac{\alpha-w}{\alpha-z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha-w}{\alpha-z}\right)^n$$

converge uniformemente em Imagem$(\sigma) \times K$.

Então, pelo Lema 9.14 concluímos que

$$\int_\sigma \frac{f(w)}{w-z} dw = \lim_{N\to+\infty} R_N(z), \quad \text{onde } R_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\int_\sigma f(w)(\alpha-w)^n dw}{(\alpha-z)^{n+1}},$$

converge uniformemente em K [cheque].

Se $f|_K$ não é identicamente nula, então uma subsequência de (R_n) é constituída por funções racionais não nulas e com polos no ponto $\alpha \in K^c$.

Se $f|_K \equiv 0$, aproximamos $g \equiv 1$ em K e uniformemente por funções racionais $S_n(z)$ com polos em K^c. Então, a sequência

$$R_n(z) = S_n(z) - 1$$

cumpre o desejado.

(b) Pelo item anterior, basta mostrar que, dado $\alpha \in K^c$, a função

$$\frac{1}{z-\alpha} \text{ restrita a } K$$

é limite uniforme de polinômios.

◇ O argumento "arrastar o polo".

Seja β um ponto no complementar de uma bola aberta $B(0;R)$ contendo o compacto K.

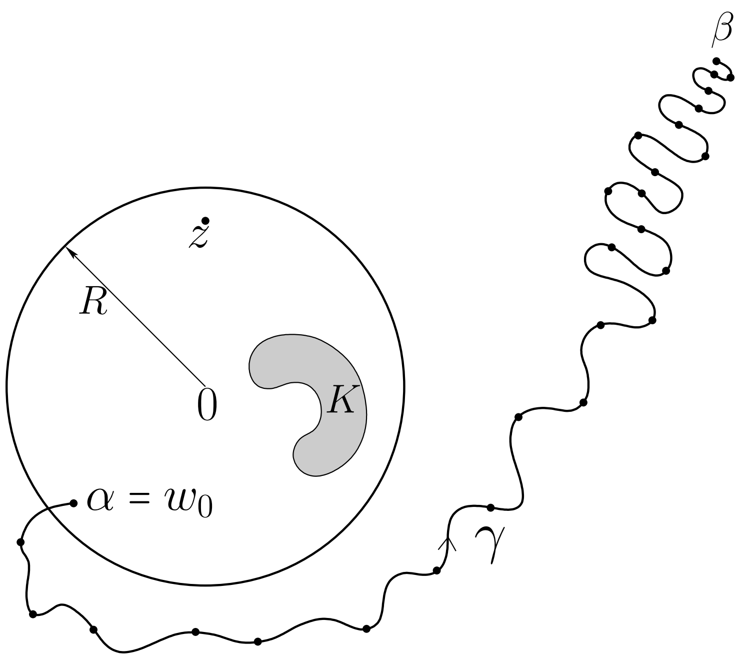

Figura 12.3: Arrastando o polo de α até β.

Então temos

$$\frac{1}{z-\beta} = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{1-\frac{z}{\beta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\beta^{n+1}}, \text{ para todo } z \in B(0;R),$$

com a série convergindo uniformemente em K. As somas parciais desta série são polinômios que convergem uniformemente à função a

$$\frac{1}{z-\beta} \text{ sobre } K.$$

Logo, para todo $m = 1, 2, 3, \ldots$, cada função

$$\frac{1}{(z-\beta)^m} \text{ restrita a } K$$

também é limite uniforme de polinômios.

Donde, resta apenas verificarmos que a função

$$\frac{1}{z-\alpha}, \text{ restrita a } K, \text{ é limite uniforme de polinômios em } \frac{1}{z-\beta}.$$

Como o complementar K^c é conexo, existe uma curva γ de classe C^1 por partes e satisfazendo

$$\gamma : [0,1] \to K^c, \quad \text{com} \quad \gamma(0) = \alpha \text{ e } \gamma(1) = \beta.$$

Vide Figura 12.2 na página anterior.

Seja $2r = d\big(K; \gamma[0,1]\big) > 0$. Consideremos então $\{t_0 = 0, \ldots, t_l = 1\}$ uma partição de $[0,1]$ e os pontos

$$w_0 = \gamma(t_0),\ w_1 = \gamma(t_1), \ldots, w_l = \gamma(t_l)$$

satisfazendo

$$|w_\lambda - w_{\lambda-1}| < r, \text{ para cada } \lambda = 1, \ldots, l.$$

◇ Afirmação. Se w e w' estão em Imagem(γ) e $|w - w'| < r$, então

$$\frac{1}{z-w} \text{ é limite uniforme em } K \text{ de polinômios em } \frac{1}{z-w'}.$$

De fato, isto segue do teste-M aplicado a

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-w'}\frac{1}{\left(1-\frac{w-w'}{z-w'}\right)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}.\end{aligned}$$

Isto nos permite arrastar o polo desde o ponto α até o ponto β em uma sequência finita de passos e então concluir que

$$\frac{1}{z-\alpha} \text{ restrita a } K \text{ é limite uniforme de polinômios em } \frac{1}{z-\beta}.$$

(c) Seja (K_n) uma sequência de compactos para Ω, como no Lema 12.1.

Como $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ não tem componentes limitadas, pelo Lema 12.1(e) segue que o conjunto $K_n^c = \mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo. Então, pelo item (b), para cada n existe um polinômio P_n satisfazendo

$$|P_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } z \in K_n.$$

Então, dado um compacto K arbitrário em Ω e um arbitrário $\epsilon > 0$, seja

$$N \geq 1 \text{ tal que } K \subset K_N \text{ e } \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Para todo $n \geq N$ temos $K \subset K_N \subset K_n$ e

$$|P_n(z) - f(z)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon, \text{ para todo } z \text{ em } K.$$

(d) Pelo item (a) basta verificar que dado um arbitrário $\alpha \in K^c$, a função

$$\frac{1}{z-\alpha} \text{ restrita a } K$$

é limite uniforme de funções racionais com polos em P. Vejamos dois casos.

- O ponto α pertence à componente conexa ilimitada de K^c.

  Neste caso, arrastando o polo [como em (b)] concluímos que a função

  $$\frac{1}{z-\alpha} \text{ restrita a } K \text{ é limite uniforme de polinômios.}$$

- O ponto α pertence a uma componente conexa limitada $\mathcal{C}$ de K^c.

  Consideremos um ponto p na intersecção $P \cap \mathcal{C}$ e uma curva, dentro de $\mathcal{C}$ e de classe C^1 por partes, conectando os pontos α e p. Arrastando o polo em α até o ponto p, analogamente ao item (b),

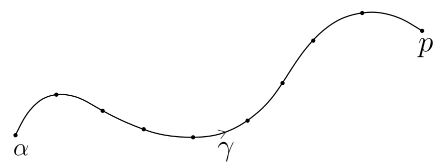

Figura 12.4: Arrastando o polo de α até p.

concluímos que a função

$$\frac{1}{z-\alpha} \text{ restrita a } K \text{ é limite uniforme de polinômios em } \frac{1}{z-p}.$$

(e) Seja (K_n) uma sequência de compactos para Ω, como no Lema 12.1. Devido às hipóteses e ao Lema 12.1(d), cada componente limitada de $\mathbb{C} \setminus K_n$ contém uma componente limitada de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e então intersecta P. Logo, por (d), para cada n existe uma função racional R_n, com polos apenas em P, satisfazendo

$$|R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } z \in K_n.$$

Então, dado um compacto K arbitrário em Ω e um arbitrário $\epsilon > 0$, seja $N \geq 1$ tal que $K \subset K_N$ e $\frac{1}{N} < \epsilon$. Para todo $n \geq N$ temos $K \subset K_N \subset K_n$ e

$$|R_n(z) - f(z)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon, \text{ para todo } z \text{ em } K \clubsuit$$

12.2 - Teorema de Mittag-Leffler

Se f é meromorfa e tem um polo de ordem m em z_0 então a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 é

$$P(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0},$$

que é um polinômio em

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

Assim, $f(z) - P(z)$ é holomorfa. O Teorema de Mittag-Leffler permite prescrever polos e a parte principal de uma função meromorfa.

12.3 Teorema (Mittag-Leffler). *Sejam Ω um aberto conexo e*

$$S = \{z_1, z_2, \ldots\}$$

uma sequência de pontos distintos em Ω, sem ponto de acumulação em Ω. Seja P_n um polinômio não nulo e sem termo independente, para cada n. Então, existe uma função meromorfa $f = f(z)$ em Ω cujos polos são os pontos $z_{n's}$ e tal que a parte principal de f no ponto z_n é

$$P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right).$$

Prova. Iniciemos com o caso $\Omega^c \neq \varnothing$.

Sejam K_n, com $n \geq 1$, compactos em Ω como no Lema 12.1. Definimos $S_1 = S \cap K_1$ e $S_n = S \cap (K_{n+1} \setminus K_n)$, para cada $n \geq 1$. Temos $S_n \subset K_{n+1}$ e, por hipótese, S não tem ponto de acumulação em Ω. Logo, S_n é finito. Seja

$$Q_n(z) = \sum_{z_j \in S_n} P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right), \text{ para cada } n \geq 1.$$

Os polos de Q_n são os pontos de S_n, todos fora de K_n, e Q_n é holomorfa em K_n. Então, pelo Lema 12.1(d) e o Teorema de Runge Racional I [12.2(d)] aplicados a K_n, à função Q_n [holomorfa em K_n] e ao conjunto $P = \Omega^c$ [notemos que $\Omega^c \subset K_n^c$], existe uma função racional R_n com polos em Ω^c [e então holomorfa em Ω] tal que

(12.3.1) $$|Q_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } z \text{ em } K_n.$$

Mostremos que a seguinte série converge em $\Omega \setminus S$ e é uma função como desejamos:

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{+\infty} [Q_n(z) - R_n(z)].$$

Fixemos $N \geq 2$. Dado $n \geq N$, temos $K_N \subset K_n$ com $Q_n - R_n$ holomorfa em K_N. Para tal n também temos

$$|Q_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } z \in K_N.$$

Portanto [propositalmente neglicenciemos $Q_N - R_N$],

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} (Q_n - R_n)$$

converge uniformemente sobre K_N a uma função holomorfa em $\operatorname{int}(K_N)$. Então,

$$f - (Q_1 + \cdots + Q_N) = -(R_2 + \cdots + R_N) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (Q_n - R_n)$$

é holomorfa em $\operatorname{int}(K_N)$. Logo, f tem a parte principal prescrita em cada $z_j \in S$.

Esboçemos o caso $\Omega = \mathbb{C}$. Seja $K_n = D(0; n)$, para $n = 1, 2, \ldots$. Definindo

$$Q_n(z) = \sum_{n < |z_j| \leq n+1} P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right),$$

seja $R_n(z)$ um polinômio oriundo da soma parcial da expansão em série de potências de $Q_n(z)$ em torno da origem, com R_n satisfazendo (12.3.1). Então, a construção acima nos oferta uma $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Escolhemos para f a função

$$f(z) = g(z) + \sum_{|z_j| \leq 1} P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) \qquad \text{[tal } f \text{ nos serve, cheque]} \clubsuit$$

12.3 - Método de Frações Parciais

Exemplo 12.4 *Determinemos f meromorfa em $\mathbb{C}$ com polos simples nos pontos*

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

e com resíduo igual a 1 em cada um destes polos.

Solução. A parte principal de f em cada ponto $z_n = n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, é

$$p_n(z) = \frac{1}{z-n}.$$

Entretanto, a série

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z-n}, \text{ para } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1, 2, 3, \ldots\}$$

não converge. Observemos que o primeiro termo (o termo constante) na expansão em série de potências da função $1/(z-n)$ em torno da origem é

$$-\frac{1}{n}.$$

Então, como segunda tentativa definimos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(z-n)}, \text{ para } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Como a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente, pelo teste-M segue que a série para f converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De fato, fixado $m \in \mathbb{N}^*$ e considerando z em $D(0; m)$, para n grande o suficiente [por exemplo, $n \geq 2m$] temos

$$n - m \geq \frac{n}{2} \text{ e então } |n(z-n)| \geq n(n - |z|) \geq n(n-m) \geq \frac{n^2}{2},$$

e desta forma, para cada z em $D(0; m)$ temos

$$\sum_{n \geq 2m} \frac{1}{|z(z-n)|} \leq \sum_{n \geq 2m} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Logo, a série para f converge compactamente a $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ e f atende o desejado ♣

Seja $f(z)$ meromorfa no plano complexo e com polos em pontos indicados por z_n. O conjunto de polos é discreto e então enumerável. Uma decomposição em frações parciais de f é uma expansão em uma série que converge uniformemente sobre os compactos:

$$f(z) = \sum R_n(z),$$

onde cada $R_n(z)$ é uma função racional cujo único polo (finito) ocorre em z_n. Portanto, $R_n(z)$ é a soma da parte principal de $f(z)$ no ponto z_n com um polinômio. Uma decomposição em frações parciais nunca é única pois sempre podemos adicionar qualquer polinômio a uma parcela do somatório e subtrai-lo de outra parcela.

Exemplo 12.5 *É válida a decomposição*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Solução. Seja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \text{ onde } z \in \mathbb{C} \setminus \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Fixado $m \in \mathbb{N}^*$ e considerando z em $D(0;m)$, para $n \geq 2m$ temos

$$n - m \geq \frac{n}{2} \text{ e então } |z-n|^2 \geq (n - |z|)^2 \geq \frac{n^2}{4},$$

e desta forma, para cada z em $D(0;m)$ encontramos

$$\sum_{n \geq 2m} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n \geq 2m} \frac{4}{n^2} < \infty.$$

Logo, a série para f converge uniformente a f sobre todo conjunto compacto K, após omitirmos os termos (da série) que em K assumem o valor infinito.

É trivial ver que

$$z = n \text{ é polo duplo da função } \varphi(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Determinemos a parte singular de $\varphi(z)$ em $z = 0$. Temos

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{\pi z - \pi^3 \frac{z^3}{3!} + \cdots} = \frac{1}{z} \frac{1}{[1 - z^2 h(z)]}, \text{ com } h \text{ inteira.}$$

Logo, devido às propriedades operatórias com séries geométricas e de potências [vide propriedades de composição (5.15) e inverso algébrico (5.16), capítulo 5], em alguma bola reduzida $B^*(0;r) = B(0;r) \setminus \{0\}$, com $r > 0$, temos

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z}\Big[1 + z^2 h(z) + z^4 h^2(z) + z^6 h^3(z) + \cdots\Big] = \frac{1 + z^2 H(z)}{z} = \frac{1}{z} + zH(z)$$

com H holomorfa em $B(0;r)$. Donde segue

$$\varphi(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + \big[2H(z) + z^2 H^2(z)\big], \text{ para } z \text{ em } B^*(0;r),$$

com $2H(z) + z^2 H^2(z)$ holomorfa em $B(0;r)$. Logo,

$$\text{a parte principal (singular) de } \varphi \text{ em } z = 0 \text{ é } \frac{1}{z^2}.$$

Desta forma, como $\sin^2 \pi(z - n) = \sin^2 \pi z$,

$$\text{a parte singular (principal) de } \varphi \text{ no ponto } z = n \text{ é } \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Portanto, $\varphi(z)$ e $f(z)$ tem mesma parte singular em cada polo $z = n$ e então

$$\Psi(z) = \varphi(z) - f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

é inteira. Mostremos que Ψ é identicamente nula.

Evidentemente, temos $f(z+1) = f(z)$ e $\varphi(z+1) = \varphi(z)$. Logo, Ψ é periódica e tem período 1. Analisemos então $\Psi = \varphi - f$ na faixa (vertical infinita)

$$\mathcal{F} = \{z = x + iy : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

- Primeiro, analisemos f. Notemos a simetria

  $$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

  Assim, para mostrar que $|f(x+iy)| \to 0$, fixando $x \in [0,1]$ e impondo $|y| \to \infty$, podemos supor sem perda de generalidade $y \geq 1$.

  Ainda, dado z não inteiro temos

  $$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{|z-n|^2}} = \left|1 - \frac{z}{n}\right|^2 \xrightarrow{n \to \pm\infty} 1 \text{ sendo que } \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

  Então, pelo critério da comparação (no limite) para séries segue

  $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|z-n|^2} < \infty.$$

A seguir, seja $x \in [0,1]$ e $z = x + iy$ não inteiro. Dado $n = -1, -2, -3, \dots$ é geometricamente fácil ver que $|z - n| \geq |z - |n||$. Logo,

$$\sum_{n\leq -1} \frac{1}{|z-n|^2} \;\leq\; \sum_{n\leq -1} \frac{1}{|z-|n||^2} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z-n|^2}.$$

Donde segue

$$|f(z)| \;\leq\; 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + (n-x)^2}.$$

Sejam um natural $N \geq 1$ e $y \geq N + x$. Devido à desigualdade elementar

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \text{ para quaisquer reais } a \text{ e } b,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{1}{y^2+(n-x)^2} &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(N+x)^2+(n-x)^2} \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \frac{2}{[(N+x)+(n-x)]^2} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{2}{(N+n)^2} \\
&= \sum_{n\geq N} \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que (para $x \in [0,1]$)

$$f(x+iy) \to 0 \text{ se } |y| \to +\infty \;\text{ e }\; f \text{ é limitada em } \{z = x+iy : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } |y| \geq 1\}.$$

◇ Analisemos φ. Pela relação (por favor, cheque-a)

$$|\sin z|^2 = |\sin x|^2 + |\sinh y|^2$$

segue que $|\sin z| \to +\infty$ se $|y| \to +\infty$. Logo,

$$\varphi(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \to 0 \text{ se } |y| \to +\infty$$

e $\varphi(z)$ é limitada em $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } |y| \geq 1\}$. Desta forma,

$$\Psi(z) = \varphi(z) - f(z) \text{ é limitada}$$

e tende a zero se $|y| \to \infty$. Pelo teorema de Liouville temos $\Psi \equiv 0$ ♣

Exemplo 12.6 *Vale a fórmula*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \tag{12.6.1}$$

Solução. Pelo exemplo anterior temos

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Uma primitiva da parcela no lado esquerdo é

$$-\pi \cot \pi z.$$

Uma primitiva de um particular termo da série no lado direito é

$$\frac{-1}{z-n}.$$

Como a série de termo geral $-1/(z-n)$ é divergente, subtraímos sua correspondente parte singular (no caso $n \neq 0$) e consideramos a série

$$\sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n \neq 0} \frac{z}{n(z-n)}. \tag{12.6.2}$$

Esta última série é comparável com $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ e então converge. Analogamente aos exemplos anteriores, tal série converge uniformemente sobre compactos (ao eliminarmos os termos que assumem o valor infinito no compacto). Assim, a série

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

pode ser derivada termo a termo e obtemos

$$-\frac{1}{z^2} + f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{d(\pi \cot \pi z)}{dz}.$$

Logo,

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + C, \text{ com } C \text{ uma constante.} \tag{12.6.3}$$

A família em (12.6.2) é somável e então podemos associar à vontade em (12.6.3). Associando os termos de ordem n e $-n$ obtemos

$$\pi \cot \pi z = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} + C = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} + C. \tag{12.6.4}$$

As funções nos dois lados da equação acima são ímpares. Logo, $C = 0$ ♣

Exemplo 12.7 *É válida a fórmula*

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{-m}^{m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Solução.

É fácil ver que

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{-m}^{m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}, \tag{12.7.1}$$

agrupando no lado esquerdo os termos de ordem $-n$ e n.

A série no lado direito de (12.7.1), por ser comparável com a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

converge uniformemente e absolutamente sobre cada compacto K (após eliminarmos os termos da série que assumem o valor infinito no compacto K). Assim, a série em (12.7.1) define uma função meromorfa.

Separando os termos de ordem par e ímpar no somatório em (12.7.1) encontramos

$$\sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \frac{(-1)^n}{z-n} = \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{z-2n} - \sum_{n=-k-1}^{k} \frac{1}{z-1-2n}.$$

Comparando com a fórmula (12.6.4) e impondo o limite da fórmula acima temos

$$\lim_{k \to \infty} \left[\sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{z-2n} - \sum_{n=-k-1}^{k} \frac{1}{z-1-2n} \right] = \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi z}{2} - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi(z-1)}{2}.$$

Para finalizar, observemos que

$$\cot \theta - \cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sin 2\theta} \quad \text{[cheque]}$$

e também que

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{-m}^{m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \frac{(-1)^n}{z-n}.$$

Sgue então que

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{-m}^{m} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{\pi}{\sin \pi z} \clubsuit$$

12.4 - Caracterização de Simplesmente Conexos

A caracterização dos simplesmente conexos é um dos pontos altos em Matemática. Ela afirma que a condição topológica simplesmente conexo é equivalente a determinadas propriedades analíticas (e.g., existência de primitiva, Teorema de Cauchy) assim como condições algébricas (existência de raíz quadrada) e outras condições topológicas. Tais resultados certamente não eram esperados quando da definição de simplesmente conexos. Apesar disso, o valor do teorema é um tanto limitado devido a tantas propriedades. Embora seja prazeroso ter o reverso de tantas implicações, é apenas o fato de que a conexidade de $S^2 \smallsetminus \Omega$ implica que Ω é simplesmente conexo que encontra vasta aplicação. Não é usual verificar as outras propriedades para provar que Ω é simplesmente conexo.

12.8 Teorema. *Seja Ω um aberto conexo, não vazio, em $\mathbb{C}$. São equivalentes.*

(i) *Ω é homeomorfo a $B(0;1)$.*

(ii) *Ω é simplesmente conexo.*

(iii) *$S^2 \smallsetminus \Omega$ é conexo.*

(iv) *$\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$ não tem componente (conexa) compacta.*

(v) *Toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ é limite uniforme de polinômios, sobre os compactos de Ω.*

(vi) *$Ind(\gamma;\alpha) = 0$ para toda curva fechada γ, em Ω e C^1 por partes, e $\alpha \in S^2 \smallsetminus \Omega$.*

(vii) *Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e para toda curva fechada γ em Ω e C^1 por partes,*

$$\int_\gamma f = 0.$$

(viii) *Toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite primitiva.*

(ix) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f não se anula, então existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f = e^\varphi.$$

(x) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f não se anula, então existe $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f = \psi^2.$$

Com o teorema da monodromia descreveremos, posteriormente, mais uma propriedade característica dos abertos simplesmente conexos.

Prova.

(i) $\Rightarrow$(ii). Solicitamos ao leitor verificar. É trivial.

(ii) $\Rightarrow$(iii). Segue da Proposição 9.12.

(iii) $\Rightarrow$(iv). Segue da Proposição 9.12.

(iv) $\Rightarrow$(v). Segue do Teorema Runge Polinomial II [12.2(c)].

(v) $\Rightarrow$(vi). Seja $\alpha \notin \Omega$. Então,

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$$

é holomorfa em Ω e Imagem(γ) é compacto em Ω. Por hipótese, f restrita a Imagem(γ) é limite uniforme de polinômios. Como γ é fechada, temos

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Segue então trivialmente que

$$\int_\gamma f = 0.$$

(vi) $\Rightarrow$(vii). Seja γ uma curva fechada em Ω e C^1 por partes. Devido às hipótese, γ é homóloga a 0 em Ω. Pelo Teorema de Cauchy Homológico 10.18 obtemos

$$\int_\gamma f = 0.$$

(vii) $\Rightarrow$(viii). Assumamos (vii). Fixado $z_0 \in \Omega$, definamos

$$F(z) = \int_{\gamma(z)} f, \text{ para } z \in \Omega,$$

onde $\gamma(z)$ é qualquer curva de classe C^1 por partes em Ω e de z_0 até z. Devido à hipótese, F está bem definida [cheque]. Consideremos uma bola não degenerada $B(z_0; r) \subset \Omega$ e h em $\mathbb{C}$, com $0 < |h| < r$. Então, temos

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_\sigma f,$$

onde $\sigma(t) = z + th$, com $t \in [0,1]$. Donde segue, devido à continuidade de f,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 [f(z+th) - f(z)]dt \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

(viii) $\Rightarrow$(ix). Por hipótese, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$g' = \frac{f'}{f}.$$

Então $h = e^g$ não se anula e satisfaz

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f}.$$

Donde segue $f'h - fh' = 0$ e

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = 0.$$

Logo, existe uma constante não nula e^{w_0}, para algum $w_0 \in \mathbb{C}$, tal que

$$f = e^{w_0} h = e^{g+w_0}.$$

(ix) $\Rightarrow$(x). Por (ix), temos $f = e^{\varphi}$. Logo, $\psi = e^{\frac{\varphi}{2}}$ satisfaz $\psi^2 = f$.

(x) $\Rightarrow$(i). Se $\Omega = \mathbb{C}$, então

$$z \mapsto \frac{z}{1 + |z|}$$

é um homeomorfismo de $\mathbb{C}$ em $B(0;1)$.

Se $\Omega \neq \mathbb{C}$, o Teorema 9.8 garante que Ω é analiticamente isomorfo a $B(0;1)$♣