

Notas de aula sobre Análise de Fourier

Marcelo Queiroz

(Parcialmente baseadas no livro
Introduction to Fourier Analysis
de Norman Morrison)

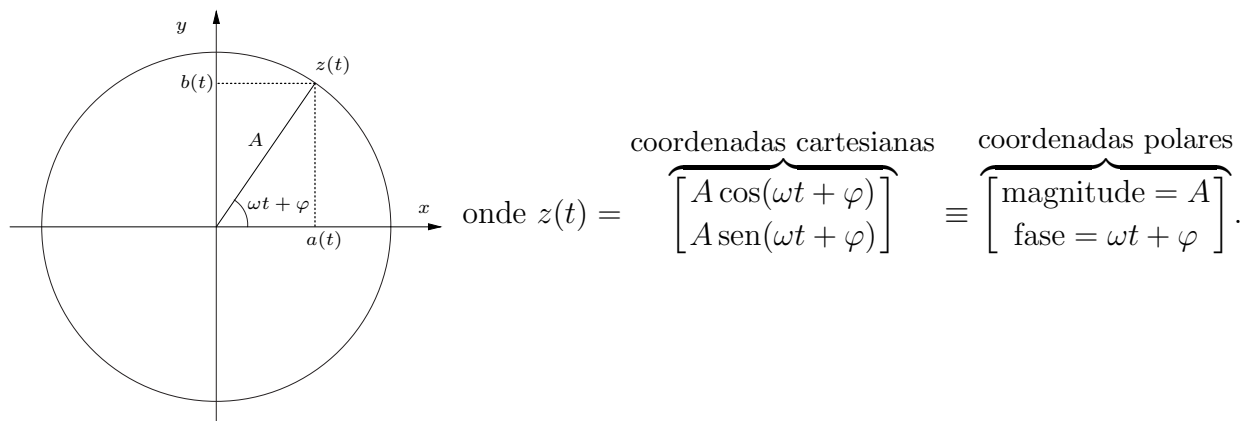
1 Série de Fourier para funções periódicas

Objetivo: Representação de funções periódicas como combinação linear de funções senoidais: $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(3x)$, $\text{sen}(5x + 8)$...

1.1 Revisão de Cálculo e Trigonometria

Oscilações senoidais e movimentos circulares uniformes

Uma função senoidal pode ser vista como a projeção horizontal ou vertical de um movimento circular uniforme (MCU):



O parâmetro A representa o raio do MCU e corresponde à amplitude das senoides observadas pelas projeções horizontal e vertical. O parâmetro ω é a velocidade angular do MCU, ou seja, *omega* radianos são varridos pela trajetória $z(t)$ em 1 segundo, e este mesmo parâmetro corresponde à frequência de oscilação das senoides. Finalmente, o parâmetro φ é o ângulo inicial do MCU (posição de $z(t)$ no instante $t = 0$), e corresponde à fase inicial das oscilações senoidais. A expressão $\theta(t) = \omega t + \varphi$ representa a fase instantânea do MCU.

Pelo teorema de Pitágoras temos $A^2 = a(t)^2 + b(t)^2$ ou $A = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$; além disso $\tan \theta(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$, de onde é possível obter $\theta(t)$ em função de $a(t)$ e $b(t)$ como $\theta(t) = \text{atan2}(b(t), a(t))$ ¹.

¹A função atan2 é semelhante à função arco-tangente, porém recebe 2 argumentos para poder distinguir ângulos no 1º e 3º quadrantes com a mesma tangente, ou ângulos no 2º e 4º quadrantes com a mesma tangente.

Isso mostra como obter os parâmetros $(A, \theta(t))$ da representação polar de $z(t)$ em função dos parâmetros $(a(t), b(t))$ da representação Cartesiana.

Observe também que $\cos \theta(t) = \frac{a(t)}{A}$ e $\sin \theta(t) = \frac{b(t)}{A}$, de onde segue que $a(t) = A \cos \theta(t)$ e $b(t) = A \sin \theta(t)$ (conversão Polar \rightarrow Cartesiana). Em particular, aplicando Pitágoras podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta(t) + \cos^2 \theta(t) &= \frac{b(t)^2}{A^2} + \frac{a(t)^2}{A^2} \\ &= \frac{a(t)^2 + b(t)^2}{A^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Senoides em forma polar e Cartesiana

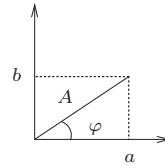
As expressões acima modelam o movimento circular uniforme em duas dimensões através de suas representações polar e Cartesiana. Porém cada uma das senoides correspondentes às projeções horizontal e vertical também admite representações em forma polar e Cartesiana, como veremos a seguir. Lembrando da identidade trigonométrica

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

podemos concluir que a senoide $A \sin(\omega t + \varphi)$ satisfaz

$$\begin{aligned} A \sin(\omega t + \varphi) &= A \cos \varphi \sin(\omega t) + A \sin \varphi \cos(\omega t) \\ &= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \end{aligned}$$

onde $\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \text{atan2}(b, a) \end{cases}$



Esta é uma representação alternativa para a função senoidal, baseada na combinação linear de uma função cosseno e uma função seno, ambas com a mesma frequência angular ω e fase inicial 0. Observe que nestas expressões os pesos a e b da combinação linear não são funções de t , mas constantes determinadas pela fase inicial φ . Vemos então que uma senoide com frequência ω pode ser representada equivalentemente tanto na forma polar, pelos parâmetros (A, φ) de magnitude e fase inicial, quanto na forma Cartesiana pelos parâmetros (a, b) associados aos pesos do cosseno e do seno com frequência ω e fase inicial 0.

Ortogonalidade de senos e coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com período T . Vamos tentar encontrar $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (frequência angular) e $\omega_k = k\omega$.

Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$\begin{aligned}\text{sen}(\omega_k t) \perp \cos(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall k, j \\ \cos(\omega_k t) \perp \cos(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \cos(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall k \neq j, \\ \text{sen}(\omega_k t) \perp \text{sen}(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \text{sen}(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall k \neq j,\end{aligned}$$

Além disso

$$\|\cos(\omega_k t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_k t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall k \neq 0 \\ T & k = 0 \end{cases}$$

$$\|\text{sen}(\omega_k t)\|^2 = \int_0^T \text{sen}^2(\omega_k t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Prova

Considerando a primeira integral, se $k \neq j$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \text{sen}((\omega_k + \omega_j)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \text{sen}((\omega_k - \omega_j)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((\omega_k + \omega_j)t)}{\omega_k + \omega_j} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((\omega_k - \omega_j)t)}{\omega_k - \omega_j} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((k+j)\omega t)}{(k+j)\omega} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((k-j)\omega t)}{(k-j)\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \frac{[-\cos((k+j)2\pi) + \cos(0)]}{(k+j)\omega} + \frac{1}{2} \frac{[-\cos((k-j)2\pi) + \cos(0)]}{(k-j)\omega} \\ &= \frac{1}{2} \frac{[-1 + 1]}{(k+j)\omega} + \frac{1}{2} \frac{[-1 + 1]}{(k-j)\omega} = 0.\end{aligned}$$

Quando $k = j$ tem-se $\frac{1}{2} \int_0^T \text{sen}((\omega_k - \omega_j)t) dt = \int_0^T 0 dt = 0$ na segunda metade da expressão acima (a primeira metade permanece igual a zero pelas mesmas contas).

Em relação ao produto de cossenos temos, para $k \neq j$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos((\omega_k + \omega_j)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos((\omega_k - \omega_j)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((k+j)\omega t)}{(k+j)\omega} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((k-j)\omega t)}{(k-j)\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}((k+j)2\pi) - \text{sen}(0)]}{(k+j)\omega} + \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}((k-j)2\pi) - \text{sen}(0)]}{(k-j)\omega} \\ &= \frac{1}{2} \frac{[0 - 0]}{(k+j)\omega} + \frac{1}{2} \frac{[0 - 0]}{(k-j)\omega} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(\omega_k t) \cos(\omega_k t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega_k t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(0t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{T}{2}. \\ \int_0^T \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) dt &= \int_0^T \cos(0t) \cos(0t) dt = \int_0^T 1 dt = T\end{aligned}$$

Os resultados para $\int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \text{sen}(\omega_k t) dt$ são análogos. ■

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de a_k e b_k na expressão $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{sen}(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)$. Multiplicando por $\text{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \text{sen}(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{sen}(\omega_k t) \text{sen}(\omega_j t) + b_k \cos(\omega_k t) \text{sen}(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \text{sen}(\omega_j t) dt \right) + b_k \left(\int_0^T \cos(\omega_k t) \text{sen}(\omega_j t) dt \right) \\ &= a_j \frac{T}{2} \end{aligned}$$

de onde

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(\omega_j t) dt, \quad \forall j \neq 0.$$

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{sen}(\omega_k t) \cos(\omega_j t) + b_k \cos(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_0^T \text{sen}(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt \right) + b_k \left(\int_0^T \cos(\omega_k t) \cos(\omega_j t) dt \right) \\ &= b_j \frac{T}{2} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt, \quad \forall j \neq 0.$$

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$, e assim

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

O valor a_0 na realidade é irrelevante para a decomposição pois aparece multiplicado por $\text{sen}(\omega_k t) = \text{sen}(0t) = 0$, e pode ser definido arbitrariamente como $a_0 = 0$.

As equações que definem os coeficientes a_j e b_j são denominadas *equações de análise*, pois permitem decompor (analisar) a função original como soma de funções mais simples, através da *equação de síntese* $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{sen}(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)$. Cada uma destas funções mais simples é chamada de (k -ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, possuindo a forma de uma senoide

$$h_k(t) = a_k \text{sen}(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t) = A_k \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k)$$

onde $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ e $\varphi_k = \text{atan2}(b_k, a_k)$. A componente D.C. é

$$h_0(t) \equiv b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

e corresponde ao valor médio do sinal.

1.2 Exponenciais Complexas

Números complexos

A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em \mathbb{R} , porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição). Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$). Números complexos têm a forma $x = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, são representados normalmente em um plano Cartesiano com um eixo real (valor a) e outro eixo imaginário (valor b), e obedecem aos mesmos axiomas que os números reais em relação às operações elementares. Em particular, se $x = a + bi$ e $y = c + di$, a soma e a multiplicação satisfazem

$$(x + y = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

e

$$xy = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Veremos que funções exponenciais complexas permitem a representação simplificada de movimentos circulares uniformes, e conseqüentemente de funções senoidais, substituindo a necessidade de conhecer todo o arsenal de identidades trigonométricas pela possibilidade de manipulação das mesmas funções através de propriedades algébricas elementares (como $(a^b)^c = a^{bc}$ ou $a^b a^c = a^{b+c}$).

Representação de Taylor para senos, cossenos e exponenciais

Podemos representar várias funções $f(x)$ que nos interessam aqui, como senos, cossenos e exponenciais, através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Quando tal representação existe, podemos obter os coeficientes a_n calculando a função original e suas derivadas no ponto $x = 0$:

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies f''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

⋮

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-m+1) a_n x^{n-m} \implies f^{(m)}(0) = m! a_m \implies a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

Assim, temos as representações

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= \cos(0) - \operatorname{sen}(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\operatorname{sen}(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ e^x &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária) temos

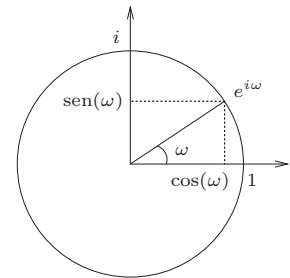
$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \dots = 1, -1, 1, -1, \dots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \dots = i, -i, i, -i, \dots$. Assim obtemos a chamada *Relação de Euler*:

$$\begin{aligned} e^{i\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega). \end{aligned}$$

O número complexo $e^{i\omega}$ possui como representação Cartesiana a expressão $\cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)$. Em coordenadas polares representamos o mesmo número através de seu módulo e do ângulo ou fase em relação ao eixo real:

$$\begin{aligned} |e^{i\omega}| &= \sqrt{\cos^2(\omega) + \operatorname{sen}^2(\omega)} = 1 \\ \varphi &= \operatorname{atan2}(\operatorname{sen}(\omega), \cos(\omega)) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\cos(\omega)}\right) = \tan^{-1} \tan(\omega) = \omega \end{aligned}$$



A partir da relação de Euler podemos obter outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos:

$$e^{-i\omega} = e^{i(-\omega)} = \cos(-\omega) + i \operatorname{sen}(-\omega) = \cos(\omega) - i \operatorname{sen}(\omega)$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ (* denota a operação de conjugação, definida por $(a + ib)^* = a - ib$). A partir das expressões $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i \operatorname{sen}(\omega)$ e $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)$ podemos obter:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

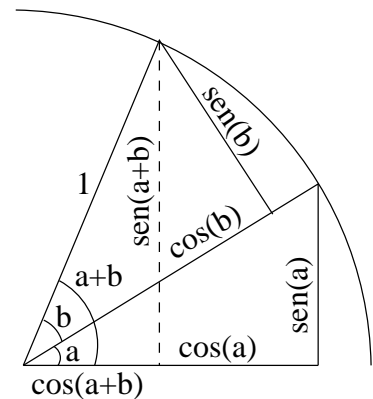
Identidades trigonométricas com exponenciais complexas

Finalmente, usando as relações entre senos, cossenos e exponenciais complexas que vêm da relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
 &= \frac{(\cos(a) + i \operatorname{sen}(a))(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) - (\cos(-a) + i \operatorname{sen}(-a))(\cos(-b) + i \operatorname{sen}(-b))}{2i} \\
 &= \frac{(\cos(a) + i \operatorname{sen}(a))(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) - (\cos(a) - i \operatorname{sen}(a))(\cos(b) - i \operatorname{sen}(b))}{2i} \\
 &= \frac{(\cos(a)\cos(b) + i \cos(a)\operatorname{sen}(b) + i \operatorname{sen}(a)\cos(b) + i^2 \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b))}{2i} \\
 &\quad - \frac{(\cos(a)\cos(b) - i \cos(a)\operatorname{sen}(b) - i \operatorname{sen}(a)\cos(b) + i^2 \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b))}{2i} \\
 &= \frac{2i \cos(a)\operatorname{sen}(b) + 2i \operatorname{sen}(a)\cos(b)}{2i} \\
 &= \cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b)
 \end{aligned}$$

Vale a pena abrir um bom livro em nível de colegial e comparar esta dedução algébrica com a dedução trigonométrica/geométrica a partir da figura ao lado. Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\cos(b) &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)
 \end{aligned}$$



1.3 Série complexa de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com período T . Vamos tentar encontrar valores complexos $\{F_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t}$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_k = k\omega$.

Lema (Relações de Ortogonalidade) As funções $e^{i\omega_k t}$ e $e^{i\omega_m t}$ são ortogonais, ou seja,

$$\int_0^T e^{i\omega_k t} (e^{i\omega_m t})^* dt = \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_m t} dt = 0, \quad \forall k \neq m.$$

Além disso, para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\|e^{i\omega_k t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_k t} dt = T.$$

Prova

Se $k \neq m$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_m t} dt &= \int_0^T e^{i(k-m)\omega t} dt \\
 &= \left[\frac{e^{i(k-m)\omega t}}{i(k-m)\omega} \right]_0^T \\
 &= \frac{e^{i(k-m)\omega T} - 1}{i(k-m)\omega} \\
 &= \frac{\cos((k-m)2\pi) + i \operatorname{sen}((k-m)2\pi) - 1}{i(k-m)\omega} \\
 &= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(k-m)\omega} = 0.
 \end{aligned}$$

Se $k = m$ então $\int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_m t} dt = \int_0^T 1 dt = T$. ■

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_k na expressão $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_m t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_m t} dt \\
 &= F_m T
 \end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$,

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Definição (Síntese e Análise) As equações $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t}$ e $F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente.

Uma propriedade fundamental dos valores F_k é a seguinte:

Teorema (Simetria-Conjugada do Espectro de Fourier)

$$F_{-k} = F_k^*.$$

Prova

Como $f(t)$ é real, temos $f(t) = (f(t))^*$. Além disso é fácil verificar que $(ab)^* = a^*b^*$ em geral. Assim,

$$\begin{aligned}
 F_{-k} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-k}t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^* (e^{-i\omega_k t})^* dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) e^{-i\omega_k t})^* dt \\
 &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right)^* \\
 &= F_k^*. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

A expressão $F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt$ descreve o espectro de uma função periódica através das amplitudes e fases correspondentes aos diversos harmônicos. Seja $F_k = \alpha_k e^{i\varphi_k}$ a representação polar de F_k . Então as parcelas $F_k e^{i\omega_k t}$ e $F_{-k} e^{i\omega_{-k} t}$ que aparecem na equação $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t}$, quando somadas, correspondem ao k -ésimo harmônico da função f . Lembrando que $F_{-k} = (F_k)^* = \alpha_k e^{-i\varphi_k}$, temos a expressão do k -ésimo harmônico de f :

$$\begin{aligned}
 h_k(t) &= F_k e^{i\omega_k t} + F_{-k} e^{i\omega_{-k} t} \\
 &= \alpha_k e^{i\varphi_k} e^{i\omega_k t} + \alpha_k e^{-i\varphi_k} e^{-i\omega_k t} \\
 &= \alpha_k (e^{i(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-i(\omega_k t + \varphi_k)}) \\
 &= 2\alpha_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).
 \end{aligned}$$

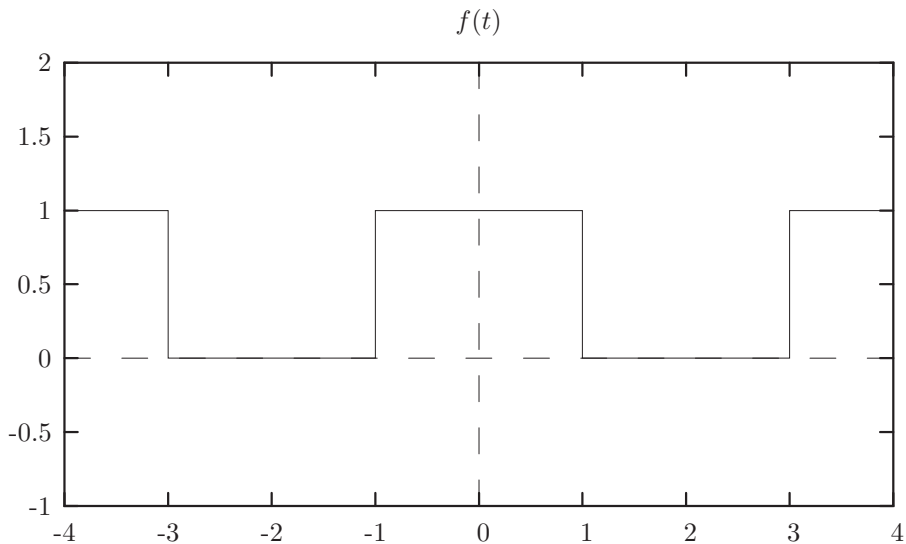
Observe que esta combinação de duas exponenciais complexas sempre gerará um sinal real, ou seja, a decomposição complexa de Fourier produz simultaneamente uma decomposição em funções reais $h_k(t)$.

Para $k = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

e corresponde ao valor médio da função f . Este “harmônico” $h_0(t) = F_0$ tem a função de transladar verticalmente os demais harmônicos (que oscilam entre $+2\alpha_k$ e $-2\alpha_k$) para a “posição correta” da função f .

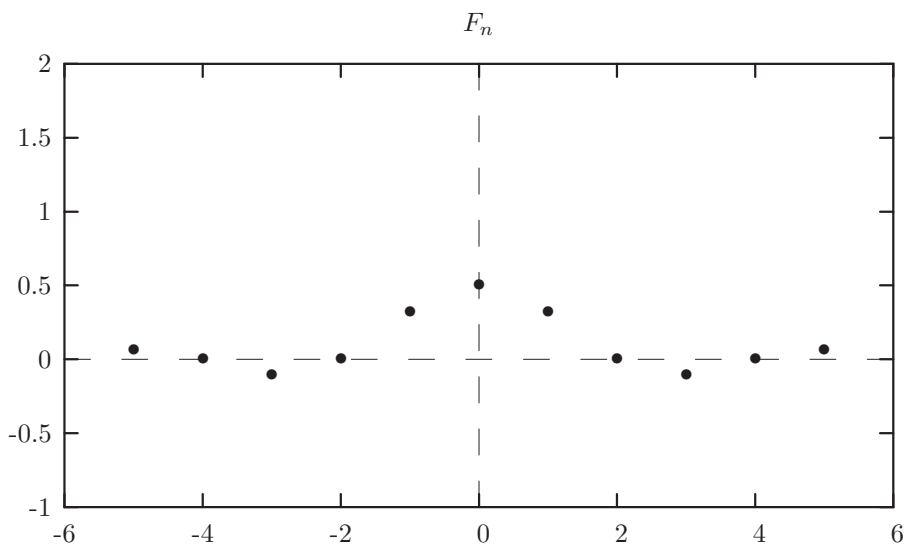
Exemplo: Considere a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \end{cases}$, $f(t+4) = f(t)$, $\forall t$.



Tomos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_k = k\frac{\pi}{2}$. Assim, para $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-i\omega_k t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i\omega_k} - e^{i\omega_k}}{-i\omega_k} \right) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\omega_k)}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(k\frac{\pi}{2})}{k\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

e para $k = 0$, $F_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

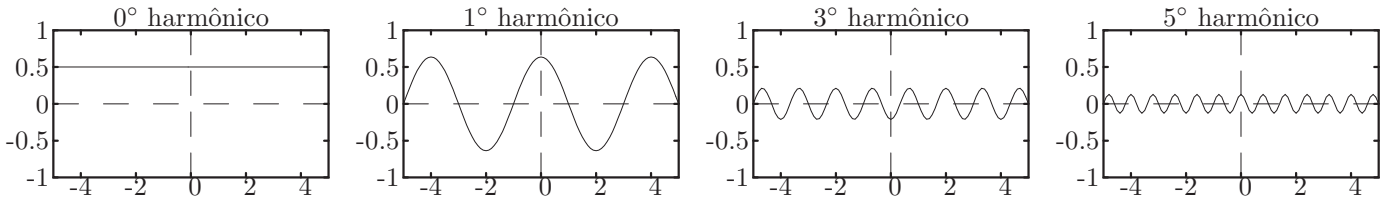


Observe que os extremos de integração utilizados nas contas acima foram $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Qualquer período completo pode ser utilizado. Pela equação de síntese,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t} = \frac{1}{\pi} \left[\dots + \frac{1}{5} e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5} e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \dots \right]$$

e o k -ésimo harmônico (para k ímpar) é dado por

$$h_k(t) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{k\pi} [e^{-ik\frac{\pi}{2}t} + e^{ik\frac{\pi}{2}t}] = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

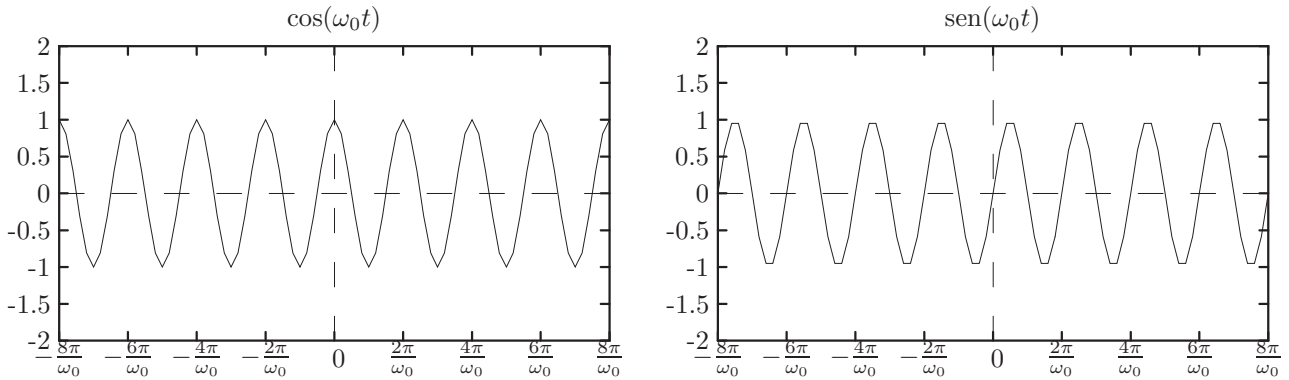


Definição (Funções pares e ímpares)

Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t)$, $\forall t$.

Uma função f é **ímpar** se satisfaz $f(t) = -f(-t)$, $\forall t$.

Exemplos de função par e função ímpar são $\cos(t)$ e $\sin(t)$, respectivamente:



Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

Lema

1. Se f e g são pares, fg é par.
2. Se f e g são ímpares, fg é par.
3. Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.
4. Se f é par, $\int_{-U}^U f(t) dt = 2 \int_0^U f(t) dt$.
5. Se f é ímpar, $\int_{-U}^U f(t) dt = 0$.

Sejam $F_k = A_k + iB_k$ e $F_k = \alpha_k e^{i\varphi_k}$ as representações Cartesiana e polar do número complexo F_k , que estão relacionadas pelas expressões

$$\begin{cases} A_k = \alpha_k \cos \varphi_k \\ B_k = \alpha_k \sin \varphi_k \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \\ \varphi_k = \text{atan2}(B_k, A_k) \end{cases}$$

Então a partir da propriedade $F_{-k} = F_k^*$ obtemos $A_{-k} + iB_{-k} = A_k - iB_k$ e também $\alpha_{-k}e^{i\varphi_{-k}} = \alpha_k e^{i(-\varphi_k)}$, de onde segue imediatamente o resultado:

Corolário (Paridade dos coeficientes de Fourier) *Se $f(t)$ é uma função real, então A_k e α_k são funções pares do argumento k , bem como B_k e φ_k são funções ímpares de k .*

Retomando o último exemplo (onda quadrada), observe que F_k é real e conseqüentemente par (pelo corolário anterior). Essa propriedade está associada com a paridade desta forma de onda quadrada do exemplo (pode-se contruir também ondas quadras ímpares, ou nem pares nem ímpares).

Definição (f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções*

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

É imediato observar que f_{par} é uma função par e $f_{\text{ímpar}}$ é uma função ímpar. Mais ainda,

$$f_{\text{par}}(t) + f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)] = f(t).$$

Teorema (Decomposição em f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_k = A_k + iB_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f . Então $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{par} e $\{iB_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a $f_{\text{ímpar}}$.*

Prova

$$\begin{aligned} f_{\text{par}}(t) &= \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k (-t)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos(\omega_k t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t) + \overbrace{iB_k \cos(\omega_k t)}^{\text{ímpar} \Rightarrow 0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t) + \overbrace{iA_k \text{sen}(\omega_k t)}^{\text{ímpar} \Rightarrow 0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t}, \end{aligned}$$

que é a uma equação de síntese para a função f_{par} a partir dos coeficientes $\{A_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$, o que implica que esta é a série complexa de Fourier associada a f_{par} .

A verificação de que $f_{\text{ímpar}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} iB_k e^{i\omega_k t}$ é análoga, e fica como exercício. ■

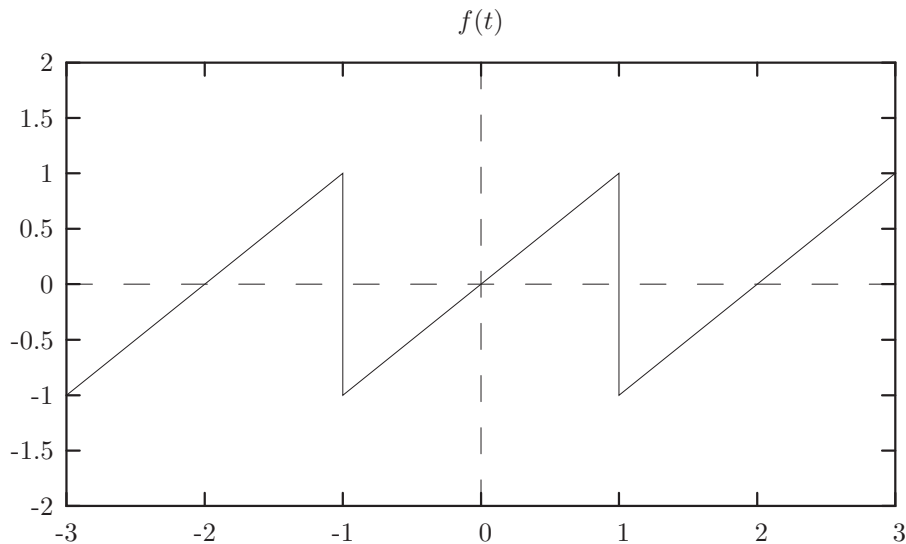
Uma consequência imediata do resultado anterior é:

Corolário

$$f(t) \text{ é par} \iff F(k) \text{ é real e par}$$

$$f(t) \text{ é ímpar} \iff F(k) \text{ é imaginária e ímpar}$$

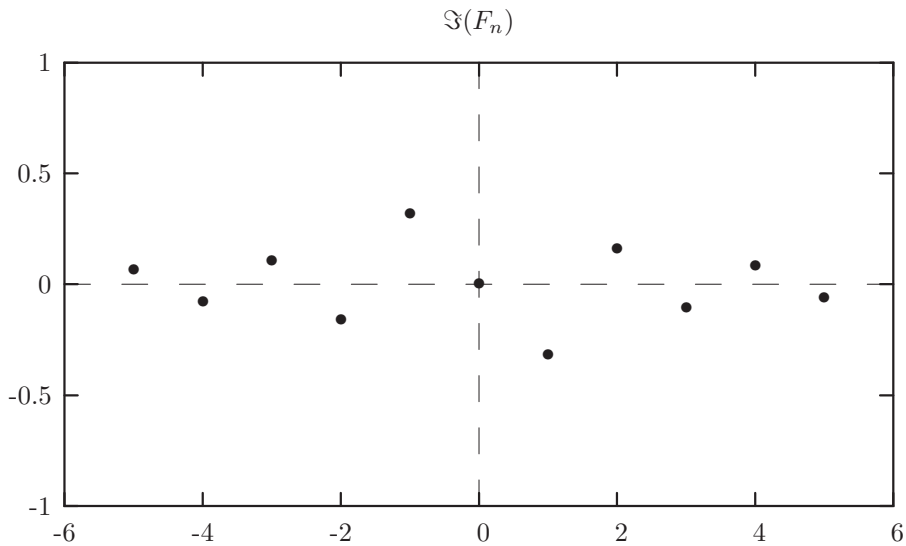
Exemplo: Considere a função



Temos $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $\omega_k = k\pi$. Para $k \neq 0$,

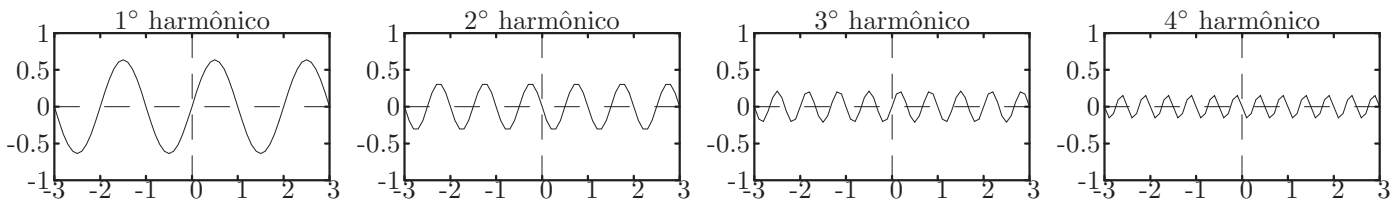
$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-i\omega_k t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overbrace{t \cos(\omega_k t)}^{\text{ímpar} \implies 0} dt - \frac{i}{2} \int_{-1}^1 t \text{sen}(\omega_k t) dt \\ &= -i \int_0^1 t \text{sen}(\omega_k t) dt \\ &= -i \left[\frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k^2} - t \frac{\cos(\omega_k t)}{\omega_k} \right]_0^1 \\ &= -i \left[-\frac{(-1)^k}{k\pi} \right] = i \frac{(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

Para $k = 0$, $F_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$.



Observe que F_k é puramente imaginária e conseqüentemente ímpar. O k -ésimo harmônico de f é dado por

$$h_k(t) = i \frac{(-1)^{-k}}{-k\pi} e^{-ik\pi t} + i \frac{(-1)^k}{k\pi} e^{ik\pi t} = i \frac{(-1)^k}{k\pi} [e^{ik\pi t} - e^{-ik\pi t}] = -2 \frac{(-1)^k}{k\pi} \text{sen}(k\pi t).$$



2 Transformada de Fourier

Quando a função $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é periódica é impossível escrevê-la como combinação linear de uma família de senos e cossenos harmonicamente relacionados. No entanto, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as frequências $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{equação de síntese})$$

Para funções que satisfazem o critério $\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt < \infty$, entre outras, pode-se provar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação acima são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{equação de análise})$$

Definição Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese acima, denotamos esta relação por

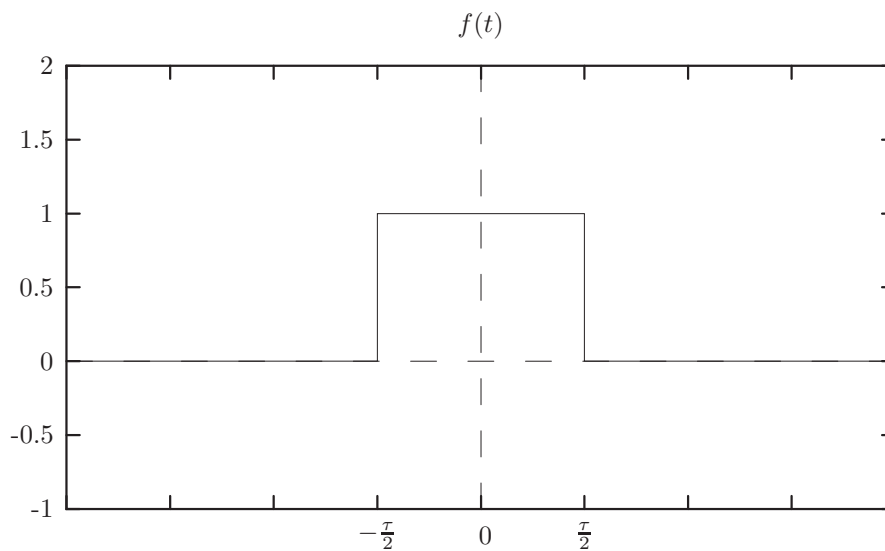
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Utilizamos as notações

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = \alpha(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

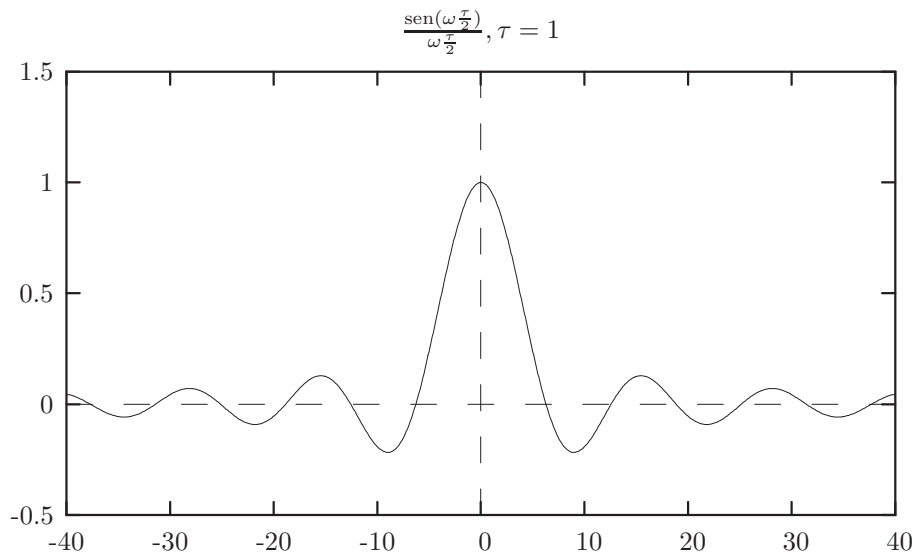
para as representações Cartesiana e polar de $F(\omega)$.

Exemplo: Considere a função



Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau$. Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i} \right] \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega} = \tau \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}$$



Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\text{sen}(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} d\omega.$$

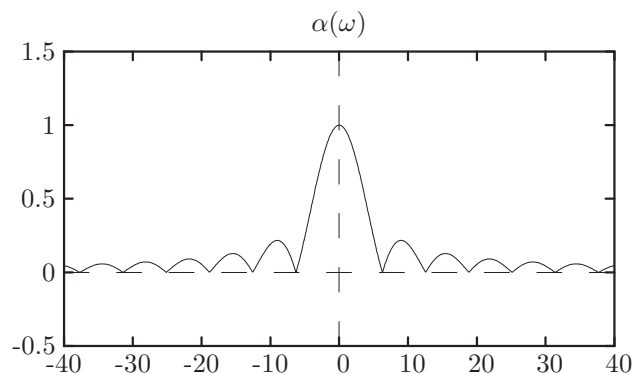
Frequentemente representamos a transformada de Fourier através dos espectros de *amplitude* e *fase*. Neste caso,

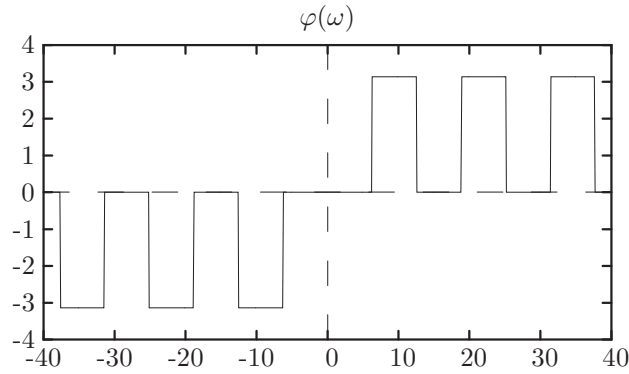
$$\alpha(\omega) = \tau \left| \frac{\text{sen}(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} \right|$$

e

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A escolha entre $\pm\pi$ na expressão de $\varphi(\omega)$, embora arbitrária, deve preservar a propriedade de que $\varphi(\omega)$ é uma função ímpar.





Teorema (Propriedades da Transformada de Fourier)

1. *Linearidade:* se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

2. *Conjugação:* $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

3. *Simetria:*

$A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares.

$B(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ são funções ímpares.

$f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.

$f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB(\omega)$.

$f(t)$ é par $\iff F(\omega)$ é real e par.

$f(t)$ é ímpar $\iff F(\omega)$ é imaginária e ímpar.

4. *Propriedade da Área*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0).$$

5. *Dualidade:* Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ então

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

6. *Mudança de Escala:* Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\beta \neq 0$ então

$$f(\beta t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\beta|} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right).$$

7. *Deslocamento no Tempo:* Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ então

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

8. *Deslocamento na Frequência:* Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$ então

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

Prova

A verificação das propriedades (1)-(4) segue os mesmos argumentos das respectivas propriedades da série complexa de Fourier, ficando como exercício.

5. *Dualidade:* Aplicando a equação de análise para a função $F(t)$, verificamos que sua transformada de Fourier será

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Trocando os nomes das variáveis t e ω na equação de síntese para $f(\cdot)$ temos $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t} dt$. Deste modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i(-\omega)t} dt = 2\pi f(-\omega).$$

6. *Mudança de Escala:* Se $\beta > 0$, então a transformada de Fourier de $f(\beta t)$ será

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta t)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega \frac{z}{\beta}} \frac{dz}{\beta} \quad (z = \beta t) \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\frac{\omega}{\beta}z} dz \\ &= \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right). \end{aligned}$$

O caso $\beta < 0$ fica como exercício.

7. *Deslocamento no Tempo:* A transformada de Fourier de $f(t - \tau)$ é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega(z+\tau)} dz \quad (z = t - \tau) \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega z} dz \\ &= e^{-i\omega\tau} F(\omega). \end{aligned}$$

8. *Deslocamento na Frequência:* Usando a equação de síntese (transformada de Fourier inversa) para a função $F(\omega - \omega_0)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0)e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)e^{i(\theta+\omega_0)t} d\theta \quad (\theta = \omega - \omega_0) \\ &= e^{i\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)e^{i\theta t} d\theta \\ &= e^{i\omega_0 t} f(t). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

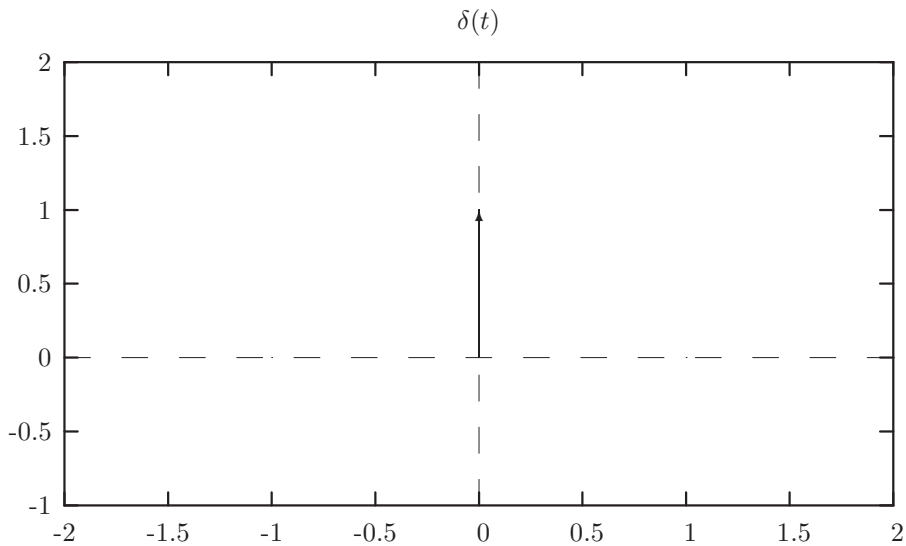
2.1 Transformada do limite de funções

Algumas vezes não é possível obter $F(\omega)$ a partir da definição, mas através de limites. Se $f(t) = \lim_{k \rightarrow K} f^k(t)$, $f^k(t) \longleftrightarrow F^k(\omega)$ para cada k e além disso existe o $\lim_{k \rightarrow K} F^k(\omega)$, então este limite corresponde à transformada de Fourier de $f(t)$, possuindo todas as propriedades da transformada obtida pela definição.

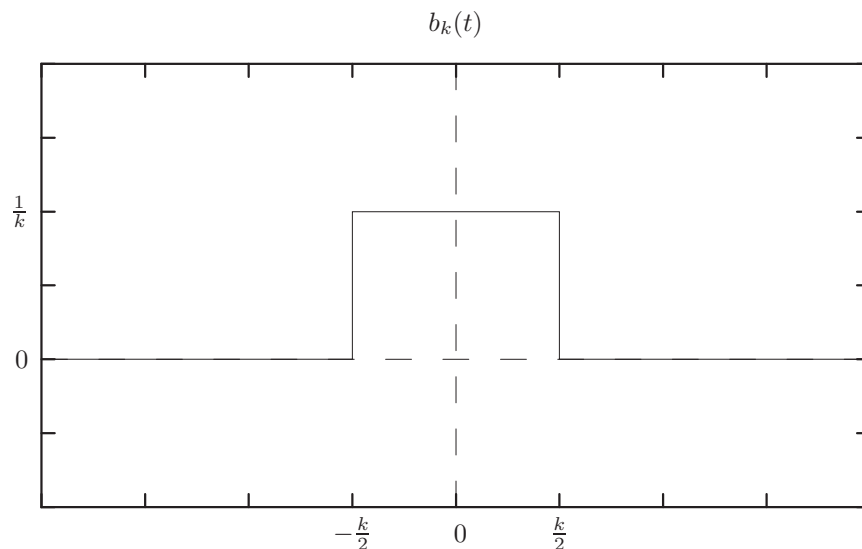
Exemplo: Delta de Dirac. Esta função generalizada (distribuição) é definida pelas condições

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

sendo que o valor $\delta(0)$ não está definido. Frequentemente representamos esta distribuição usando um vetor com altura representando seu *peso* (o valor da integral na definição):



O Delta de Dirac pode ser visto como o limite das funções $b_k(t)$ para $k \rightarrow 0^+$:

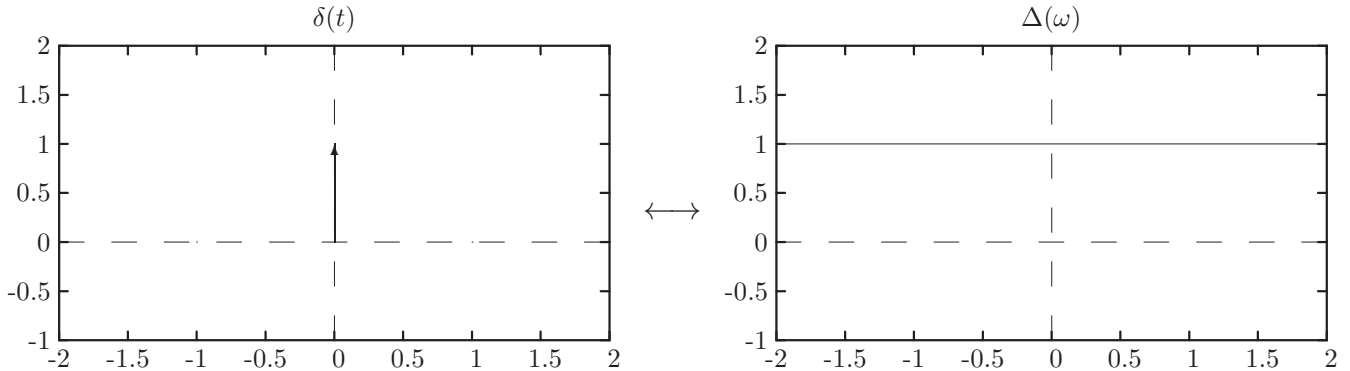


Pelo exemplo do pulso quadrado na seção anterior, juntamente com a propriedade de linearidade, sabemos que a transformada de Fourier da função $b_k(t)$ é

$$B_k(\omega) = \frac{1}{k} \left[k \frac{\text{sen}(\omega \frac{k}{2})}{\omega \frac{k}{2}} \right] = \frac{\text{sen}(\omega \frac{k}{2})}{\omega \frac{k}{2}}.$$

Quando $k \rightarrow 0^+$, $B_k(\omega) \rightarrow 1$ para qualquer valor de ω . Assim a transformada de Fourier do Delta de Dirac é a função constante $\Delta(\omega) = 1$, ou ainda,

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$



Pela equação de síntese, podemos escrever

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

de onde também obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t).$$

Podemos definir deltas de Dirac localizados em instantes $t \neq 0$ e com pesos (valor da integral) diferentes de 1. Em geral definimos $\delta_{K,\tau} = K\delta(t - \tau)$, que satisfaz

$$\begin{cases} \delta_{K,\tau}(t) = 0, \quad \forall t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{K,\tau}(t) dt = K. \end{cases}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$. Para isso, lembremos que

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Pela propriedade de deslocamento no tempo,

$$\delta(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau}$$

e por dualidade,

$$e^{-it\tau} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega - \tau) = 2\pi\delta(\omega + \tau).$$

Substituindo τ por $-\omega_0$ e $+\omega_0$ obtemos, respectivamente,

$$e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

e

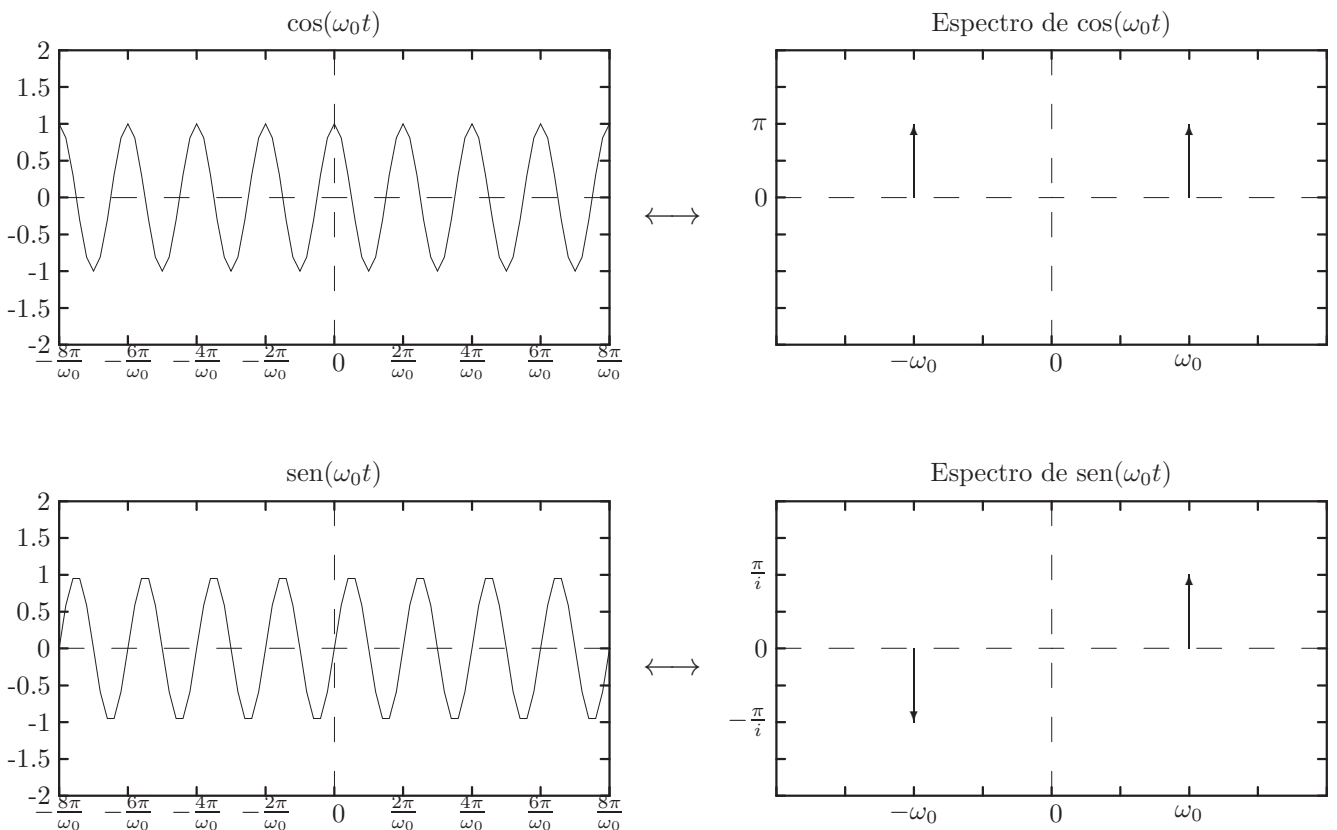
$$e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0),$$

de onde, finalmente,

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

e

$$\text{sen}(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{i}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{i}\delta(\omega + \omega_0).$$



A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

Lema (Propriedade da amostragem) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Então*

$$f(t)\delta(t - \tau) = \delta_{f(\tau)}(t - \tau).$$

Em particular,

$$f(t)\delta(t) = \delta_{f(0)}(t).$$

Prova

Temos $f(t)\delta(t - \tau) = 0, \forall t \neq \tau$ pela definição de $\delta(\cdot)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right] e^{-i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega)e^{-i\omega\tau} d\omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \right)^* \\ &= (f(\tau))^* = f(\tau), \end{aligned}$$

o que mostra que $f(t)\delta(t - \tau)$ satisfaz a definição de $\delta_{K,\tau}$ com $K = f(\tau)$. ■

2.2 Convolução

A operação de convolução surge como resposta à seguinte pergunta: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, qual é a função $h(t)$ cujo espectro é $F(\omega)G(\omega)$, ou ainda, tal que $h(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$?

Definição (convolução) Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, a **convolução** de f e g é definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Lema Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ então

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova

Aplicando a equação de análise para a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)e^{-i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right] f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega)G(\omega). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \zeta)g(\zeta) (-d\zeta) \quad (\zeta = t - \tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \zeta)g(\zeta) d\zeta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau) d\tau \\
 &= (g * f)(t).
 \end{aligned}$$

Convolução, Dirac e a propriedade da amostragem

Exemplo: Lembrando da propriedade da amostragem

$$f(t)\delta(t - \tau) = \delta_{f(\tau)}(t - \tau) = f(\tau)\delta(t - \tau),$$

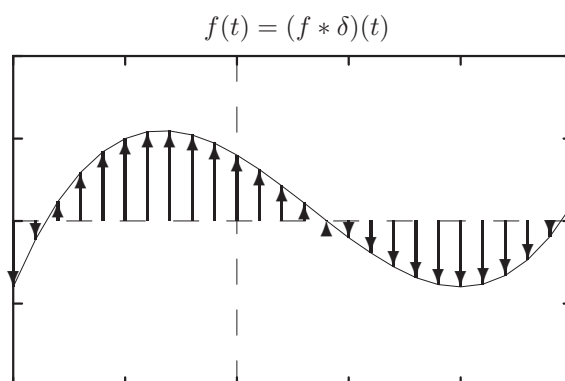
temos

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) d\tau,$$

e como $f(t)$ não depende de τ na última integral,

$$(f * \delta)(t) = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = f(t).$$

Disso concluímos que $\delta(t)$ é o elemento neutro em relação à operação de convolução, e também que $f(t)$ pode ser vista como uma somatória (integral) de deltas deslocados $\delta_{f(\tau)}(t - \tau)$ para todos os valores de τ possíveis:

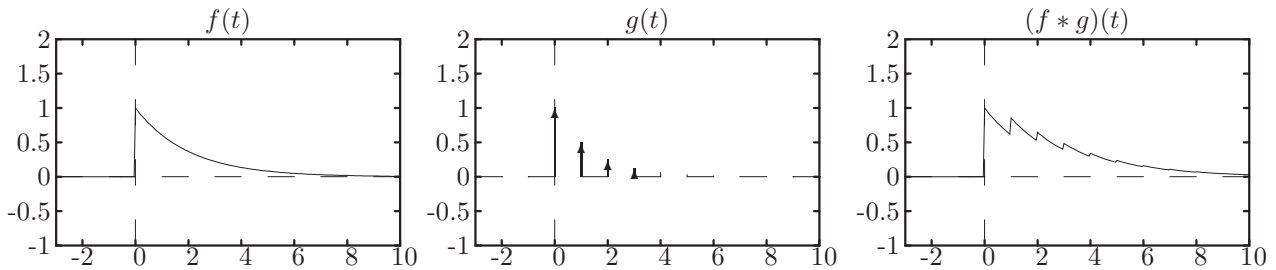


Interpretação geométrica da convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$. Então, usando a propriedade da amostragem,

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \delta(\tau - \gamma_n) d\tau \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \gamma_n) \delta(\tau - \gamma_n) d\tau \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t - \gamma_n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \gamma_n) d\tau \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t - \gamma_n),
 \end{aligned}$$

ou seja, $(f * g)$ corresponde à somatória de várias cópias da função $f(t)$ com fatores de escala β_n e deslocadas no tempo de γ_n .



Lema (Convolução na frequência) Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ então

$$h(t) = f(t)g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega).$$

Prova

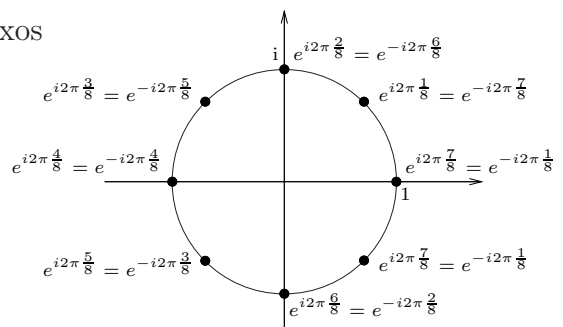
Exercício. ■

3 Transformada de Fourier Discreta

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos

$$\left\{ e^{i2\pi n \frac{1}{N}} \mid n = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

que divide o círculo unitário em N partes iguais:



Cada um destes números $y = e^{i2\pi n \frac{1}{N}}$ têm a propriedade especial que $y^N = 1$ (pois $y^N = (e^{i2\pi n \frac{1}{N}})^N = (e^{i2\pi})^n = 1^n = 1$), razão pela qual recebem a denominação de *raízes da unidade*. Cada uma destas raízes da unidade pode ser usada como frequência angular de uma exponencial complexa, associada à velocidade angular $\omega_n = n\omega$, onde $\omega = \frac{2\pi}{N}$.

Vamos verificar que a família de funções (de k)

$$f_n(k) = \left\{ e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \mid n = 0, \dots, N-1 \right\}$$

possui uma propriedade de ortogonalidade em relação ao produto interno em \mathbb{C}^N , definido por $\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*$. Para simplificar a notação, vamos utilizar o símbolo $Z = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$ de tal forma que

$$f_n(k) = e^{i2\pi n \frac{k}{N}} = Z^{nk} = (Z^n)^k.$$

Observe que esta última expressão evidencia a propriedade da sequência $f_n(0), f_n(1), \dots, f_n(k), \dots$ corresponder a uma progressão geométrica com valor inicial 1 e razão Z^n .

Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$f_n(\cdot) \perp f_m(\cdot), \quad \forall n \neq m$$

e

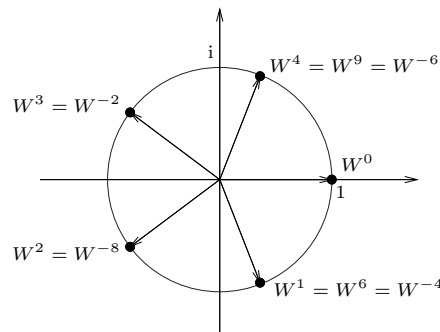
$$\|f_n\|^2 = N.$$

ou, equivalentemente,

$$\langle f_n, f_m \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} Z^{nk} (Z^{mk})^* = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ N, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Exemplo: Considere $N = 5$, $n = 2$ e $m = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} Z^0 \\ Z^2 \\ Z^4 \\ Z^6 \\ Z^8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} Z^0 \\ Z^3 \\ Z^6 \\ Z^9 \\ Z^{12} \end{bmatrix}$$



temos

$$\langle a, b \rangle = Z^0 Z^0 + Z^2 Z^{-3} + Z^4 Z^{-6} + Z^6 Z^{-9} + Z^8 Z^{-12} = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} = 0$$

e

$$\langle a, a \rangle = Z^0 Z^0 + Z^2 Z^{-2} + Z^4 Z^{-4} + Z^6 Z^{-6} + Z^8 Z^{-8} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Prova (do Lema)

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} Z^{nk} (Z^{mk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (Z^{(n-m)})^k = \frac{1 - (Z^{(n-m)})^N}{1 - Z^{(n-m)}} \\ &= \frac{1 - (Z^N)^{(n-m)}}{1 - Z^{(n-m)}} = \frac{1 - 1}{1 - Z^{(n-m)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} Z^{nk} (Z^{nk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (Z^0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N. \quad \blacksquare$$

Seja $f = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \dots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n (Z^n)^k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}}.$$

Usando as relações de ortogonalidade, podemos obter os valores de F_n tomando o produto interno da equação acima com a função $f_m(k) = (Z^m)^k$, ou seja, multiplicando-a por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n \frac{k}{N}} e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \langle f_n, f_m \rangle \\ &= \frac{1}{N} F_m N. \end{aligned}$$

ou seja, para $n = 0, \dots, N-1$,

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}.$$

Definição (Síntese e Análise) As equações $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \dots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \dots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$. Utilizamos as notações $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ para as representações Cartesiana e polar de F_n .

Lema (Propriedades da Transformada Discreta de Fourier)

1. *Linearidade:* se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

2. *Periodicidade:*

As funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas expressões

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}}$$

e

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

são periódicas com período N .

3. *Conjugação:* $F_{-n} = F_n^*$.

4. *Simetria:*

A_n e α_n são funções pares.

B_n e φ_n são funções ímpares.

$f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n$.

$f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n$.

$f(t)$ é par $\iff F_n$ é real e par.

$f(t)$ é ímpar $\iff F_n$ é imaginária e ímpar.

5. *Propriedade da Média:* $\sum_{k=0}^{N-1} f_k = F_0$ e $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n = f_0$.

6. *Dualidade:* Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-(N-1)}).$$

7. *Deslocamento no Tempo:* Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (Z^0 F_0, Z^{-m} F_1, Z^{-2m} F_2, \dots, Z^{-(N-1)m} F_{N-1}).$$

8. *Deslocamento na Frequência:* Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(Z^0 f_0, Z^{-m} f_1, Z^{-2m} f_2, \dots, Z^{-(N-1)m} f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_m, F_{1+m}, \dots, F_{N-1+m}).$$

Prova

Exercício. ■

3.1 Transformada Rápida de Fourier

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k Z^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$. O método FFT (Fast Fourier Transform) permite obter o mesmo resultado recursivamente em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^\sigma$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{ímpar}} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$$

e calcular separadamente as DFTs de cada um destes vetores, combinando os resultados. Esta estratégia é conhecida como *Divisão e Conquista*.

Note que

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \sum_{\substack{k \text{ par} \\ N/2-1}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{\substack{k \text{ ímpar} \\ N/2-1}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ N/2-1}} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par}k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar}k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} \\ &= \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{ímpar}})_n \end{aligned}$$

Na expressão anterior, as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$, e portanto para calcular todos os valores F_n com $n = 0, 1, \dots, N-1$, basta obter $\text{FFT}(f_{\text{par}})_n$ e $\text{FFT}(f_{\text{ímpar}})_n$ para $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Sendo $C(N/2)$ o custo de computar cada FFT dos subvetores f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$, e levando em consideração que o custo de combinar as soluções é proporcional a N (uma multiplicação e uma

soma para cada coeficiente F_n), teremos

$$\begin{aligned}
C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
&= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
&= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
&= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
&= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\
&= \dots \\
&= 2^\sigma C(N/2^\sigma) + \sigma\alpha N \\
&= NC(1) + \sigma\alpha N \\
&= NC(1) + (\log N)\alpha N \\
&= \mathcal{O}(N \log N)
\end{aligned}$$

A notação $\mathcal{O}(\cdot)$ denota o fato de que o crescimento assintótico (i.e. quando $N \rightarrow \infty$) do custo computacional é limitado por $\beta N \log N$ para alguma constante $\beta > 0$.

Exemplos operacionais da FFT

Comecemos com alguns exemplos pequenos. Considere $N = 2$; neste caso a expressão da transformada de Fourier fica

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 \\ Z^0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 \\ f_0 - f_1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, são necessárias apenas duas operações aritméticas para obter o vetor F . Se $N = 4$ podemos escrever

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 & Z^0 & Z^0 \\ Z^0 & Z^{-1} & Z^{-2} & Z^{-3} \\ Z^0 & Z^{-2} & Z^{-4} & Z^{-6} \\ Z^0 & Z^{-3} & Z^{-6} & Z^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 & Z^0 & Z^0 \\ Z^0 & Z^{-1} & -Z^0 & -Z^{-1} \\ Z^0 & -Z^0 & Z^0 & -Z^0 \\ Z^0 & -Z^{-1} & -Z^0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

onde a última matriz foi obtida pela propriedade de circularidade dos valores Z^n . É possível fatorizar² esta matriz como segue:

$$\begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 & Z^0 & Z^0 \\ Z^0 & Z^{-1} & -Z^0 & -Z^{-1} \\ Z^0 & -Z^0 & Z^0 & -Z^0 \\ Z^0 & -Z^{-1} & -Z^0 & Z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 & 0 & 0 \\ Z^0 & -Z^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z^0 & Z^{-1} \\ 0 & 0 & Z^0 & -Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^0 & 0 & Z^0 & 0 \\ 0 & Z^0 & 0 & Z^0 \\ Z^0 & 0 & -Z^0 & 0 \\ 0 & Z^0 & 0 & -Z^0 \end{bmatrix}.$$

Isso mostra como F poderia ser obtido em três etapas, calculando-se

$$\begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & 0 & Z^0 & 0 \\ 0 & Z^0 & 0 & Z^0 \\ Z^0 & 0 & -Z^0 & 0 \\ 0 & Z^0 & 0 & -Z^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_1 + f_3 \\ f_0 - f_2 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_0^{(2)} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & Z^0 & 0 & 0 \\ Z^0 & -Z^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z^0 & Z^{-1} \\ 0 & 0 & Z^0 & -Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} + f_1^{(1)} \\ f_0^{(1)} - f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + Z^{-1}f_3^{(1)} \\ f_2^{(1)} - Z^{-1}f_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

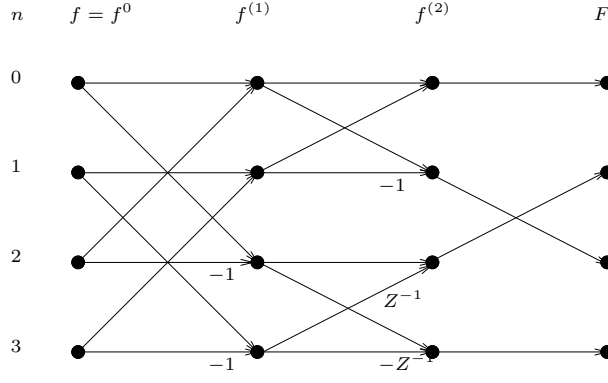
e finalmente

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_1^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Observe que as duas primeiras etapas correspondem a N operações aritméticas cada, e a última etapa apenas rearranja os elementos do vetor.

Frequentemente indicamos as operações acima através de diagramas, com setas indicando parcelas nas expressões e índices nas setas indicando multiplicadores. As expressões acima seriam representadas como:

²na prática a fatoração será realizada implicitamente pela recursão



3.2 Abrindo a recursão da FFT (seção opcional)

Vamos ver a seguir que o método FFT geral para $N = 2^\sigma$ calcula σ vetores $f^{(1)}, \dots, f^{(\sigma)}$ intermediários, cada um a um custo $\mathcal{O}(N)$, e obtém o resultado final rearranjando os elementos de $f^{(\sigma)}$. No total, o método utiliza $\mathcal{O}(N\sigma) = \mathcal{O}(N \log N)$ operações aritméticas.

Para entender o modo como os vetores intermediários são calculados, considere a expressão da transformada discreta de Fourier usando a abreviação $W = Z^{-1} = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$, onde vamos substituir os inteiros n e k por suas representações binárias $n = (n_{\sigma-1}, \dots, n_0) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j$ e $k = (k_{\sigma-1}, \dots, k_0) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j$:

$$F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)} = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_{\sigma-1}=0}^1 f_{(k_{\sigma-1}, \dots, k_0)} W^{(\sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j)(\sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j)}, \quad n_j = 0, 1, \quad j = 0, \dots, \sigma - 1.$$

Utilizando a propriedade $W^N = W^{2^\sigma} = 1$, podemos simplificar o expoente de W na expressão acima:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j \right) &= \sum_{j=0}^{\sigma-1} \left(\sum_{l=0}^{\sigma-1} n_l 2^{l+j} \right) k_j \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma-1} \left(\sum_{l=0}^{\sigma-1-j} n_l 2^{l+j} \right) k_j, \end{aligned}$$

de onde podemos escrever

$$F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)} = \sum_{k_0=0}^1 \cdots \sum_{k_{\sigma-2}=0}^1 \overbrace{\sum_{k_{\sigma-1}=0}^1 f_{(k_{\sigma-1}, \dots, k_0)} W^{n_0 2^{\sigma-1} k_{\sigma-1}} W^{(n_1 2^{\sigma-1} + n_0 2^{\sigma-2}) k_{\sigma-2}} \cdots W^{(n_{\sigma-1} 2^{\sigma-1} + n_{\sigma-2} 2^{\sigma-2} + \cdots + n_0 2^0) k_0}}^{\text{chave}}$$

Observe que a expressão central (indicada pela chave) depende dos valores n_0 e $k_{\sigma-2}, \dots, k_0$ (a variável $k_{\sigma-1}$ está atrelada à somatória, percorrendo os valores 0 e 1). Definiremos assim um vetor $f^{(1)} \in \mathbf{C}^N$ indexado por $(n_0, k_{\sigma-2}, \dots, k_0)$ pela expressão

$$f_{(n_0, k_{\sigma-2}, \dots, k_0)}^{(1)} = \sum_{k_{\sigma-1}=0}^1 f_{(k_{\sigma-1}, k_{\sigma-2}, \dots, k_0)} W^{n_0 2^{\sigma-1} k_{\sigma-1}}.$$

Percorrendo a fórmula de $F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)}$ de dentro para fora observamos a expressão seguinte como

$$\sum_{k_{\sigma-2}=0}^1 f_{(n_0, k_{\sigma-2}, k_{\sigma-3}, \dots, k_0)}^{(1)} W^{(n_1 2^{\sigma-1} + n_0 2^{\sigma-2}) k_{\sigma-2}}$$

que depende dos valores n_0, n_1 e $k_{\sigma-3}, \dots, k_0$ (a expressão não depende de $k_{\sigma-2}$ que está ligado à somatória). Assim podemos definir outro vetor $f^{(2)} \in \mathbf{C}^N$ indexado por $(n_0, n_1, k_{\sigma-3}, \dots, k_0)$ pela expressão

$$f_{(n_0, n_1, k_{\sigma-3}, \dots, k_0)}^{(2)} = \sum_{k_{\sigma-2}=0}^1 f_{(n_0, k_{\sigma-2}, k_{\sigma-3}, \dots, k_0)}^{(1)} W^{(n_1 2^{\sigma-1} + n_0 2^{\sigma-2}) k_{\sigma-2}}.$$

Podemos continuar definindo estes vetores de maneira análoga; na ν -ésima etapa teremos a expressão

$$f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, n_{\nu-1}, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu)} = \sum_{k_{\sigma-\nu}=0}^1 f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, k_{\sigma-\nu}, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} W^{(n_{\nu-1} 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}) k_{\sigma-\nu}},$$

que depende explicitamente de $n_0, \dots, n_{\nu-1}$ e $k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0$ ($k_{\sigma-\nu}$ está ligada à somatória). A expressão acima define a expressão de σ vetores intermediários $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(\sigma)}$ (considerando o vetor f original como $f^{(0)}$). O último vetor

$$f_{(n_0, \dots, n_{\sigma-2}, n_{\sigma-1})}^{(\sigma)} = \sum_{k_0=0}^1 f_{(n_0, \dots, n_{\sigma-2}, k_0)}^{(\sigma-1)} W^{(n_{\sigma-1} 2^{\sigma-1} + n_{\sigma-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^0) k_0}$$

possui índices $(n_0, \dots, n_{\sigma-1})$ que correspondem aos bits do vetor $F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)}$ invertidos de posição. A última etapa do processo, que corresponde à atribuição na expressão de $F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)}$, é simplesmente

$$F_{(n_{\sigma-1}, \dots, n_0)} = f_{(n_0, \dots, n_{\sigma-1})}^{(\sigma)}$$

que por esta razão é denominada de etapa da inversão de bits.

A expressão

$$f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, n_{\nu-1}, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu)} = \sum_{k_{\sigma-\nu}=0}^1 f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, k_{\sigma-\nu}, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} W^{(n_{\nu-1} 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}) k_{\sigma-\nu}}$$

pode ser melhor compreendida ao abrirmos a somatória substituindo os valores de $k_{\sigma-\nu}$:

$$f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, n_{\nu-1}, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu)} = f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 0, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} + f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 1, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} W^{n_{\nu-1} 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}}.$$

Considere os valores $n_{\nu-1} = 0$ e $n_{\nu-1} = 1$ na expressão acima. Observando que

$$\begin{aligned} W^{(1) 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}} &= W^{2^{\sigma-1}} W^{(0) 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ &= W^{\frac{N}{2}} W^{(0) 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ &= -W^{(0) 2^{\sigma-1} + n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}}, \end{aligned}$$

podemos escrever o par de equações

$$\begin{cases} f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 0, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu)} = f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 0, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} + f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 1, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} W^{n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 1, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu)} = f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 0, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} - f_{(n_0, \dots, n_{\nu-2}, 1, k_{\sigma-\nu-1}, \dots, k_0)}^{(\nu-1)} W^{n_{\nu-2} 2^{\sigma-2} + \dots + n_0 2^{\sigma-\nu}} \end{cases}$$

ou equivalentemente, substituindo a representação binária pela decimal,

$$\begin{cases} f_m^{(\nu)} &= f_m^{(\nu-1)} + f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)} & \text{para qualquer } m \text{ da forma} \\ f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)} &= f_m^{(\nu-1)} - f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)} & m = (m_{\sigma-1}, \dots, m_{\sigma-(\nu-1)}, 0, m_{\sigma-(\nu+1)}, \dots, m_0)_2 \end{cases}$$

onde o expoente $p(m)$ é calculado a partir de $m = (m_{\sigma-1}, \dots, m_0)_2$ através das operações

1. deslocamento para a direita de $\sigma - \nu$ bits: resultado = $(\overbrace{0, \dots, 0}^{\sigma-\nu \text{ bits}}, m_{\sigma-1}, \dots, m_{\sigma-\nu})_2$;
2. inversão da representação em σ bits: resultado = $(m_{\sigma-\nu}, \dots, m_{\sigma-1}, \overbrace{0, \dots, 0}^{\sigma-\nu \text{ bits}})_2$.

Pela simetria das equações acima, o par de valores

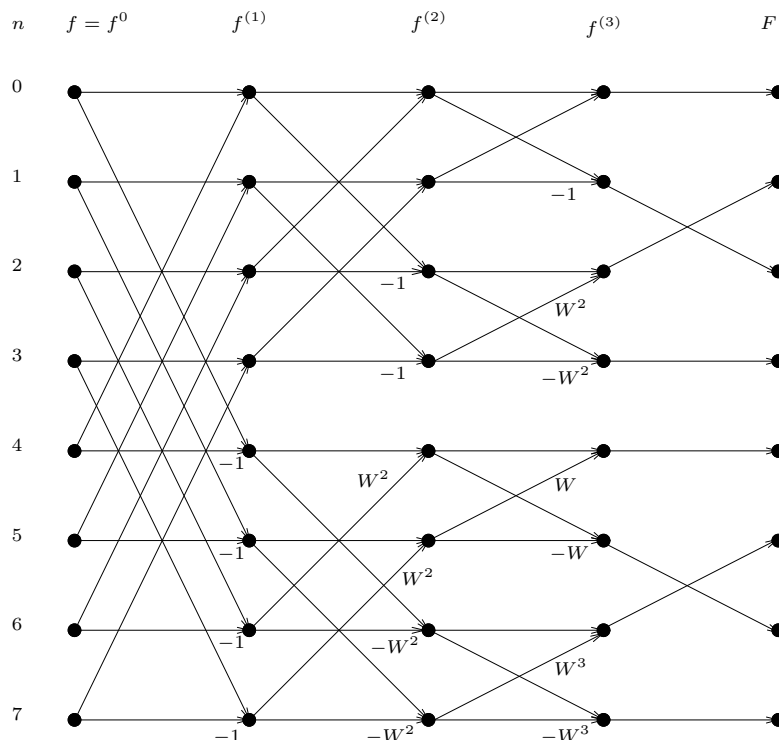
$$\left(f_m^{(\nu-1)}, f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} \right)$$

recebe o nome de par dual em relação à etapa ν da FFT. Note que a distância entre índices dos elementos do par dual é de

$$2^{\sigma-\nu} = \frac{2^\sigma}{2^\nu} = \frac{N}{2^\nu}.$$

Observe ainda que para todos os valores de m da forma $m = (m_{\sigma-1}, \dots, m_{\sigma-(\nu-1)}, 0, m_{\sigma-(\nu+1)}, \dots, m_0)_2$ os valores $f_m^{(\nu-1)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)}$ só aparecem nas expressões de $f_m^{(\nu)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)}$. Isso mostra que o cálculo de todas as etapas da FFT pode ser feito em um único vetor em \mathbb{C}^N , guardando os valores das expressões $f_m^{(\nu-1)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)}$ em variáveis auxiliares antes de efetuar as atribuições em $f_m^{(\nu)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)}$ (apenas uma variável auxiliar é estritamente necessária se as atribuições forem executadas na ordem contrária à indicada acima).

Para efeito de ilustração, as três etapas da FFT para $N = 8$ teriam um diagrama como segue:



Exemplo: Considere o vetor $f = f^{(0)} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)' \in \mathbb{R}^8$. Sua transformada de Fourier discreta pode ser calculada com auxílio do diagrama da FFT acima:

$$\begin{array}{cccccc}
 f = f^{(0)} & & f^{(1)} & & f^{(2)} & & f^{(3)} & & F \\
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Lembrando da equação de síntese da transformada discreta de Fourier

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}},$$

observamos que o vetor original é construído a partir das funções periódicas

$$\frac{1}{N} \left[\begin{array}{c} e^{i2\pi n \frac{0}{N}} \\ e^{i2\pi n \frac{1}{N}} \\ \vdots \\ e^{i2\pi n \frac{(N-1)}{N}} \end{array} \right] = \frac{1}{N} \left[\begin{array}{c} \cos(2\pi n \frac{0}{N}) \\ \cos(2\pi n \frac{1}{N}) \\ \vdots \\ \cos(2\pi n \frac{N-1}{N}) \end{array} \right] + i \frac{1}{N} \left[\begin{array}{c} \text{sen}(2\pi n \frac{0}{N}) \\ \text{sen}(2\pi n \frac{1}{N}) \\ \vdots \\ \text{sen}(2\pi n \frac{N-1}{N}) \end{array} \right]$$

para $n = 0, \dots, N - 1$. Em particular, no exemplo anterior,

$$\begin{aligned}
 f_k &= \frac{1}{8} \left(4 + 4 \left(\cos(2\pi 4 \frac{k}{8}) + i \text{sen}(2\pi 4 \frac{k}{8}) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(k\pi) + \frac{i}{2} \text{sen}(k\pi) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(k\pi)
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando que $F_{N-n} = F_{-n} = F_n^*$, e representando $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, podemos escrever o n -ésimo harmônico h_n (para $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$) como

$$\begin{aligned} h_n(k) &= \frac{1}{N} F_n e^{i2\pi n \frac{k}{N}} + \frac{1}{N} F_{N-n} e^{i2\pi(N-n) \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi n \frac{k}{N}} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi(-n) \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \alpha_n \left(e^{i(2\pi n \frac{k}{N} + \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n \frac{k}{N} + \varphi_n)} \right) \\ &= \frac{2}{N} \alpha_n \cos\left(2\pi n \frac{k}{N} + \varphi_n\right). \end{aligned}$$

As frequências utilizadas nesta decomposição são claramente

$$\left\{ \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \right\}.$$

Quando $n = 0$ temos $F_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_k$. Para $n = \frac{N}{2}$, pode-se provar que $F_{\frac{N}{2}}$ é sempre real, e assim $\varphi_{\frac{N}{2}} = 0$ (verifique!); assim o $\frac{N}{2}$ -ésimo harmônico é

$$\begin{aligned} h_{\frac{N}{2}} &= \frac{1}{N} F_{\frac{N}{2}} e^{i2\pi k \frac{N/2}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} e^{i2\pi k \frac{N/2}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} e^{ik\pi} \\ &= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \cos(k\pi) + i \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \text{sen}(k\pi) \\ &= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \cos(k\pi). \end{aligned}$$

Considere agora que as N amostras correspondem a um sinal amostrado à taxa de R Hz. Então a duração de todos os vetores acima é de $\frac{N}{R}$ segundos. Em particular, todos os harmônicos utilizados na decomposição terão seus comprimentos de onda divididos por R ou, equivalentemente,

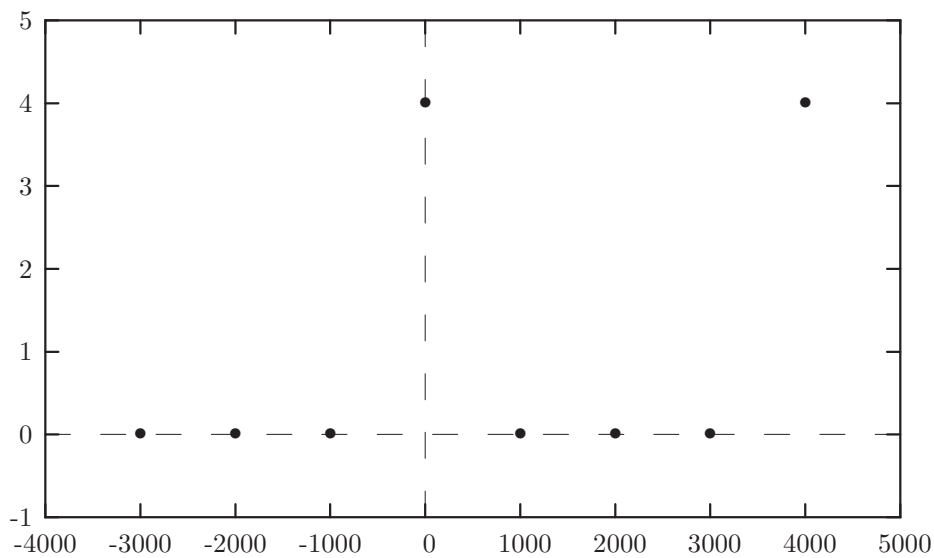
suas frequências multiplicadas por R . Isso mostra que neste contexto as frequências da análise são

$$\left\{ \frac{0}{N}, \frac{R}{N}, \dots, \frac{(N-1)R}{N} \right\};$$

outro modo de verificar isto é considerar que se f_k corresponde ao valor da função $f(t)$ no instante $t = \frac{k}{R}$ então pela equação de síntese

$$f\left(\frac{k}{R}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \left(\frac{nR}{N}\right) \left(\frac{k}{R}\right)}.$$

Assim, se nosso exemplo $f = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)'$ fosse de um trecho de áudio amostrado à taxa $R = 8000\text{Hz}$, então o espectro teria uma resolução de 1000Hz e poderia ser representado como a figura abaixo



Observando que $F_{-n} = F_n^*$, poderíamos omitir a parte negativa do espectro sem perda de informação.