

PICME/IME/USP COMBINATÓRIA

NOTAS - 2010

YOSHIHARU KOHAYAKAWA E GUILHERME MOTA (IME/USP)

1. (n, d, λ) -GRAFOS

01/03/2010

O objeto de estudo desta seção é um tópico bastante estudado por Noga Alon. Sobre este assunto, o leitor pode encontrar uma boa palestra deste pesquisador em

<http://www.pims.math.ca/resources/multimedia>.

Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G) = [n] = \{1, \dots, n\}$ e conjunto de arestas E . A matriz de adjacência $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de G é a matriz em que $a_{i,j} = 1$, caso $(i, j) \in E$ e $a_{i,j} = 0$, caso contrário.

Definição 1. Dizemos que λ é autovalor de uma matriz A se existe um vetor não nulo x tal que $Ax = \lambda x$. Dizemos que x é um autovetor associado ao autovalor λ .

Como a matriz de adjacência A é real e simétrica, possui n autovalores reais, denotados por $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, onde estamos considerando $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$ (as vezes supõe-se que $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$) e $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-1}$ são os autovetores associados, respectivamente, a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Ademais, podemos supor que os vetores $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-1}$ formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , isto é, $\langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \rangle = 1$, se $i = j$ e $\langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \rangle = 0$, caso contrário.

Se $O = [\underline{x}_0 \mid \dots \mid \underline{x}_{n-1}]$, então $O^t O = O O^t = I_n$ (matriz identidade). Se D é a matriz $O^t A O$, temos que $D = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Portanto, $A = O D O^t$, isto é,

$$A = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^t \right),$$

pois $(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^t) \underline{x}_j = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i (\underline{x}_i^t \underline{x}_j) = \lambda_j \underline{x}_j = A \underline{x}_j$.

Deste ponto em diante, vamos considerar G como sendo um grafo d -regular.

Fato 2. *Todo autovalor λ de G satisfaz $|\lambda| \leq d$.*

Demonstração. Seja $\underline{x} = (x_i)^n$ um autovetor associado a λ . Assim, $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Suponha que x_p seja tal que $|x_p| \geq |x_i|$, para todo i . Então,

$$|\lambda||x_p| = |(\lambda\underline{x})_p| = |(A\underline{x})_p| = \left| \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{pj}|x_p| = d|x_p|.$$

Como $\underline{x} \neq \underline{0}$, então $|x_p| > 0$. Portanto, $|\lambda| \leq d$. \square

Observe que, com a notação que estamos utilizando, $\lambda_0 = d$. Ademais, $\underline{x}_0 = (1, \dots, 1)/\sqrt{n}$.

Definição 3. *Um grafo G é um (n, d, λ) -grafo se é d -regular, tem n vértices e seus autovalores satisfazem $|\lambda_i| \leq \lambda$, para $i = 1, \dots, n-1$.*

Fato 4. *Seja G um (n, d, λ) -grafo. Se $d \leq (1 - \varepsilon)n$, então $\lambda \geq \sqrt{\varepsilon d}$.*

Demonstração. Seja A a matriz de adjacência de G . Assim, A^2 tem autovalores $\lambda_0^2, \lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$, onde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são os autovalores de A . Ademais, $nd = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^2$, onde $\text{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A . Portanto, $nd = \lambda_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \leq d^2 + (n-1)\lambda^2$. Concluimos que $\lambda^2(n-1) \geq nd - d^2 = d(n-d) \geq \varepsilon nd$, logo $\lambda^2 \geq \varepsilon d$. \square

Existem construções determinísticas de (n, d, λ) -grafos. Duas importantes construções foram feitas por Lubotzky, Phillips e Sarnak [14] e Margulis [15]. Os grafos obtidos nestas construções são tais que $\lambda = 2\sqrt{d-1}$. Estes grafos são chamados *grafos de Ramanujan*.

Definição 5. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denotamos por $e(U, W)$ a quantidade de arestas com uma extremidade em U e a outra em W , onde as arestas que possuem as duas extremidades em $U \cap W$ são contadas duas vezes. Isto é, $e(U, W) = |\{(u, w) : u \in U, w \in W \text{ e } \{u, w\} \in E(G)\}|$.*

Teorema 6 (*Expander Mixing Lemma*). *Seja G um (n, d, λ) -grafo. Então, para todo $U, W \subset V(G)$, temos que*

$$\left| e(U, W) - \frac{d|U||W|}{n} \right| \leq \lambda\sqrt{|U||W|}.$$

Observação 1. Se $U = W$, temos que $|e(U, U) - d|U|^2/n| \leq \lambda|U|$. Ademais, $e(U, U)$ é igual a duas vezes o número de arestas induzidas por U , que denotamos por $e(U)$. Portanto, temos que $|2e(U) - d|U|^2/n| \leq \lambda|U|$, isto é, $|e(U) - d|U|^2/2n| \leq (\lambda/2)|U|$.

Observação 2. $\alpha(G) = \max_I |I|$, onde o máximo é tomado sobre os conjuntos $I \subset V(G)$ que são independentes (estáveis), isto é, que não induzem nenhuma aresta. Se $I \subset V(G)$ é independente,

então $e(I) = 0$. O Teorema 6 diz que $d|I|^2/2n \leq (\lambda/2)|I|$, isto é, $|I| \leq (n/d)\lambda$. Portanto, concluímos que $\alpha(G) \leq \lambda(n/d)$ para todo (n, d, λ) -grafo.

Observação 3. Se G é um (n, d, λ) -grafo, então

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{\frac{\lambda n}{d}} = \frac{d}{\lambda}.$$

Demonstração do Teorema 6. Fixe $U, W \subset V(G)$. Sejam $\chi_U = (\chi_{U,i})^n$ e χ_W os vetores característicos de U e W , isto é, $\chi_{U,i} = 1$, se $i \in U$ e $\chi_{U,i} = 0$, caso contrário (analogamente para χ_W). Temos que $e(U, W) = \chi_U^t A \chi_W$. Lembre que $A = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^t = \lambda_0 \underline{x}_0 \underline{x}_0^t + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^t$, onde dizemos que $A_0 = \lambda_0 \underline{x}_0 \underline{x}_0^t$ (termo principal) e $E = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \underline{x}_i \underline{x}_i^t$ (termo de erro). Temos $\chi_U = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underline{x}_i$ e $\chi_W = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \underline{x}_i$, onde $\alpha_i = \langle \chi_U, \underline{x}_i \rangle = \chi_U^t \underline{x}_i$ e $\beta_i = \langle \chi_W, \underline{x}_i \rangle = \chi_W^t \underline{x}_i$.

Observe que A_0 é a matriz com todas as posições tendo valor d/n , pois $\underline{x}_0 = (1, \dots, 1)/\sqrt{n}$ e $\lambda_0 = d$. Assim, fica fácil ver que $\chi_U^t A_0 \chi_W = d|U||W|/n$. Ademais

$$\begin{aligned} \chi_U^t E \chi_W &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underline{x}_i^t \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \underline{x}_j \underline{x}_j^t \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \underline{x}_k \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underline{x}_i^t \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \beta_k \underline{x}_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \alpha_k \beta_k \right). \end{aligned}$$

Com isso, temos que $|\chi_U^t E \chi_W| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| |\alpha_k| |\beta_k|$. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\chi_U^t E \chi_W| &\leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| |\beta_k| \\ &\leq \lambda \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^2 \right)^{1/2} \\ &= \lambda \sqrt{|U|} \sqrt{|W|}. \end{aligned}$$

Assim, $e(U, W) = \chi_U^t A \chi_W = (d/n)|U||W| + O_1(\lambda\sqrt{|U||W|})$, onde $O_1(x)$ denota um valor y tal que $|y| \leq x$. \square

1.1. **Problemas e exercícios.** Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

1. Suponha que $G = (X, Y; E)$ seja um grafo bipartido. Mostre que, se λ é um autovalor de G , então $-\lambda$ também o é.
2. Considere um grupo com n pessoas. Suponha que, para quaisquer duas pessoas x e y do grupo, exista uma terceira pessoa z tal que x e y conhecem z . Prove que existe uma pessoa do grupo que conhece todas as outras.

2. GRAFOS EXPANSORES - PARTE I

08/03/2010

Intuitivamente, dizemos que um grafo G é *expansor* se todo conjunto $U \subset V(G)$ possui muitos vizinhos.

Definição 7. Considere um grafo $G = (V, E)$ e $U \subset V$. Dizemos que $\Gamma_G(U)$ é a vizinhança de U em G , isto é, $\Gamma_G(U) = \{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G), v \in U\}$. Quando é claro qual o grafo em questão, podemos simplesmente utilizar $\Gamma(U)$.

Definição 8. Um grafo G é um (b, f) -expansor se $|\Gamma(U)| \geq f|U|$, para todo $U \subset V(G)$ tal que $|U| \leq b$.

Claramente, se $\Delta(G)$ denota o grau máximo de um vértice em G , então $|\Gamma(U)| \leq \Delta|U|$.

Vamos provar que qualquer subgrafo H de um (n, d, λ) -grafo é expansor, desde que $\delta(H)$ (grau mínimo de um vértice em H) seja limitado inferiormente.

Teorema 9. Seja G um grafo. Se H é um subgrafo de G tal que $\delta(H) \geq \delta d$, com $0 < \delta \leq 1$, então H é um $((1 - \eta)\delta n/f, f)$ -expansor, onde $f = (n\delta d/\lambda)^2$, para todo $0 < \eta < 1$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que H não seja um $((1 - \eta)\delta n/f, f)$ -expansor, isto é, existe um subconjunto U de vértices de H tal que $|U| \leq (1 - \eta)\delta n/f$ e $|\Gamma_H(U)| < f$. Observe que $\delta d|U| \leq e_H(U, \Gamma_H(U)) \leq e_G(U, \Gamma_H(U))$. Pelo Teorema 6, temos que

$$\begin{aligned} \delta d|U| &\leq \frac{d}{n}|U||\Gamma_H(U)| + \lambda\sqrt{|U||\Gamma_H(U)|} \\ &\leq \frac{d}{n}|U|(f|U|) + \lambda\sqrt{|U||\Gamma_H(U)|} \\ &\leq \frac{d}{n}|U|(1 - \eta)\delta n + \lambda\sqrt{|U||\Gamma_H(U)|}. \end{aligned}$$

Assim, $\eta\delta d|U| < \lambda\sqrt{|U||\Gamma_H(U)|}$. Portanto, $|\Gamma_H(U)| > (\eta\delta d/\lambda)^2|U| = f|U|$. Mas isto contradiz a escolha de U . □

Enunciamos a seguir um importante lema obtido por Lajos Pósa.

Lema 10 (Lema de Pósa). *Sejam G um grafo não vazio e b um inteiro positivo tal que, para todo $X \subset V(G)$, com $|X| \leq b$, temos $|\Gamma(X) \setminus X| \geq 2|X| - 1$. Então G contém um p^{3b-1} (caminho com $3b - 1$ vértices).*

É um bom exercício provar o lema acima.

15/03/2010

Inicialmente, vamos relembrar algumas definições.

Definição 11. O número de Ramsey é dado por $R(n) = \min\{N: K^N \rightarrow (K^n, K^n)\}$, onde a notação $G \rightarrow (H_1, H_2)$ significa que ao colorir as arestas do grafo G com as cores azul e vermelho, existe, em G , uma cópia de H_1 somente com arestas azuis ou uma cópia de H_2 somente com arestas vermelhas.

Observe que podemos generalizar o conceito de números de Ramsey.

Definição 12. O número de Ramsey generalizado é dado por $r(H) = \min\{N: K^N \rightarrow (H, H)\}$.

O seguinte teorema nos dá uma cota superior para o número de Ramsey generalizado.

Teorema 13 (Chvátal–Rödl–Szemerédi–Trotter [3]). *Para todo $\Delta > 0$, existe um $c > 0$ tal que se H é um grafo com n vértices e grau máximo $\Delta(H) \leq \Delta$, então $r(H) \leq cn$.*

Podemos definir também o número de Ramsey relativo às arestas de um grafo. Definimos tal número por $r_a(H) = \min\{e(G): G \rightarrow (H, H)\}$.

Observação. Se $\Delta(H) \leq \Delta$, então, utilizando o Teorema 13, temos que

$$r_a(H) \leq \binom{r(H)}{2} \leq \binom{cn}{2} \leq \frac{1}{2}(cn)^2 = c'n^2.$$

Paul Erdős fez a seguinte pergunta (oferecendo \$ 100,00 para quem resolvesse): É verdade que $r_a(P^n) \ll \binom{n}{2}$? József Beck forneceu a resposta a esta questão mostrando que $r_a(P^n) \leq cn$, para algum $c > 0$, porém, através de uma prova não construtiva [2]. Em 1988, Noga Alon e Fan Chung deram uma prova construtiva utilizando (n, d, λ) -grafos [1]. Abaixo mostramos um esboço da prova de Alon e Chung.

Seja G^N um (N, d, λ) -grafo com $\lambda \ll d = O(1)$ (lembre-se que tais grafos existem [14, 15]). Fixe $H \subset G$ com $e(H) \geq e(G)/2$. Afirmamos que se N , d e λ forem escolhidos apropriadamente, então $H \supset P^n$. De fato, basta que consigamos $d = O(1)$ e $N = O(n)$. Isto prova o resultado.

Observe que H contém um subgrafo H' com $\delta(H') \geq d/4$. De fato, seja inicialmente $H' = H$. Eliminamos vértices de H' , sucessivamente, enquanto houver vértices com grau menor que $d/4$. Se exaurirmos o conjunto de vértices, temos menos que $Nd/4 = e(G)/2$ arestas em H , uma contradição com a escolha de H . Logo, ao término deste processo temos o grafo H' desejado.

Com isso, sabemos que H' é um (b, f) -expansor, para todo $0 < f \leq (d/(8\lambda))^2$ e $b = N/8f$ (para obter tais valores, faça $\delta = 1/4$ e $\eta = 1/2$ no Teorema 9). Suponha que $(d/(8\lambda))^2 \geq 3$. Então, temos que H' é um $(N/24, 3)$ -expansor.

Tomando $b = \lfloor N/24 \rfloor$, temos que se $X \subset V(H')$ com $|X| \leq \lfloor N/24 \rfloor$, então $|\Gamma(X)| \geq 3|X|$. Portanto, $|\Gamma(X) \setminus X| \geq 2|X| \geq 2|X| - 1$. Pelo Lema 10 (Lema de Pósa), sabemos que $H' \supset P^{3b-1}$, mas $3b - 1 = 3\lfloor N/24 \rfloor - 1 \geq 3(N/24 - 1) - 1 = N/8 - 4$. Portanto, escolhendo $N \geq 8n + 32$, temos que $3b - 1 \geq n$. Assim, $H' \supset P^n$, concluindo a esboço da prova.

Vamos agora provar o Lema de Pósa (Lema 10).

Definição 14. Dado um grafo $G = (V, E)$, seja P um caminho entre vértices x e y em G . Se z é um vizinho de y que está em P mas não é o vizinho de y em P , existe um vizinho z' de z , de modo que podemos gerar um novo caminho P' de mesmo tamanho que P adicionando a aresta $\{y, z\}$ e removendo a aresta $\{z, z'\}$ (veja Figura 1). Chamamos esta transformação de troca de caminho.

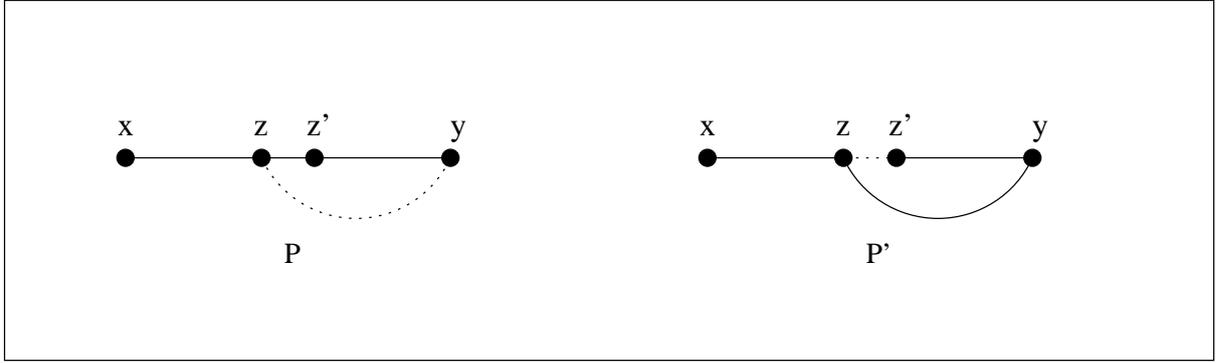


FIGURA 1. Troca de caminho de P para P' .

Demonstração do Lema de Pósa. Seja P um caminho máximo no grafo G e \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos obtidos a partir de P através de troca de caminhos. Se X é o conjunto dos extremos de caminhos em \mathcal{P} , defina X^- e X^+ como os conjuntos de vértices que, respectivamente, antecedem e sucedem imediatamente os elementos de X em P .

Mostraremos inicialmente que $\Gamma(X) \subset X^- \cup X \cup X^+$. Considere um caminho $P' \in \mathcal{P}$ que começa em um vértice $x \in X$ (tal caminho existe, pela definição de X) e seja $y \in V(G) \setminus X^- \cup X \cup X^+$. Se $y \in V(G) \setminus V(P)$, então, como P' é máximo, x e y não são adjacentes. Suponha agora que $y \in V(P) \setminus X^- \cup X \cup X^+$. Assim, y possui os mesmos vizinhos em qualquer caminho de \mathcal{P} , pois uma troca de caminhos que torna y não adjacente a algum desses vizinhos faria com que y ou tal vizinho pertencesse a X , uma contradição, pois $y \notin X^- \cup X \cup X^+$. Portanto, uma troca de

caminhos aplicada em P' faria com que y fosse vizinho de um elemento em X , uma contradição. Logo, x e y não podem ser adjacentes, de onde concluímos que todos os vizinhos de vértices em X estão em $X^- \cup X \cup X^+$.

Sabendo que $\Gamma(X) \subset X^- \cup X \cup X^+$, considere um caminho máximo P em G . Assim, temos que $\Gamma(X) \setminus X \subset X^- \cup X^+$, de onde concluímos que $|\Gamma(X) \setminus X| \leq 2|X| - 2$. Pela hipótese no enunciado do Lema de Pósa, $|X| > b$. Logo, existe $X' \subset X$ tal que $|X'| = b$ e, portanto, temos $|\Gamma(X') \setminus X'| \geq 2|X'| - 1$. Mas, como $X' \cup \Gamma(X') \subset V(P)$, temos que

$$|V(P)| \geq |X' \cup \Gamma(X')| = |X'| + |\Gamma(X') \setminus X'| \geq 3|X'| - 1 = 3b - 1.$$

Portanto, existe um P^{3b-1} em G . □

22/03/2010

Definição 15. Dado um grafo G , um emparelhamento é um subconjunto de arestas não adjacentes de G . Ademais, dizemos que M cobre $U \subset V(G)$ se todo vértice de U é extremo de alguma aresta em M .

Teorema 16 (Teorema de Hall [11]). Seja $B = (U, W; E)$ um grafo bipartido. Se, para todo $U' \subset U$, temos que $|\Gamma_B(U')| \geq |U'|$, então B possui um emparelhamento que cobre U .

Demonstração (Rado [18]). Remova as arestas de B até que a hipótese seja satisfeita de forma minimal, isto é, se removermos qualquer outra aresta de B , a hipótese falha. Se B não contém vértices $u_1, u_2 \in U$ e $w \in W$ tais que $\{u_1, w\}, \{u_2, w\} \in E$, então, claramente, existe um emparelhamento que cobre U . Portanto, supomos que existem tais vértices u_1, u_2 e w . Como removemos arestas de forma que a hipótese seja válida minimalmente, existem $U_1, U_2 \subset U$ (com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$) tais que a hipótese falha para $B_i = B - \{u_i, w\}$, com $i = \{1, 2\}$. Assim, $|\Gamma_B(U_i)| = |U_i|$, para $i = \{1, 2\}$. Ademais, $w \notin \Gamma_B(U_1 \setminus \{u_1\})$ e $w \notin \Gamma_B(U_2 \setminus \{u_2\})$. Concluimos então que

$$w \cup (\Gamma_B(U_1 \setminus \{u_1\}) \cap \Gamma_B(U_2 \setminus \{u_2\})) \subset (\Gamma_B(U_1) \cap \Gamma_B(U_2)),$$

onde $w \notin \Gamma_B(U_1 \setminus \{u_1\}) \cap \Gamma_B(U_2 \setminus \{u_2\})$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\Gamma_B(U_1) \cap \Gamma_B(U_2)| &\geq |\Gamma_B(U_1 \setminus \{u_1\}) \cap \Gamma_B(U_2 \setminus \{u_2\})| + 1 \\ &\geq |\Gamma_B(U_1 \setminus \{u_1\}) \cap U_2 \setminus \{u_2\}| + 1 \\ &= |\Gamma_B(U_1 \cap U_2)| + 1. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned} |\Gamma_B(U_1 \cup U_2)| &= |\Gamma_B(U_1) \cup \Gamma_B(U_2)| = |\Gamma_B(U_1)| + |\Gamma_B(U_2)| - |\Gamma_B(U_1) \cap \Gamma_B(U_2)| \\ &\leq |\Gamma_B(U_1)| + |\Gamma_B(U_2)| - (|\Gamma_B(U_1 \cap U_2)| + 1) \\ &= |U_1| + |U_2| - |\Gamma_B(U_1 \cap U_2)| - 1 \\ &\leq |U_1| + |U_2| - |U_1 \cap U_2| - 1 \\ &= |U_1 \cup U_2| - 1, \end{aligned}$$

uma contradição. □

Provaremos agora um resultado de Friedman e Pippenger [9] sobre contenção de árvores em certos grafos com propriedades de expansão. Para isso, precisamos de algumas definições.

Definição 17. *Seja G um grafo, T uma árvore e n, d inteiros positivos. Dizemos que uma árvore T é (n, d) -pequena, ou simplesmente pequena se $|V(T)| \leq n$ e $\Delta(T) \leq d$.*

Lembre-se que um grafo G é dito (b, f) -expansor se $|\Gamma(X)| \geq f|X|$, para todo $X \subset V(G)$ tal que $|X| \leq b$. No Teorema 19, denotamos um $(2n - 2, d + 1)$ -expansor simplesmente por *expansor*.

Definição 18. *Uma imersão de um grafo H em um grafo G é uma função injetiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ com $\{f(x), f(y)\} \in E(G)$ para todo $\{x, y\} \in E(H)$, isto é, f preserva adjacências.*

Teorema 19 (Friedman–Pippenger [9]). *Fixe $n, d > 0$. Todo grafo expansor não vazio G contém toda árvore (n, d) -pequena T .*

Demonstração. Fixe $f : V(T) \rightarrow V(G)$ uma imersão de T em G . Definimos:

1. Para todo $x \in V(G)$, defina $J_f(x) = \deg_T(f^{-1}(x))$, se $x \in f(V(T))$, e 0, caso contrário.
2. $A_f(X) = |\Gamma_G(X) \setminus f(V(T))|$, onde $X \subset V(G)$.
3. $B_f(X) = \sum_{x \in X} B_f(x)$, onde $B_f(x) = d - J_f(x)$ e $X \subset V(G)$.
4. $C_f(X) = A_f(X) - B_f(X)$, onde $X \subset V(G)$.

Dizemos que um conjunto $X \subset V(G)$ é *solvente* se $C_f(X) \geq 0$, é *crítico* se $C_f(X) = 0$ e é *falido* se $C_f(X) < 0$. Uma imersão é dita *boa* se todo $X \subset V(G)$, com $|X| \leq 2n - 2$, é solvente. Vamos provar as seguintes proposições.

P_1 . Se $|V(T)| = 1$, então qualquer imersão $f : V(T) \rightarrow V(G)$ é boa.

P_2 . Seja v uma folha de T e $S = T - v$. Se $f : V(S) \rightarrow V(G)$ é uma imersão boa, então existe uma extensão $g : V(T) \rightarrow V(G)$ que é boa.

Observe que isso prova o resultado. □

4.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

Nos exercícios abaixo, dado um grafo G , denote por $r(G)$ o número máximo de arestas em uma floresta (grafo acíclico) contida em G .

1. Suponha que F_1, F_2, \dots, F_n sejam n florestas com conjunto de vértices $[n]$. Imaginemos que F_i seja *colorido* com a cor i , para $i = 1, \dots, n$. Suponha que, para todo $I \subset [n - 1]$, temos $r(\bigcup_{i \in I} F_i) \geq |I|$. Mostre que $\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ contém uma árvore geradora (floresta com $n - 1$ arestas) multicolorida, isto é, onde todas suas arestas têm cores diferentes.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Considere $F_i \subset (V)$, para $i = 1, \dots, N$. Suponha que, para todo $I \subset [N]$, temos $r(\bigcup_{i \in I} F_i) \geq |I|$, onde $r(X) = \dim\langle X \rangle$. Mostre que existe $T = (t_i)^N$, com $t_i \in F_i$ para todo $i = 1, \dots, N$ e t_1, \dots, t_N linearmente independentes.
3. Seja $B = (U, W; E)$ um grafo bipartido e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Suponha que, para todo $U' \subset U$, temos $|\Gamma(U')| \geq k|U'|$. Prove que existe $H \subset B$ tal que, para todo $u \in U$, vale $d_H(u) = 3$ e, para todo $w \in W$, vale $d_H(w) \leq 1$.
4. Demonstre a proposição P_1 na prova do Teorema 19.

5. GRAFOS EXPANSORES - PARTE IV

05/04/2010

Dando continuidade à prova do Teorema 19 sobre contenção de árvores *pequenas* em expansores, precisamos provar a proposição P_2 enunciada na seção anterior. Dados $n, d > 0$, seja G um $(2n - 2, d + 1)$ -expansor (por simplicidade, chamemos somente de *expansor*) e T uma árvore pequena ($|V(T)| \leq n$ e $\Delta(T) \leq d$). Relembrando:

P_2 . Seja v uma folha de T e $S = T - v$. Se $f : V(S) \rightarrow V(G)$ é uma imersão boa, então existe uma extensão $g : V(T) \rightarrow V(G)$ que é boa.

Nos três lemas abaixo, que nos permitiram provar a proposição P_2 , considere um expansor G , uma árvore pequena T e $S = T - v$, onde v é uma folha de T .

Lema 20. *Seja $X \subset V(G)$. Se $C_f(X) = 0$ e $|X| \leq 2n - 2$, então $|X| \leq n - 1$.*

Demonstração. Observe que $|\Gamma_G(X)| \geq (d + 1)|X|$. Assim,

$$A_f(X) \geq (d + 1)|X| - |f(V(S))| = d|X| + |X| - (n - 1).$$

Ademais, $B_f(X) \leq d|X|$. Portanto, $0 = C_f(X) \geq d|X| + |X| - n + 1 - d|X|$, isto é, $|X| \leq n - 1$. \square

Definição 21. *Seja Z um conjunto. Dizemos que uma função $\varphi : \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ é submodular se, para todos $A, B \subset Z$, temos que $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.*

Lema 22. *Prove que $C_f(X)$ é submodular.*

Demonstração. Exercício 2.

Lema 23. *Seja f uma imersão boa e $X, Y \subset V(G)$ tais que $C_f(X), C_f(Y) = 0$ e $|X|, |Y| \leq n - 1$. Assim, temos que $C_f(X \cup Y) = 0$ e $|X \cup Y| \leq n - 1$.*

Demonstração. Temos que $|X \cup Y|, |X \cap Y| \leq 2n - 2$. Como f é boa e $C_f(X)$ é submodular (pelo Lema 22), temos que

$$0 \leq C_f(X \cup Y) + C_f(X \cap Y) \leq C_f(X) + C_f(Y) = 0.$$

Portanto, $C_f(X \cup Y), C_f(X \cap Y) = 0$. Pelo Lema 20, $|X \cup Y| \leq n - 1$. \square

Demonstração da proposição P_2 . Seja T uma árvore pequena e S a árvore obtida através da remoção de uma folha v de T e a aresta $\{v, w\}$ incidente a v . Considere ξ o conjunto das imersões que são

extensões de F para T . Tome $Y = \Gamma_G(f(w)) \setminus f(V(S))$. O mapeamento $g \mapsto g(v)$ é, claramente, uma bijeção entre ξ e Y .

Suponha, por contradição, que nenhuma extensão $g \in \xi$ é boa. Assim, para cada $g \in \xi$, existe um conjunto $X_g \subset V(G)$ com $|X_g| \leq 2n - 2$ tal que

$$(1) \quad C_g(X_g) < 0.$$

Como f é uma imersão boa, temos que

$$(2) \quad C_f(X_g) \geq 0.$$

Temos que $g(V(T)) = (\text{im } f) \cup \{g(v)\} = f(V(S)) \cup \{g(v)\}$. Ademais, $A_g(X) = |\Gamma_G(X) \setminus g(V(T))|$, isto é, $A_g(X) = A_f(X) - [g(v) \in \Gamma_G(X)]$, onde $[p] = 1$ se p é válido e $[p] = 0$ se p é falso. Observe que, como $E(T) = E(S) \cup \{v, w\}$, temos $B_g(X) = B_f(X) - [f(w) \in X] - [g(v) \in X]$. Assim, temos que $C_g(X) = C_f(X) - [g(v) \in \Gamma_G(X)] + [f(w) \in X] + [g(v) \in X]$.

Por (1) e (2), deduzimos que, para toda extensão $g \in \xi$, valem as seguintes quatro afirmações:

- 1) $C_f(X_g) = 0$.
- 2) $g(v) \in \Gamma_G(X_g)$.
- 3) $f(w) \in X_g$.
- 4) $g(v) \notin X_g$.

Ponha $X^* = \bigcup_{g \in \xi} X_g$. Pelo Lema 20, $|X_g| \leq n - 1$, para todo $g \in \xi$. Assim, por indução e pelo Lema 23, temos que $C_f(X^*) = 0$ e $|X^*| \leq n - 1$. Ponha agora $X' = X^* \cup \{f(w)\}$. Temos que $|X'| \leq n$. Como f é boa, $C_f(X') \geq 0$.

Sabemos que $g(v) \in \Gamma_G(X_g)$ para toda extensão $g \in \xi$. Assim, $Y \subset \Gamma_G(X^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned} A_f(X') &= A_f(X^* \cup f(w)) \\ &= \Gamma_G(X^* \cup f(w)) \setminus f(V(S)) \\ &= \Gamma_G(X^*) \setminus f(V(S)) \\ &= A_f(X^*). \end{aligned}$$

Temos $f(w) \notin X_g$ para toda extensão $g \in \xi$. Portanto, $f(w) \notin X^*$. Portanto, temos que $B_f(X') = B_f(X^*) + B_f(f(w)) = B_f(X^*) + d - J_f(f(w)) > B_f(X^*)$. Logo, podemos concluir que $0 \leq C_f(X') = A_f(X') - B_f(X') < A_f(X^*) - B_f(X^*) = C_f(X^*) = 0$, uma contradição.

□

5.1. **Problemas e exercícios.** Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

1. Seja G um grafo e $X \subset V(G)$. Mostre que $\varphi(X) = |\Gamma_G(X)|$ é submodular.
2. Prove o Lema 22.

12/04/2010

Definição 24. Um hipergrafo l -uniforme (ou l -grafo) é um par (X, \mathcal{M}) com $\mathcal{M} \subset \binom{X}{l}$, onde temos que $\binom{X}{l} = \{U \subset X : |U| = l\}$.

Definição 25. Um hipergrafo $G = (X, \mathcal{M})$ é dito a -partido se existe uma partição $\{X_1, X_2, \dots, X_a\}$ de X em que cada aresta de \mathcal{M} contém no máximo um vértice de cada classe de vértices da partição.

Observação. Um grafo é um 2-grafo.

Definição 26. Um circuito de tamanho p em um hipergrafo (X, \mathcal{M}) é uma sequência M_1, \dots, M_p de arestas diferentes de \mathcal{M} onde existem diferentes vértices $x_i \in M_i \cap M_{i+1}$, com $i \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ e $x_p \in M_1 \cap M_p$.

Definição 27. A cintura $g(G)$ de um hipergrafo G é o comprimento do menor circuito em G .

Apresentamos, nesta seção, uma prova construtiva da existência de hipergrafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes. Formalmente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 28 (Nešetřil–Rödl [17]). *Para quaisquer inteiros positivos l, n, p , existe um l -grafo (X, \mathcal{M}) tal que*

- 1) *Todos os circuitos de (X, \mathcal{M}) tem tamanho maior que p .*
- 2) $\chi(X, \mathcal{M}) > n$.

Antes de provar o Teorema 28, precisamos definir uma operação entre certos hipergrafos. Dados

- $((X_i), \mathcal{M})$ um l -grafo a -partido, onde (X_i) é a partição $\{X_1, X_2, \dots, X_a\}$ de um conjunto X e $|X_r| = k$ para um $r \in [1, a]$ fixo,
- (Y, \mathcal{N}) um k -grafo,

dizemos que $(Y, \mathcal{N}) *_r ((X_i), \mathcal{M})$ é o l -grafo a -partido $((X'_i), \mathcal{M}')$, onde os vértices desse hipergrafo são definidos por

- $X'_i = X_i \times \mathcal{N}$, para $i \neq r$,
- $X'_r = Y$,

e uma hiperaresta M' pertence a \mathcal{M}' se e somente se existem $N \in \mathcal{N}$ e $M \in \mathcal{M}$ tais que

- $M' \cap X'_i = (M \cap X_i, N)$, para $i \neq r$,
- $M' \cap X'_r = \iota_N(M \cap X_r)$,

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelo aluno Marcelo Matheus Gauy.

onde $\iota_N: X_r \rightarrow N$ é uma bijeção, para $N \in \mathcal{N}$. Denotados uma hiperaresta $M' \in \mathcal{M}'$ por um par (M, N) . Na Figura 2, temos um exemplo mostrando o que acontece com uma aresta que contém interseção com X_r quando realizamos esta operação.

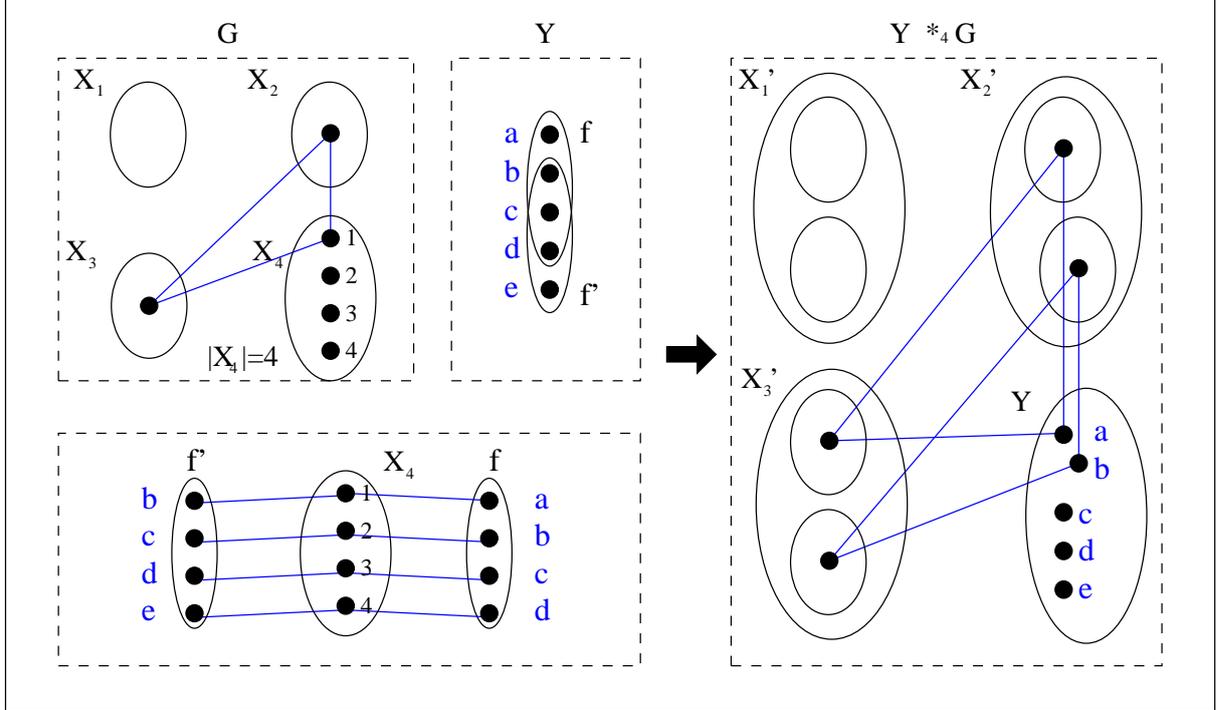


FIGURA 2. Resultado da operação $Y *_4 G$ em um 4-grafo Y e um 3-grafo G com partição $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, onde $|X_4| = 4$. Do lado esquerdo temos os hipergrafos G e Y e as bijeções ι_f e $\iota_{f'}$. Do lado direito temos o resultado da operação.

Demonstração do Teorema 28. Fixe n, l . Provamos o resultado utilizando indução em p . Se $p = 1$, o resultado é válido, pois não temos restrição alguma quanto ao tamanho dos circuitos. Tome $p > 1$ e suponha que o resultado é válido para $1 \leq p' < p$. Seja $a = (l - 1)n + 1$ e considere o l -grafo a -partido $((X_i^1), \mathcal{M}^1)$ onde, para cada conjunto de l partes $\omega \subset [1, a]$ com $|\omega| = l$, existe uma aresta $M \in \mathcal{M}^1$ onde $M \cap X_i^1 \neq \emptyset$ para todo $i \in \omega$. Claramente, $((X_i^1), \mathcal{M}^1)$ pode ser escolhido de modo a não conter circuitos de tamanho menor ou igual a p , pois podemos utilizar quantos vértices forem necessários em cada X_i .

Indutivamente, definimos l -grafos a -partidos $((X_i^t), \mathcal{M}^t)$, onde $t \in [2, a + 1]$. Se $((X_i^{t-1}), \mathcal{M}^{t-1})$ é um l -grafo a -partido tal que $|X_{t-1}^{t-1}| = k_{t-1}$, então, pela hipótese indutiva, sabemos que existe um k_{t-1} -grafo $(Y^{t-1}, \mathcal{N}^{t-1})$ sem circuitos de tamanho menor que p e com número cromático maior que n . Assim, fazemos $((X_i^t), \mathcal{M}^t) = (Y^{t-1}, \mathcal{N}^{t-1}) *_t ((X_i^{t-1}), \mathcal{M}^{t-1})$. Mostraremos que

o l -grafo $((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1})$ não possui circuitos com tamanho menor ou igual a p e tem número cromático maior que n .

Utilizando indução em j , mostramos agora que $((X_i^j), \mathcal{M}^j)$ não contém circuitos de tamanho menor ou igual a p para $j \in [1, a+1]$. Suponha, por contradição, que $((X_i^j), \mathcal{M}^j)$ não contém circuitos de tamanho menor ou igual a p , mas $((X_i^{j+1}), \mathcal{M}^{j+1})$ contém tal circuito $C = \{M'_1, \dots, M'_q\}$, com $q \leq p$. Assim, as arestas M'_1, \dots, M'_q podem ser denotadas por $(M_1, N_1), \dots, (M_q, N_q)$. Mas veja que N_1, \dots, N_q não podem ser todos iguais, pois teríamos um circuito de tamanho q em $((X_i^j), \mathcal{M}^j)$. Ademais, pela definição de $((X_i^{j+1}), \mathcal{M}^{j+1})$, temos que N_1, \dots, N_q também não podem ser todos diferentes. Mas como C é um circuito, N_1, \dots, N_q contém um circuito de tamanho no máximo $q-1$ em (Y^j, \mathcal{N}^j) , uma contradição com a escolha de (Y^j, \mathcal{N}^j) .

Resta mostrar que $\chi((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1}) > n$. Suponha, por contradição, que $\chi((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1}) \leq n$. Seja c uma coloração com n cores dos vértices de $((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1}) = (Y^a, \mathcal{N}^a) *_a ((X_i^a), \mathcal{M}^a)$. Lembrando que $\chi(Y^a, \mathcal{N}^a) > n$, existe $N^a \in \mathcal{N}^a$ tal que $|c(N^a)| = 1$. Considere tal coloração aplicada a $(X_{a-1}^a; N^a) = \{(x, N^a) : x \in X_{a-1}^a\}$. Mas $((X_i^a), \mathcal{M}^a) = (Y^{a-1}, \mathcal{N}^{a-1}) *_{a-1} ((X_i^{a-1}), \mathcal{M}^{a-1})$ e $\chi(Y^{a-1}, \mathcal{N}^{a-1}) > n$, assim, existe $N^{a-1} \in \mathcal{N}^{a-1}$ tal que $|c(N^{a-1}; N^a)| = 1$. Repetindo o processo, temos uma aresta $N^i \in \mathcal{N}^i$ tal que $|c(N^i; N^{i+1}, \dots, N^a)| = 1$ para $i \in [1, a]$. Definindo $Z_i = \{c(N^i; N^{i+1}, \dots, N^a) = 1\}$, temos que $Z_i \subset X_i^{a+1}$. Pela definição de $((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1})$, o subhipergrafo de $((X_i^{a+1}), \mathcal{M}^{a+1})$ formado por $\bigcup_{i=1}^a Z_i$ contém uma cópia de $((X_i^1), \mathcal{M}^1)$. Assim, como $a = (l-1)n + 1$, existe $\omega \subset [1, a]$ com $|\omega| = l$ tal que $|c(\bigcup_{i \in \omega} Z_i)| = 1$. Mas, lembrando da definição de $((X_i^1), \mathcal{M}^1)$, existe uma aresta monocromática $M \in \mathcal{M}^1$ tal que $M \subset \bigcup_{i \in \omega} Z_i$. Portanto, temos uma contradição. □

19/04/2010

TEOREMA DA AMIZADE

Teorema 29 (Teorema da Amizade (Erdős–Rényi–Sós [7])). *Se G é um grafo em que quaisquer dois vértices distintos possuem um único vizinho, então G tem um vértice que é vizinho de todos os outros vértices.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Suponha, por contradição, que não existe um vértice que é vizinho de todos os outros vértices. Seja k o maior grau de um vértice em G e v um vértice de grau k . Sejam w_1, \dots, w_k os vizinhos de v e seja x um vértice qualquer que não é vizinho de v (ele existe, pela suposição que fizemos no início da prova). Claramente, x só pode ser vizinho de um único elemento em $\{w_1, \dots, w_k\}$, pois caso contrário x e v teriam dois vizinhos em comum. Seja z_i um vizinho em comum de x e w_i , onde $\{x, w_i\} \notin E$ (ele existe, pois a distância entre x e w_i é dois). Sabemos que tal z_i está à distância dois de v , pois não pode ser um dos elementos de $\{w_1, \dots, w_k\}$ e qualquer par de vértices está à distância dois em G . Observe agora que cada z_i é único, pois caso contrário x e w_i teriam dois vizinhos em comum. Assim, concluímos que $\deg(x) = k$, o grau máximo de G . Repetindo o mesmo procedimento (com x fazendo o papel de v), obtemos que todo vértice possui grau k . Portanto, G é k -regular, de modo que possui $1 + k + k(k - 2)$ vértices.

Seja A a matriz de adjacência de G . A matriz $A^2 = (a_{i,j})$ é tal que $a_{i,j}$ contém a quantidade de caminhos de tamanho dois entre os vértices i e j . Temos que $\det(A^2 - \lambda I) = (k^2 - \lambda)(k - 1 - \lambda)^{k^2 - k}$, logo k^2 é autovalor de A^2 e $k - 1$ é autovalor de A^2 com multiplicidade $k^2 - k$. Assim, temos que os autovalores de A são k , $\sqrt{k - 1}$ e $-\sqrt{k - 1}$. Se r a multiplicidade de $\sqrt{k - 1}$ e s a multiplicidade de $-\sqrt{k - 1}$, então $k + r\sqrt{k - 1} - s\sqrt{k - 1} = 0$. Desta forma, $k^2 = (s - r)^2(k - 1)$. Portanto, temos que $k - 1 | k^2$, que implica $k - 1 | k$ e assim, $k - 1 | 1$. Assim, temos que $k = 2$, um absurdo, pois G seria um triângulo (todos os vértices são vizinhos de todos os outros). \square

FUNÇÕES LIMIARES

Definição 30. *Dada uma variável aleatória X . A variância de X é dada por*

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelo aluno Thiago da Silva Pinheiro.

Definição 31. Dadas duas variáveis aleatórias X e Y . A covariância de (X, Y) é dada por

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Se $X \geq 0$ e $\lambda > 0$, a seguinte desigualdade é válida.

$$(3) \quad \Pr(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Fazendo $X = (Y - \mathbb{E}(Y))^2$ e $\lambda = \omega^2$ em (3), temos $\Pr((Y - \mathbb{E}(Y))^2 \geq \omega^2) \leq \text{var}(Y)/\omega^2$. Logo,

$$(4) \quad \Pr(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \omega) \leq \frac{\text{var}(Y)}{\omega^2}.$$

Fazendo $\lambda = 1$ em (3) temos que

$$(5) \quad \Pr(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X).$$

Fazendo $\omega = \mathbb{E}(Y)$ em (4) temos que

$$(6) \quad \Pr(Y = 0) \leq \frac{\text{var}(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}.$$

Definição 32. Dizemos que uma função $f(n) \ll g(n)$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$.

Definição 33. Dizemos que $G_{n,p}$ é um grafo com n vértices onde cada par de vértices define uma aresta do grafo independentemente com probabilidade p .

Definição 34. Considere o grafo $G_{n,p}$. Dizemos que $f(n)$ é função limiar para um evento A se temos as seguintes afirmações.

- a) Se $p \gg f(n)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A) = 1$ (1-afirmação);
- b) Se $p \ll f(n)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A) = 0$ (0-afirmação).

Teorema 35. A função $n^{-2/3}$ é limiar para o evento $K^4 \subset G_{n,p}$.

Demonstração. Seja S um conjunto de quatro vértices. Definimos a variável aleatória indicadora X_S como sendo 1 caso S induza um K^4 em $G_{n,p}$ e 0 caso contrário. Assim, se X representa a quantidade de cópias de K^4 em $G_{n,p}$, temos que $X = \sum_S X_S$. Desta forma, sabemos que $\mathbb{E}(X) = \sum_S \mathbb{E}(X_S)$, portanto, $\mathbb{E}(X) = O(n^4 p^6)$.

Mostramos agora a 0-afirmação. Suponha que $p \ll n^{-2/3}$. Pela desigualdade (5) podemos concluir que $\Pr(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X) = O(n^4 p^6) \ll 1$. Assim, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\Pr(X \geq 1)$ tende a zero, isto é, $G_{n,p}$ não contém cópias de K^4 .

A 1-afirmação requer um pouco mais de esforço. Suponha que $p \gg n^{-2/3}$. Vamos mostrar que $\Pr(X = 0)$ tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_S \mathbb{E}(X_S^2) + \sum_{(S,T), S \neq T} \mathbb{E}(X_S X_T). \\ \mathbb{E}(X)^2 &= \left(\mathbb{E} \left(\sum_S X_S \right) \right)^2 = \left(\sum_S \mathbb{E}(X_S) \right)^2 \\ &= \sum_S \mathbb{E}(X_S)^2 + \sum_{(S,T), S \neq T} \mathbb{E}(X_S) \mathbb{E}(X_T). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \sum_S (\mathbb{E}(X_S^2) - \mathbb{E}(X_S)^2) + \sum_{(S,T), S \neq T} \mathbb{E}(X_S X_T) - \sum_{(S,T), S \neq T} \mathbb{E}(X_S) \mathbb{E}(X_T) \\ &= \sum_S \text{var}(X_S) + \sum_{(S,T), S \neq T} \text{cov}(X_S, X_T). \end{aligned}$$

Para utilizarmos a desigualdade (6) e obter o resultado que estamos procurando, precisamos limitar superiormente o valor de $\text{var}(X)$. Observe que $\text{var}(X_S) = \mathbb{E}(X_S^2) - \mathbb{E}(X_S)^2 \leq \mathbb{E}(X_S^2)$. Mas como X_S é uma variável indicadora, temos $\text{var}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_S) = p^6$. Logo, $\sum_S \text{var}(X_S) = O(n^4 p^6)$.

Resta limitarmos superiormente a covariância de X_S e X_T quando $S \neq T$. Se $|S \cap T| \leq 1$, então $\text{cov}(X_S, X_T) = 0$. Se $|S \cap T| = 2$, como $\text{cov}(X_S, X_T) \leq \mathbb{E}(X_S X_T)$, temos que $\text{cov}(X_S, X_T) \leq p^{11}$, de onde concluímos que $\sum \text{cov}(X_S, X_T) = O(n^6 p^{11})$, onde a soma é sobre os pares (S, T) tais que $|S \cap T| = 2$. Por fim, se $|S \cap T| = 3$, como $\text{cov}(X_S, X_T) \leq \mathbb{E}(X_S X_T)$, temos $\text{cov}(X_S, X_T) \leq p^9$, de onde concluímos que $\sum \text{cov}(X_S, X_T) = O(n^5 p^9)$, onde a soma é sobre os pares (S, T) tais que $|S \cap T| = 3$. Desta forma, podemos calcular um limitante superior para $\text{var}(X)$.

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= \sum_S \text{var}(X_S) + \sum_{(S,T), S \neq T} \text{cov}(X_S, X_T) \\ &= O(n^4 p^6 + n^6 p^{11} + n^5 p^9).\end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbb{E}(X) = O(n^4 p^6)$. Portanto, temos todos os ingredientes para aplicar a desigualdade (6).

$$\begin{aligned}\Pr(X = 0) &= O\left(\frac{n^4 p^6}{n^8 p^{12}} + \frac{n^6 p^{11}}{n^8 p^{12}} + \frac{n^5 p^9}{n^8 p^{12}}\right) \\ &= O(n^{-4} p^{-6} + n^{-2} p^{-1} + n^{-3} p^{-3}) \\ &\ll 1,\end{aligned}$$

onde a última relação segue pela escolha de p . Assim, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\Pr(X = 0)$ tende a zero, isto é, $G_{n,p}$ contém pelo menos uma cópia de K^4 . \square

Vimos que se $p \ll n^{-2/3}$, então $\Pr(K_4 \subset G_{n,p})$ tende a zero quando n tende a infinito. Vimos também que se $p \gg n^{-2/3}$, então $\Pr(K_4 \subset G_{n,p})$ tende a infinito quando n tende a infinito. Portanto, é natural perguntar o que acontece quando $p = cn^{-2/3}$, onde c é uma constante. É um bom exercício tentar estimar $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(K_4 \not\subset G_{n,p})$, onde $p = cn^{-2/3}$.

7.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

Dizemos que $G \xrightarrow{\text{ind}} H$ se, colorindo as arestas de G com duas cores, necessariamente existe um subgrafo H' induzido de G tal que $H' \sim H$ e H' é monocromático.

1. Encontre um grafo G tal que

(i) $G \xrightarrow{\text{ind}} C^4$.

(ii) $G \xrightarrow{\text{ind}} C^5$.

2. Encontre um grafo G tal que

(i) $G \rightarrow K^3$ e $G \not\rightarrow K_4$.

(ii) $G \rightarrow K^3$ e $G \not\rightarrow K_5$.

(iii) $G \rightarrow K^3$ e $G \not\rightarrow K_6$.

26/04/2010

Definição 36. Seja \mathbb{E}^d o espaço euclidiano d -dimensional. Dizemos que $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^d$ determina o ângulo α se existem $a, b, c \in \mathcal{P}$ tal que $\sphericalangle abc = \alpha$.

Definição 37. Seja \mathcal{P} finito. Pomos $\alpha_d(\mathcal{P}) = \max\{0 \leq \alpha \leq \pi : \mathcal{P} \text{ determina } \alpha\}$. Ademais, pomos também $\alpha_d(n) = \inf_{\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^d} \{\alpha_d(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = n\}$.

Observe que, por exemplo, $\alpha_2(3) = \pi/3$. De fato, se \mathcal{P} é um conjunto de três pontos formando um triângulo equilátero, então obtemos $\alpha_2(3) \leq \pi/3$. Sabemos também que, como quaisquer três pontos não colineares no plano formam um triângulo, todo conjunto \mathcal{P} determina um ângulo maior ou igual a $\pi/3$, de onde concluimos que $\alpha_2(3) \geq \pi/3$.

Definição 38. Pomos $f(d) = \max_{\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^d} \{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ determina somente ângulos agudos}\}$.

Veja que, por exemplo, $f(2) = 3$. De fato, se \mathcal{P} é um conjunto de três pontos formando um triângulo equilátero, então obtemos $f(2) \geq 3$. Observe que, se $|\mathcal{P}| \geq 4$, então o fecho convexo de \mathcal{P} é um quadrilátero ou um triângulo que contém pontos em seu interior. Em ambos os casos, existe um ângulo que não é agudo. Portanto, $f(2) \leq 3$.

Considere a seguinte invariante $f'(d) = \max_{\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^d} \{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ determina somente ângulos } \leq \pi/2\}$. Temos que $f'(d) \geq 2^d$ (construa um hipercubo de dimensão d). Danzer e Grünbaum [4] provaram o seguinte resultado sugerido por Erdős [8]: $f'(d) \leq 2^d$ (Exercício 8.1.3).

Erdős e Füredi sugeriram que existe uma constante absoluta $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_d(2^d + 1) \geq \pi/2 + \varepsilon$. Conjecturava-se que $f(d) \leq 2d - 1$. Porém, Erdős e Füredi [6] provaram que $f(d) \geq (1.18\dots)^d$, sempre que $d \geq d_0$, para algum $d_0 > 0$. Um resultado que encontra-se em aberto até os dias de hoje é mostrar que $f(d) \leq (2 - \varepsilon)^d$ para algum $\varepsilon > 0$. Ademais, será que $f(d) \leq 2^d - 1$?

Usaremos o método probabilístico para obter cotas inferiores exponenciais para $f(d)$. Escolha aleatoriamente m pontos do hipercubo em \mathbb{E}^d , isto é, $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m \in \{0, 1\}^d$, com cada \underline{x}_i sendo escolhido uniformemente de forma independente dentre os 2^d possíveis. Afirmamos que a probabilidade de $\sphericalangle \underline{x}_A \underline{x}_B \underline{x}_C = \pi/2$ é $(3/4)^d$. Isto segue do seguinte lema.

Lema 39. Sejam $A, B, C \subset [d]$ e $\underline{x}_A \underline{x}_B \underline{x}_C \in \{0, 1\}^d$ os respectivos vetores característicos. Temos que $\sphericalangle \underline{x}_A \underline{x}_B \underline{x}_C = \pi/2$ se e somente se $(A \cap C) \subset B \subset (A \cup C)$.

Demonstração. Exercício 8.1.4. □

Observe que, dada qualquer tripla formada pelos pontos escolhidos, o ângulo que ela determina é menor ou igual a $\pi/2$ (pois escolhemos pontos do hipercubo). Seja X o número de triplas (i, j, k) tal que $\sphericalangle x_A x_B x_C = \pi/2$. Desta forma, podemos observar que $\mathbb{E}(X) = m(m-1)(m-2)(3/4)^d$. Se $\mathbb{E}(X) < 1$, então existe um experimento tal que todos os ângulos são menores que $\pi/2$, de onde concluímos que, neste caso, $f(d) \geq m$. Pondo $m < (1, 1)^d$, temos que $\mathbb{E}(X) < 1$. Portanto, provamos que $f(d) \geq (1, 1)^d$.

É possível melhorar o resultado anterior através do *Método da Alteração*. Escolha m de modo que $(2m)_3(3/4)^d < m$. Assim, temos que $m = \lfloor (2/\sqrt{3})^d / (2\sqrt{2}) \rfloor = (1, 15\dots)^d / (2\sqrt{2})$. Geramos $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{2m}$ como antes. Como $\mathbb{E}(X) = (2m)_3(3/4)^d < m$, existe uma configuração com $2m$ pontos tal que $X < m$. Então, existe uma configuração \mathcal{P} com mais que $2m - m = m$ pontos tal que todos os ângulos são menores que $\pi/2$. Portanto, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 40 (Erdős–Füredi[6]).

$$f(d) > \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d.$$

8.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

1. Prove que $f(3) = 5$.
2. É fácil ver que $f(d) \geq d + 1$. Prove a seguinte cota: $f(d) \geq 2d - 1$.
3. Prove que $f'(d) \leq 2^d$. Observe que isto é o mesmo que provar $\alpha_d(2^d + 1) > \pi/2$.
4. Prove o Lema 39.
5. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que existem pelo menos $(1 + \delta)^d$ pontos em \mathbb{E}^d que determinam apenas ângulos agudos menores que $\pi/3 + \varepsilon$.

03/05/2010

FUNÇÕES GERADORAS

Definição 41. Dado um polinômio $f(z)$, denotamos por $[z^n]f(z)$ o coeficiente de z^n em $f(z)$.

Definição 42. Seja $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{C} . Dizemos que $G(z)$ é função geradora de $\langle g_n \rangle$ se $[z^n]G(z) = g_n$. Isto é, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$.

Considere as funções geradoras $F(z)$ e $G(z)$ para as sequências $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ e $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Temos que $\alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n$. Portanto, $\alpha F(z) + \beta G(z)$ é a função geradora da sequência $\langle \alpha f_n + \beta g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

De agora em diante, $F(z)$ e $G(z)$ sempre representarão funções geradoras de sequências $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ e $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. A derivada de $G(z)$ com relação a z é dada por

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)g_{n+1}z^n.$$

Desta forma, temos

$$zG'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n g_n z^n.$$

Multiplicando $F(z)$ e $G(z)$, obtemos

$$F(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right) z^n.$$

Definição 43. Dada uma variável aleatória X que assume valores inteiros não negativos, dizemos que $G_X(z)$ é a função geradora de probabilidade de X se $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X = k) z^k$.

Observação. Temos que $G_X(1) = 1$.

Funções geradoras de probabilidade tornam simples os cálculos de valor esperado e variância. Considere uma variável aleatória X que assume valores inteiros não negativos. Para o cálculo do

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelos alunos Eric Ossami Endo e Renato dos Santos Nunes.

²O conteúdo desta seção foi baseado em [10].

valor esperado, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(X = k) \\
 (7) \qquad &= \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr(X = k) z^{k-1} \Big|_{z=1} \\
 &= G'_X(1).
 \end{aligned}$$

Para o cálculo da variância, sabemos que $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Mas observe que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \Pr(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(k-1)z^{k-2} + kz^{k-1} \right) \Big|_{z=1} \Pr(X = k) \\
 &= G''_X(1) + G'_X(1).
 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$(8) \qquad \text{var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

Considere agora que as variáveis aleatórias X e Y sejam independentes. Desta forma,

$$\begin{aligned}
 G_{X+Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X + Y = n) z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \Pr(X = k \text{ e } Y = n - k) z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \Pr(X = k) \Pr(Y = n - k) z^n \\
 &= G_X(z) G_Y(z).
 \end{aligned}$$

Observe que $\mathbb{E}(X + Y) = (G_X(z)G_Y(z))' \Big|_{z=1} = G'_X(1)G_Y(1) + G_X(1)G'_Y(1)$. Mas sabemos que $G_X(1) = G_Y(1) = 1$, portanto, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$. Calculemos agora a variância de $X + Y$. Para isto, precisamos calcular $G''_{X+Y}(1)$ e $G'_{X+Y}(1)$.

$$G'_{X+Y}(1) = G'_X(1)G_Y(1) + G_X(1)G'_Y(1) = G'_X(1) + G'_Y(1).$$

Ademais,

$$\begin{aligned} G''_{X+Y}(1) &= G''_X(1)G_Y(1) + 2G'_X(1)G'_Y(1) + G_X(1)G''_Y(1) \\ &= G''_X(1) + 2G'_X(1)G'_Y(1) + G''_Y(1). \end{aligned}$$

Assim, como $\text{var}(X + Y) = G''_{X+Y}(1) + G'_{X+Y}(1) - G'_{X+Y}(1)^2$, temos que

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= (G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2) + (G''_Y(1) + G'_Y(1) - G'_Y(1)^2) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y). \end{aligned}$$

LANÇANDO MOEDAS

Consideremos agora o lançamento de uma moeda onde a probabilidade de dar cara é p e a probabilidade de dar coroa é $q = 1 - p$; Se X é a variável aleatória representando a quantidade de caras após um lançamento, temos que a função de probabilidade de X é dada por $H_X(z) = q + pz$. Se Y representa a quantidade de caras em n lançamentos independentes, Y é gerada por

$$H_Y(z) = H_X(z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k.$$

A sequência de probabilidades $\langle \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \rangle_{k=1}^n$ é chamada de *distribuição binomial*. Observe que, por (7), temos $\mathbb{E}(Y) = (H'_Y(1)) = (H_X(z)^n)'|_{z=1} = (nH_X(z)^{n-1}H'_X(z))|_{z=1} = nH'_X(1) = np$, como era esperado. Por (8), temos que

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= (H_X(z)^n)''|_{z=1} + (H_X(z)^n)'|_{z=1} = \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= (n(n-1)p^2) + (np) - n^2p^2 \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

Vamos agora considerar o processo de lançar moedas independentemente até que apareça a primeira cara. Seja X a variável aleatória representando a quantidade de lançamentos realizados até o aparecimento da primeira cara. Claramente, X é gerada por

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^{k+1} = \frac{pz}{1-qz}.$$

Repetindo esse processo até o aparecimento de n caras, temos

$$(9) \quad G_X(z)^n = \frac{p^n z^n}{(1-qz)^n} = p^n z^n (1-qz)^{-n}.$$

Seja $(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$. Assim, se n é um inteiro positivo, temos que

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)_k}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (n+k-1)_k}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Desta forma, por (9), temos

$$\begin{aligned} G_X(z)^n &= p^n z^n \sum_{k=0}^n \binom{-n}{k} (-1)^k q^k z^k \\ &= p^n z^n \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} q^k z^k. \end{aligned}$$

Dividindo por z^n dos dois lados, obtemos

$$\frac{p^n}{(1-qz)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} p^n q^k z^k,$$

que é a função geradora para a chamada *distribuição binomial negativa*.

Seja Y uma variável aleatória com distribuição binomial negativa como acima. Uma maneira fácil de calcular o valor esperado e a variância de Y é através da chamada *função geradora recíproca* $I(z) = (1-qz)/p = 1/p - (q/p)z$. Observe que, apesar de $I(z)$ não ser uma função geradora de probabilidade, $I(1) = 1$ (podemos ver $I(z)^{-n}$ gerando uma distribuição binomial com parâmetros $-n$ e $-q/p$). Assim, $\mathbb{E}(Y) = (-n)(-q/p) = nq/p$ e $\text{var}(Y) = (-n)(-q/p)(1/p) = nq/p^2$.

Vamos considerar agora o experimento de lançar moedas independentemente até que duas caras apareçam seguidamente. Veja que o espaço de probabilidades deste experimento é dado por $\Omega = \{HH, THH, TTHH, HTHH, \dots\}$, onde H representa que o resultado do lançamento foi cara e T que o resultado do lançamento foi coroa. Trocando H por p e T por q , obtemos a probabilidade de uma dada sequência ser obtida. Se X é a variável aleatória representando a quantidade de lançamentos até a ocorrência de duas caras seguidas, então X é gerada pela seguinte função geradora de probabilidade.

$$G_X(z) = p^2 z^2 + qp^2 z^3 + q^2 p^2 z^4 + qp^3 z^4 + \dots$$

A soma acima é obtida trocando H por pz e T por qz para todo elemento de Ω e somando-os.

Podemos dividir os elementos de Ω pela quantidade de T 's que possuem. Vamos ver com qual valor, os elementos de Ω que possuem n termos T , contribuem com a soma $G_X(z)$. Como não pode haver duas caras seguidas (a menos das últimas), existem $\binom{n}{k}/k!$ elementos com $k+2$ caras e n coroas. Cada um desses elementos contribui com $p^{k+2}q^n z^{n+k+2}$. Assim,

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{k+2} q^n z^{n+k+2} \right) \\ &= p^2 z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pqz^2)^k (qz)^{n-k} \right) \\ &= p^2 z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (pqz^2 + qz)^n \\ &= \frac{p^2 z^2}{1 - pqz^2 - qz} \end{aligned}$$

Desta forma, utilizaremos a função $F(z) = z^2/G_X(z) = (1 - pqz^2 - qz)/p^2$ para calcular o valor esperado e a variância de X . Simples cálculos são suficientes para mostrar que $F'(1) = -p^{-2} - p^{-1} + 2$ e $F''(1) = -p^{-4} - 2p^{-3} + 2p^{-2} + p^{-1}$. Mas, como $G_X(z)F(z) = z^2$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 2 - (-p^{-2} - p^{-1} + 2) \\ &= p^{-1} + p^{-2}. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= 0 - (-p^{-4} - 2p^{-3} + 2p^{-2} + p^{-1}) \\ &= p^{-4} + 2p^{-3} - 2p^{-2} - p^{-1}. \end{aligned}$$

10/05/2010

Vamos considerar o experimento onde realizamos lançamentos independentes de uma moeda, parando quando uma determinada sequência de caras e coroas apareça pela primeira vez. Seja p a probabilidade de dar cara e $q = 1 - p$ a probabilidade de dar coroa em qualquer dos lançamentos. Por exemplo, se considerarmos a sequência $THTTH$, o espaço de probabilidades desse evento é dado por $\Omega = \{THTTH, HTHTTH, TTHTTH, HHTHTTH, HTTHTTH, \dots\}$. Se X é a variável aleatória representando a quantidade de lançamentos até a ocorrência da sequência em questão, então X é gerada pela seguinte função geradora de probabilidade.

$$G_X(z) = p^2q^3z^5 + qp^3q^3z^6 + p^2q^4z^6 + p^4q^3z^7 + \dots$$

Trocando pz por H e qz por T , podemos, para clarear as idéias, representar a expressão acima como a soma $S = THTTH + HTHTTH + TTHTTH + HHTHTTH + \dots$. Dizemos que S é a soma das sequências vencedoras para $THTTH$. Da mesma maneira, considere N como a soma das sequências em que $THTTH$ não ocorre, onde 1 representa a sequência vazia. Assim, temos que

$$(10) \quad 1 + N(H + T) = N + S.$$

$$(11) \quad NTHTTH = S + STTH.$$

Por (10), temos que $(1 - S)(1 - (H + T))^{-1} = N$. Assim, por (11), temos

$$(1 - S)(1 - (H + T))^{-1}THTTH = S(1 + TTH).$$

Portanto,

$$(1 - G_X(z))(1 - z)^{-1}p^2q^3z^5 = G_X(z)(1 + pq^2z^3).$$

Logo,

$$G_X(z) = \frac{p^2q^3z^5}{p^2q^3z^5 + (1 + pq^2z^3)(1 - z)}.$$

Faça $G_X(z) = z^5/F_X(z)$. Assim, com alguns cálculos, obtemos $F'_X(1) = 5 - (1 + pq^2)/(p^2q^3)$ e $F''_X(1) = 20 - (6pq^2)/(p^2q^3)$. Com isso, podemos calcular o valor esperado e a variância de X .

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelos alunos Eric Ossami Endo e Renato dos Santos Nunes.

²O conteúdo desta seção foi baseado em [10].

Valor esperado:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= G'_X(1) \\ &= 5 - F'_X(1) \\ &= p^{-2}q^{-3} + p^{-1}q^{-1}.\end{aligned}$$

Variância:

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 \\ &= -(F''_X(1) + F'_X(1) - F'_X(1)^2) \\ &= \mathbb{E}(X)^2 - 9p^{-2}q^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}.\end{aligned}$$

Pensaremos agora sobre o que ocorre no caso de considerarmos uma sequência qualquer. Seja A tal sequência de caras e coroas de tamanho m . Seja S a sequência das sequências vencedoras para A , e N a soma das sequências onde A não aparece. Note que a igualdade (10) continua válida. Defina $A^{(k)}$ e $A_{(k)}$, respectivamente, como os k últimos caracteres e os k primeiros caracteres de A . Assim, temos que

$$(12) \quad NA = S \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} A^{(k)} \left[A_{(m-k)} = A^{(m-k)} \right] \right),$$

lembrando que $[p] = 1$ se p é válido e $[p] = 0$ se p é falso.

Vamos calcular o valor esperado e a variância de X , onde X representa a quantidade de lançamentos da moeda até que a sequência A ocorra pela primeira vez. Substituindo (10) em (12), obtemos

$$S = \frac{A}{A + \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} A^{(k)} \left[A_{(m-k)} = A^{(m-k)} \right] \right) (1 - H - T)}.$$

Fazendo $\tilde{A}_{(k)}$ o valor resultante da substituição de H por p^{-1} e T por q^{-1} em $A_{(k)}$. Considere também $\hat{A}_{(k)} = \tilde{A}_{(k)}^{-1}$. Assim,

$$G_X(z) = \frac{\hat{A}_{(m)} z^m}{\hat{A}_{(m)} z^m + \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \hat{A}_{(k)} \left[A_{(m-k)} = A^{(m-k)} \right] \right) (1 - z)}.$$

Portanto, fazendo $F_X(z) = z^m / G_X(z)$ e observando que $\hat{A}_{(k)} / \hat{A}_{(m)} = \tilde{A}_{(m-k)}$, temos que

$$F_X(z) = z^m + \left(\sum_{k=1}^m \tilde{A}_{(k)} z^{(m-k)} \left[A_{(k)} = A^{(k)} \right] \right) (1 - z).$$

Assim,

$$F'_X(1) = m - \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{(k)} \left[A_{(k)} = A^{(k)} \right].$$

Ademais,

$$F''_X(1) = (m-1)m - 2 \sum_{k=1}^m (m-k) \tilde{A}_{(k)} \left[A_{(k)} = A^{(k)} \right].$$

Desta forma, podemos facilmente calcular o valor esperado e a variância de X .

Valor esperado:

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = m - F'(1) = \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{(k)} \left[A_{(k)} = A^{(k)} \right].$$

Variância:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 \\ &= -(F''_X(1) + F'_X(1) - F'_X(1)^2) \\ &= \mathbb{E}(X)^2 - \sum_{k=1}^m (2k-1) \tilde{A}_{(k)} \left[A_{(k)} = A^{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Vamos considerar agora o jogo conhecido por “Penney ante”. Neste jogo existem os jogadores 1 e 2 e cada um deles escolhe uma configuração de caras e coroas, respectivamente, A e B , da maneira que quiserem. Uma moeda honesta é lançada repetidas vezes até que A apareça ou B apareça. A configuração que aparecer primeiro dá a vitória ao jogador correspondente. Considere S_A e S_B como sendo as somas das sequências vencedoras para A e B , respectivamente, onde $|A| = l$ e $|B| = m$, e seja N a soma das sequências que não são vencedoras nem para A nem para B .

Observe que temos

$$(13) \quad 1 + N(H + T) = N + S_A + S_B.$$

$$(14) \quad \begin{aligned} NA &= S_A \sum_{k=1}^l A^{(l-k)} \left[A^{(k)} = A_{(k)} \right] + S_B \sum_{k=1}^{\min\{l,m\}} A^{(l-k)} \left[B^{(k)} = A_{(k)} \right]. \\ NB &= S_B \sum_{k=1}^m B^{(m-k)} \left[B^{(k)} = B_{(k)} \right] + S_A \sum_{k=1}^{\min\{l,m\}} B^{(m-k)} \left[A^{(k)} = B_{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Como a moeda que estamos considerando no jogo é honesta, (14) nos diz que

$$(15) \quad \begin{aligned} N &= S_A \sum_{k=1}^l 2^k \left[A^{(k)} = A_{(k)} \right] + S_B \sum_{k=1}^{\min\{l,m\}} 2^k \left[B^{(k)} = A_{(k)} \right]. \\ N &= S_B \sum_{k=1}^m 2^k \left[B^{(k)} = B_{(k)} \right] + S_A \sum_{k=1}^{\min\{l,m\}} 2^k \left[A^{(k)} = B_{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Defina agora a operação $A : B$ como segue, onde A pode ser igual a B .

$$A : B = \sum_{k=1}^{\min\{l,m\}} 2^{k-1} \left[A^{(k)} = B_{(k)} \right].$$

Assim, igualando as expressões em (15), obtemos uma igualdade bem simples.

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{B : B - B : A}{A : A - A : B}.$$

Vale ressaltar que a relação de vitória entre os padrões escolhidos neste jogo não são transitivas. Por exemplo, suponha que jogadores 1, 2 e 3 escolheram as sequências $HHTH$, $HTHH$ e $THHH$, respectivamente. Temos que o jogador 1 vence o jogador 2 com probabilidade $3/2$ e o jogador 2 vence o jogador 3 com probabilidade $7/5$, porém, o jogador 3 vence o jogador 1 com probabilidade $7/5$. De fato, se o jogador 1 escolheu a sequência τ_1, \dots, τ_l , o jogador 2 sempre ganhará se escolher a sequência $\bar{\tau}_2\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l-1}$ (veja o exercício 10.1.1).

10.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

1. Seja τ_1, \dots, τ_l a sequência escolhida pelo jogador 1 no jogo “Penney ante”.

(i) Mostre que o jogador 2 sempre vencerá caso escolha a sequência $\bar{\tau}_2\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l-1}$.

(ii) A sequência $\bar{\tau}_2\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l-1}$ é a melhor escolha para o jogador 2 (isto é, a que lhe dá a maior probabilidade de vitória)?

11. TEORIA PROBABILÍSTICA DOS NÚMEROS

17/05/2010

Nesta seção utilizaremos a seguinte forma da desigualdade de Chebyshev.

$$(16) \quad \Pr \left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \omega \sqrt{\text{var}(X)} \right) \leq \frac{1}{\omega^2},$$

onde ω é um número positivo qualquer. O seguinte lema também será necessário.

Lema 44.

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1).$$

Demonstração do limite inferior. Lembre que, para qualquer n inteiro, podemos escrevê-lo de maneira única na forma $n = mq^2$, onde m é livre de quadrados, isto é, m não é divisível por nenhum quadrado perfeito. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \sum_{m \leq x} \left(\frac{1}{m} \sum_{q \leq \sqrt{x/m}} \frac{1}{q^2} \right) \\ &\leq 2 \sum_{m \leq x} \frac{1}{m} \\ &= 2 \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} \right). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &\geq \sum_{n \leq x} \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &\geq \log x. \end{aligned}$$

Portanto, $\log x \leq 2 \prod_{p \leq x} (1 + 1/p) \leq 2 \prod_{p \leq x} e^{1/p} = 2e^{\sum_{p \leq x} 1/p}$. Assim,

$$\sum_{p \leq x} 1/p \geq \ln \ln x + O(1)$$

□

Definição 45. Denotamos por $v(n)$ o número de primos positivos que dividem n .

O seguinte teorema nos diz, de forma grosseira, que quase todo número n possui uma quantidade de fatores primos muito próxima de $\ln \ln n$.

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelo aluno Thiago da Silva Pinheiro.

Teorema 46 (Hardy–Ramanujan [12]). *Seja ω uma função qualquer tal que $\omega = \omega(n) \rightarrow \infty$. A quantidade de elementos $x \in [n]$ tais que $|v(x) - \ln \ln n| > \omega \sqrt{\ln \ln n}$ é $o(n)$.*

Demonstração (feita por Turán [19]). Utilizaremos o método do segundo momento. Tome $x \in [n]$ escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme. Para p primo, denotamos $X_p = 1$ se $p|x$ e $X_p = 0$ caso contrário. Fazendo $m = n^{1/10}$, dizemos que $X = X(x) = \sum_{p \leq m} X_p$, onde este somatório é sobre todos os primos menores que m . Observe que $X(x)$ representa a quantidade de primos não maiores que m que dividem x . Ademais, podemos notar que não existem mais que 10 elementos maiores que m que dividem x . Assim, temos que $v(x) - 10 \leq X(x) \leq v(x)$.

Podemos calcular o valor esperado de X . Temos $\mathbb{E}(X_p) = \lfloor n/p \rfloor / n = 1/p + O(1/n)$, onde a última igualdade segue do fato de $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(x)) &= \sum_{p \leq m} \mathbb{E}(X_p) \\ &= \sum_{p \leq m} (1/p + O(1/n)) \\ &= \left(\sum_{p \leq m} 1/p \right) + O(1) \\ &= \ln \ln n + O(1), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Lema 44.

Precisamos agora calcular a variância de $X(x)$. Vimos em seções anteriores que se $X = \sum_S X_S$, então temos que $\text{var}(X) = \sum_S \text{var}(X_S) + \sum_{(S,T), S \neq T} \text{cov}(X_S, X_T)$. Assim, precisamos saber os valores de $\text{var}(X_p)$ e $\text{cov}(X_p, X_q)$ para $p \neq q$.

$$\begin{aligned} \text{var}(X_p) &= \mathbb{E}(X_p^2) - \mathbb{E}(X_p)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_p) - \mathbb{E}(X_p)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_p)(1 - \mathbb{E}(X_p)) \\ &= \left(\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq m} \text{var}(X_p) &= \sum_{p \leq m} \left(\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \left(\sum_{p \leq m} \frac{1}{p} \right) + O(1) \\ &= \ln \ln n + O(1),\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Lema 44. Para a covariância, temos

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_p, X_q) &= \mathbb{E}(X_p X_q) - \mathbb{E}(X_p) \mathbb{E}(X_q) \\ &= \frac{\lfloor n/pq \rfloor}{n} - \frac{\lfloor n/p \rfloor}{n} \frac{\lfloor n/q \rfloor}{n} \\ &\leq \frac{1}{pq} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{p \neq q} \text{cov}(X_p X_q) &\leq \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &\leq \frac{2m}{n} \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} \\ &= 2n^{-9/10} (\ln \ln n + O(1)) \\ &= o(1).\end{aligned}$$

Com isso, vemos que a covariância não tem nenhum efeito sobre a variância de $X(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}\text{var}(X(x)) &= \sum_{p \leq m} \text{var}(X_p) + \sum_{p \neq q} \text{cov}(X_p X_q) \\ &= \ln \ln n + O(1).\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade (16) e lembrando que $v(x) - 10 \leq X \leq v(x)$, temos que

$$\Pr \left(|v(x) - \ln \ln n| > \omega \sqrt{\ln \ln n} \right) < \omega^{-2},$$

onde $\omega = \omega(n)$ tende a infinito quando n tende a infinito. Isto completa a prova. \square

O seguinte teorema mostra um importante resultado, obtido por Erdős e Kac em 1940, que relaciona a quantidade de fatores primos de um número n com a distribuição normal.

Teorema 47 (Erdős–Kac [5]). *Para todo $t \in \mathbb{R}$, se $x \in [n]$ é escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{v(x) - \ln \ln n}{\sqrt{\ln \ln n}} \geq t \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-s^2/2} ds.$$

24/05/2010

Provaremos agora o Lema 44, isto é, mostraremos que $\sum_{p \leq x} 1/p = \ln \ln x + O(1)$. Para isto, precisaremos utilizar alguns resultados.

Lema 48 (Soma de Abel). *É verdade que*

$$\sum_{s < r \leq t} a(r)f(r) = A(t)f(t) - A(s)f(s) - \int_s^t A(\theta)f'(\theta) d\theta,$$

onde $A(\theta) = \sum_{s < r \leq \theta} a(r)$.

Demonstração. Consideramos, nesta prova, s e t inteiros, porém, o mesmo resultado é válido sem esta restrição (veja o exercício 12.1.1). Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} A(\theta)f'(\theta) d\theta &= \int_k^{k+1} A(k)f'(\theta) d\theta \\ &= A(k) \int_k^{k+1} f'(\theta) d\theta \\ &= A(k) (f(k+1) - f(k)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_s^{s+1} A(\theta)f'(\theta) d\theta &= A(s) (f(s+1) - f(s)). \\ \int_{s+1}^{s+2} A(\theta)f'(\theta) d\theta &= A(s+1) (f(s+2) - f(s+1)). \\ &\vdots \\ \int_{t-1}^t A(\theta)f'(\theta) d\theta &= A(t-1) (f(t) - f(t-1)). \end{aligned}$$

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelo aluno Thiago da Silva Pinheiro.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_s^t A(\theta) f'(\theta) d\theta &= -A(s)f(s) \\
&\quad - f(s+1)(A(s+1) - A(s)) \\
&\quad - f(s+2)(A(s+2) - A(s+1)) \\
&\quad \quad \quad \vdots \\
&\quad - f(t-1)(A(t-1) - A(t-2)) \\
&\quad + A(t-1)f(t) + (f(t)a(t) - f(t)a(t)).
\end{aligned}$$

Mas, como $A(k+1) - A(k) = a(k)$, temos que

$$\int_s^t A(\theta) f'(\theta) d\theta = -A(s)f(s) - \sum_{s < r \leq t} a(r)f(r) + A(t)f(t).$$

Assim, o resultado segue. □

O seguinte lema também será necessário.

Lema 49. *A igualdade $\sum_{p \leq x} (\ln p)/p = \ln x + O(1)$ é válida, onde $x \in \mathbb{R}$ e a soma é sobre os primos não maiores que x .*

Demonstração. Estimaremos o valor de $\ln x!$ de duas maneiras distintas. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}
(17) \quad \ln x! &= \sum_{p \leq x} \left(\left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \ln p \right) \\
&= \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) + \sum_{p \leq x} \left(\left(\left\lfloor \frac{x}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^3} \right\rfloor + \dots \right) \ln p \right) \\
&< \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) + x \sum_{p \leq x} \left(\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \dots \right) \ln p \right) \\
&= \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) + x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p(p-1)} \\
&= \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) + O(x).
\end{aligned}$$

Mas veja que $0 \leq \int_x^{x+1} \ln t dt - \ln x = \int_x^{x+1} \ln(t/x) dt \leq \int_x^{x+1} (t/x - 1) dt = 1/2x$. Assim,

$$\sum_{n \leq x-1} \left(\int_n^{n+1} \ln t dt - \ln n \right) = O(\ln x),$$

de onde concluímos que

$$\int_1^x \ln t \, dt - \sum_{n \leq x-1} \ln n = O(\ln x).$$

Logo, temos que $x \ln x - x + 1 - \sum_{n \leq x-1} \ln n = O(\ln x)$. Portanto,

$$\sum_{n \leq x} \ln n = x \ln x + O(x).$$

Desta forma, $\ln x! = x \ln x + O(x)$. Isto, juntamente com (17), nos diz que

$$(18) \quad \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) = x \ln x + O(x).$$

Observando que $\sum_{p \leq x} (\lfloor x/p \rfloor \ln p) = \sum_{p \leq x} (x/p + O(1)) \ln p$, obtemos

$$(19) \quad \sum_{p \leq x} \left(\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p \right) = \sum_{p \leq x} \left(\frac{x}{p} \ln p \right) + O(\pi(x) \ln x),$$

onde $\pi(x)$ denota a quantidade de primos não maiores que x . Dividindo (18) e (19) por x , temos

$$\sum_{p \leq x} \left(\frac{\ln p}{p} \right) = \ln x + O(1) + O\left(\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \right).$$

Mas é verdade que $\pi(x) = o(x/\ln x)$ (Este fato será provado na próxima seção). Com isto, completamos a prova, pois

$$\sum_{p \leq x} \left(\frac{\ln p}{p} \right) = \ln x + O(1).$$

□

Vamos à prova do Lema 44, isto é, provaremos que $\sum_{p \leq x} 1/p = \ln \ln x + O(1)$.

Demonstração do Lema 44. Tomando $f(r) = 1/\ln r$ e fazendo $a(r) = (\ln p)/p$ se $r = p$ para p primo e $a(r) = 0$ caso contrário, obtemos a seguinte relação ao aplicar o Lema 48 (Soma de Abel).

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{A(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t(\ln t)^2} dt.$$

Mas como $A(x) = \sum_{p \leq x} (\ln p)/p$, obtemos, pelo Lema 49,

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= 1 + O(1) + \int_2^x \frac{\ln t + O(1)}{t(\ln t)^2} dt \\ &= 1 + O(1) + \int_2^x \frac{1}{t \ln t} + \int_2^x \frac{O(1)}{t(\ln t)^2} dt \\ &= \ln \ln x + O(1) + \int_2^x \frac{O(1)}{t(\ln t)^2} dt \\ &= \ln \ln x + O(1).\end{aligned}$$

□

12.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes exercícios.

1. Prove o Lema 48 sem a suposição de que s e t sejam inteiros.

31/05/2010

Em uma carta endereçada a Euler, Goldbach propôs, em 1742, a seguinte conjectura.

Conjectura 50 (Goldbach). *Para todo $n \geq 2$ par, existem primos p, q tal que $p + q = n$.*

Computacionalmente já foi verificado que tal conjectura é válida para $n \leq 4 \times 10^{11}$. Os seguintes resultados dizem respeito a esta conjectura.

Teorema 51 (Lagrange). *Todo natural pode ser escrito como soma de no máximo quatro quadrados.*

Teorema 52 (Fermat). *Todo primo $p \equiv 1 \pmod{4}$ pode ser escrito como soma de dois quadrados.*

Teorema 53 (Vinogradov). *Todo inteiro ímpar suficientemente grande pode ser escrito como soma de no máximo três primos.*

Teorema 54 (Shnirelman). *Existe uma constante h tal que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como soma de no máximo h primos.*

Provaremos o Teorema 54. Para tal, considere o conjunto $A = \{0 < a_1 < a_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ e seja $A(x) = \max\{k: a_k \leq x\}$ a quantidade de elementos de A não maiores que x . Definimos a *densidade de Shnirelman* como $\sigma(A) = \inf_{n \geq 1} A(n)/n$. Podemos observar os seguintes fatos sobre a densidade de Shnirelman.

- (i) Se $1 \notin A$, então $\sigma(A) = 0$.
- (ii) Se $a_k = 1 + (k - 1)d$, para $k = 1, 2, \dots$, então $\sigma(A) = 1/d$.
- (iii) Se $a_n = \lfloor (1 + \alpha)^n \rfloor$, para $\alpha > 0$, então $\sigma(A) = 0$.
- (iv) Se $a_n = n^2$, para $n \geq 1$, então $\sigma(A) = 0$.
- (v) Se $1 \in A$ mas $\sigma(A) = 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe m arbitrariamente grande tal que $A(m) \leq \varepsilon m$.
- (vi) $\sigma(A) = 1$ se e somente se $\{1, 2, \dots\} \subset A$.

Dados $A, B \subset \mathbb{N}$, definimos $A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$. Em geral, para $A_1, \dots, A_h \subset \mathbb{N}$, temos que $A_1 + \dots + A_h = \{a_1 + \dots + a_h: a_i \in A_i \text{ para todo } i\}$. Considere também os seguintes conjuntos.

- 1) $S = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, o conjunto de todos os quadrados perfeitos.
- 2) $(4\mathbb{N} + 1) = \{x \in \mathbb{N}: x \equiv 1 \pmod{4}\}$.
- 3) $\mathcal{P} = \{p_1 < p_2 < \dots\}$, o conjunto de todos os primos.

4) $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cup \{0\}$.

Podemos reescrever a Conjectura de Goldbach e os teoremas enunciados anteriormente com base nesses conjuntos.

Conjectura 50 (Goldbach). $2\mathcal{P} \supset \{n > 2: n \in \mathbb{N} \text{ par}\}$.

Teorema 51 (Lagrange) $4S \supset \mathbb{N}$.

Teorema 52 (Fermat) $2S \supset \mathcal{P} \cap (4\mathbb{N} + 1)$.

Teorema 53 (Vinogradov) Existe n_0 tal que $3\mathcal{P}_0 \supset \{n \in \mathbb{N}: n \geq n_0, n \text{ ímpar}\}$.

Teorema 54 (Shnirelman) Existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $h\mathcal{P}_0 \supset \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

A seguinte definição será importante.

Definição 55. Dizemos que $A \subset \mathbb{N}$ é uma base de ordem h de \mathbb{N} se $hA \supset \mathbb{N}$. Ademais, se existe h tal que A é base de ordem h , então dizemos que A é uma base de ordem finita.

Os seguintes resultados compõem a prova do Teorema 54 (Shnirelman).

Teorema 56. Se $0 \in A \subset \mathbb{N}$ e $\sigma(A) > 0$, então A é base de ordem finita.

Lema 57. Se $A = 2\mathcal{P} + \{0, 1\}$, então $\sigma(A) > 0$.

Teorema 58. O Teorema 56 e o Lema 57 implicam o Teorema 54.

Demonstração do Teorema 58. Seja A como no Lema 57. Pelo Teorema 58, A é base de ordem h , para algum h . Seja $N \geq 2$. Como A é base de ordem h , temos que $0 \leq N - 2 = a_1 + \dots + a_h$, com $a_i \in A$ para todo i . Sem perda de generalidade, temos $N - 2 = k + (p_1 + q_1) + \dots + (p_l + q_l)$, onde $k + l \leq h$ e $\{p_i, q_i\} \in \mathcal{P}$ para todo i . Se $k = 0$, então podemos escrever N da seguinte forma: $N = 2 + p_1 + q_1 + \dots + p_l + q_l$, isto é, como soma de $2l + 1 \leq 2h$ primos. Suponha que temos $0 < k = 2m + r$, com $r \in \{0, 1\}$. Se $r = 0$, então $N = 2(m + 1) + \sum_{i=1}^l (p_i + q_i)$. Assim, N é soma de $m + 1 + 2l \leq 3h$ primos. Se $r = 1$, então $N = 3 + 2m + \sum_{i=1}^l (p_i + q_i)$. Logo, N é soma de $2m + 1 + 2l \leq 3h$ primos. Concluimos que $(3h)\mathcal{P}_0 \supset \{2, 3, \dots\}$. \square

A fim de provar o Teorema 56, precisamos provar alguns lemas e corolários.

Lema 59. Suponha que $0 \in A \subset \mathbb{N}$ e $0 \in B \subset \mathbb{N}$. Se $h \geq 0$ e $A(n) + B(n) \geq n$, então $n \in A + B$.

Demonstração. Se $n \in A$ ou $n \in B$, então $n \in A + B$. Portanto, podemos considerar $n \notin A \cup B$. Assim, temos $A(n - 1) + B(n - 1) = A(n) + B(n) \geq n$. Suponha $A \cap [n - 1] = \{a_1 < a_2 < \dots < a_r\}$

e $B \cap [n-1] = \{b_1 < b_2 < \dots < b_s\}$. Considere A e $n - (B \cap [n-1]) = \{n - b_s < \dots < n - b_1\}$. Como $r + s = A(n-1) + B(n-1) \geq n$, segue que existem i, j tais que $a_i = n - b_j$. Portanto, temos $n = a_i + b_j$. \square

Corolário 60. *Seja $0 \in A \subset \mathbb{N}$ e $0 \in B \subset \mathbb{N}$. Se $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$, então $n \in A + B$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Fixado n , temos que $A(n) + B(n) \geq n\sigma(A) + n\sigma(B) \geq n$. Pelo Lema 59, temos que $n \in A + B$. \square

Corolário 61. *Se $0 \in A$ e $\sigma(A) \geq 1/2$, então A é uma base de ordem 2, isto é, $2A \supset \mathbb{N}$.*

Lema 62. *Se $0 \in A \subset \mathbb{N}$ e $0 \in B \subset \mathbb{N}$, então $\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)$, isto é, $1 - \sigma(A + B) \leq (1 - \sigma(A))(1 - \sigma(B))$.*

Observação. Mann provou um resultado melhor que o apresentado no lema acima, onde concluiu que $\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B)$.

Por indução em h , podemos provar o seguinte resultado.

Corolário 63. *Se $0 \in A_i \subset \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, h$, então $1 - \sigma(A_1 + \dots + A_h) \leq \prod_{i=1}^h (1 - \sigma(A_i))$.*

Finalmente estamos aptos a provar o Teorema 56.

Demonstração do Teorema 56. Seja $A \subset \mathbb{N}$ com $0 \in A$ e $\sigma(A) > 0$. Então $1 - \sigma(A) < 1$ e portanto existe k tal que $(1 - \sigma(A))^k < 1/2$. Assim, pelo Corolário 63, temos que $1 - \sigma(kA) \leq (1 - \sigma(A))^k \leq 1/2$. Assim, kA é tal que $\sigma(kA) \geq 1/2$. Pelo Corolário 61, temos que kA é base de ordem 2. Segue que A é base de ordem $h = 2k$. \square

Nos resta mostrar a validade do Lema 57. Seja $r(N)$ a quantidade de maneiras de escrever N como soma de dois primos (por exemplo, $r(5) = 2$). Os seguintes dois lemas, quando combinados, implicam o Lema 57.

Lema 64. *Existem x_0 e $c > 0$ tais que $\sum_{N=1}^x r(N) \geq cx^2/(\log x)^2$ para todo $x \geq x_0$.*

O lema acima segue do fato de $\pi(x) \geq c''x/\log x$ para uma certa constante positiva c'' .

Lema 65. *Existem x'_0 e $c' > 0$ tais que $\sum_{N=1}^x r(N)^2 \leq c'x^3/(\log x)^4$ para todo $x \geq x'_0$.*

Demonstração do Lema 57. Por Cauchy-Schwarz, $(\sum_{N=1}^x r(N))^2 \leq (\sum_{N=1}^x 1)(\sum_{n \leq x} r(N)^2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{N=1}^x r(N) \right)^2 &\leq (2\mathcal{P})(x) \sum_{N=1}^x r(N)^2 \\ &\leq A(x) \sum_{N \leq x} r(N)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(x) &\geq \frac{(\sum_{N=1}^x r(N))^2}{\sum_{N=1}^x r(N)^2} \\ &\geq \left(\frac{c}{c'} \right) x, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida quando $x > \max\{x_0, x'_0\}$. Desta forma, como $1 \in A$, segue que $\sigma(A) \geq \min\{1/\max\{x_0, x'_0\}, c/c'\} > 0$. Portanto, estamos feitos. \square

Para maiores detalhes sobre o assunto, veja o livro de Khinchin [13].

14. UM PROBLEMA GEOMÉTRICO DE ERDŐS E FÜREDI - CONTINUAÇÃO

7/6/2010

Na seção 8 vimos um problema geométrico abordado por Erdős e Füredi em 1983 [6]. Dizemos que \mathcal{P} determina $\sphericalangle abc = \alpha$ se $a, b, c \in \mathcal{P}$. Lembre que $\alpha_n(\mathcal{P}) = \max\{0 \leq \alpha \leq \pi : \mathcal{P} \text{ determina } \alpha\}$, onde $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ com \mathcal{P} finito. Erdős e Füredi mostraram que existe $c > 1$ tal que existe $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ onde $|\mathcal{P}| \geq c^n$ e $\alpha_n(\mathcal{P}) < \pi/2$ (Observe que não podemos ter limite $\pi/3$, pois quaisquer três pontos determinam um ângulo não menor que $\pi/3$).

Tome $f_\alpha^\leq(n) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n, \alpha_n(\mathcal{P}) \leq \alpha\}$. Considerando o simplexo regular de dimensão n , observamos que $f_{\pi/3}^\leq(n) \geq n + 1$. Mas é verdade que $f_{\pi/3}^\leq(n) \leq n + 1$?

Um bom exercício é pensar no seguinte problema.

Problema 66. *Fixe $\varepsilon > 0$. Prove que $f_{\pi/3+\varepsilon}^\leq(n) \geq e^{cn}$ para algum $c = c(\varepsilon) > 0$.*

14/6/2010

O postulado de Bertrand diz que todo intervalo $(n, 2n]$, com $n \geq 1$, contém pelo menos um primo. Apresentamos nesta seção uma prova elegante de um resultado que implica uma versão mais fraca do postulado de Bertrand, a saber, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que se $n \geq n_0$, então o intervalo $(n, (2 + \varepsilon)n]$ contém pelo menos um primo. O seguinte teorema é o resultado principal desta seção.

Teorema 67. *Para $n \geq 4$, temos que*

$$(\ln 2) \frac{n}{\log n} \leq \pi(n) \leq \left(\ln 4 + \frac{8 \ln \ln n}{\ln n} \right) \frac{n}{\ln n}.$$

Para provarmos o limite superior, vamos precisar da seguinte estimativa.

Teorema 68. *Para $n \geq 1$, temos*

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n.$$

Com a estimativa dada pelo Teorema 68, observe que, para todo $1 \leq t \leq n$, temos

$$t^{\pi(n) - \pi(t)} \leq \prod_{t < p \leq n} p \leq 4^n.$$

Assim, aplicando o logaritmo natural dos dois lados, obtemos

$$\pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln t} + t.$$

Fazendo $t = n/(\ln n)^2$, temos que

$$\pi(n) \leq \left(\ln 4 + \frac{8 \ln \ln n}{\ln n} \right) \frac{n}{\ln n},$$

desde que $n \geq 4$ (exercício).

Antes de provarmos o limite inferior, vamos à prova do Teorema 68.

Demonstração do Teorema 68. Utilizamos indução em n e supomos $n \geq 3$. Se n é par, o resultado segue por indução, uma vez que n não é primo. Portanto, considere n ímpar e faça $n = 2m + 1$. Observe que, como $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$, então este coeficiente aparece duas vezes na expansão binomial de $(1 + 1)^{2m+1}$. Portanto,

$$\binom{2m+1}{m} \leq \frac{2^{2m+1}}{2} = 4^m.$$

Mas é fácil ver que

$$\left(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \right) \mid \binom{2m+1}{m} \leq 4^m.$$

Pela hipótese indutiva, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq n} p &= \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \\ &\leq 4^{m+1} 4^m \\ &= 4^n. \end{aligned}$$

□

Para completar a prova (provar o limite inferior), considere d_n o mínimo múltiplo comum dos números $1, 2, \dots, n$. Dizemos que $p^v \mid x$ se $p^v \mid x$ e p^{v+1} não divide x . Assim, se $p^v \mid n$, então existe $m \leq n$ tal que $p^v \mid m$, de onde concluímos que $p^v \leq n$. Portanto,

$$\begin{aligned} d_n &= \prod_{p \leq n, p^v \mid d_n} p^v \\ &\leq \prod_{p \leq n} n \\ &= n^{\pi(n)}. \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo dos dois lados da desigualdade acima, obtemos $\pi(n) \geq \ln d_n / \ln n$. O teorema abaixo completa a prova do Teorema 67.

Teorema 69 (Nair [16]). *Para $n \geq 7$, temos que $d_n \geq 2^n$.*

Demonstração. Para começar, definimos, para $1 \leq m \leq n$,

$$I(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx.$$

Através da expansão binomial de $(1-x)^{n-m}$, obtemos

$$I(m, n) = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \frac{1}{m+j}.$$

Assim, é fácil ver que $I(m, n)$ é um número racional cujo denominador divide d_n , uma vez que d_n é o mínimo múltiplo comum dos números $1, 2, \dots, n$. Mas note que, para todo $0 \leq y \leq 1$, temos a

seguinte igualdade.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m, n) &= \int_0^1 (1-x+xy)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n y^{m-1}. \end{aligned}$$

Desta forma, para $1 \leq m \leq n$, temos que

$$I(m, n) = \frac{1}{n \binom{n-1}{m-1}} = \frac{1}{m \binom{n}{m}}.$$

Com isso, temos que $m \binom{n}{m} | d_n$ para $1 \leq m \leq n$. Portanto, podemos concluir que $n \binom{2n}{n} | d_{2n} | d_{2n+1}$ e $(n+1) \binom{2n+1}{n} = (2n+1) \binom{2n}{n} | d_{2n+1}$. Mas como n e $2n+1$ são números primos entre si, temos que $n(2n+1) \binom{2n}{n} | d_{2n+1}$. Assim, podemos concluir que

$$d_{2n+1} \geq n4^n, \quad n \geq 1.$$

$$d_{2n+1} \geq 2 \cdot 4^n = 2^{2n+1}, \quad n \geq 2.$$

$$d_{2n+2} \geq d_{2n+1} \geq 4^n + 1, \quad n \geq 4.$$

Temos então o resultado desejado, $d_n \geq 2^n$, para $n \geq 9$. Para $n = 7$ e $n = 8$, o resultado pode ser facilmente verificado. □

REFERÊNCIAS

- [1] N. Alon and F. R. K. Chung, *Explicit construction of linear sized tolerant networks*, Proceedings of the First Japan Conference on Graph Theory and Applications (Hakone, 1986), vol. 72, 1988, pp. 15–19.
- [2] J. Beck, *On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I*, J. Graph Theory **7** (1983), no. 1, 115–129.
- [3] C. Chvatál, V. Rödl, E. Szemerédi, and W. T. Trotter, Jr., *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*, J. Combin. Theory Ser. B **34** (1983), no. 3, 239–243.
- [4] L. Danzer and B. Grünbaum, *Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee*, Math. Z. **79** (1962), 95–99.
- [5] P. Erdős and M. Kac, *The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. **62** (1940), 738–742.
- [6] P. Erdős and Z. Füredi, *The greatest angle among n points in the d -dimensional Euclidean space*, Combinatorial mathematics (Marseille-Luminy, 1981), North-Holland Math. Stud., vol. 75, North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 275–283.
- [7] P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós, *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 215–235.
- [8] P. Erdős, *Some unsolved problems*, Michigan Math. J. **4** (1957), 291–300.
- [9] J. Friedman and N. Pippenger, *Expanding graphs contain all small trees*, Combinatorica **7** (1987), no. 1, 71–76.
- [10] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics*, second ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994, A foundation for computer science.
- [11] P. Hall, *On representatives of subsets*, Journal of London Mathematical Society (1935), 26–30.
- [12] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *The normal number of prime factors of a number n [Quart. J. Math. **48** (1917), 76–92]*, Collected papers of Srinivasa Ramanujan, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000, pp. 262–275.
- [13] A. Y. Khinchin, *Three pearls of number theory*, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1952.
- [14] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), no. 3, 261–277.
- [15] G. A. Margulis, *Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators*, Problemy Peredachi Informatsii **24** (1988), no. 1, 51–60.
- [16] M. Nair, *On Chebyshev-type inequalities for primes*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), no. 2, 126–129.
- [17] J. Nešetřil and V. Rödl, *A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles*, J. Combin. Theory Ser. B **27** (1979), no. 2, 225–227.
- [18] R. Rado, *Note on the transfinite case of Hall's theorem on representatives*, J. London Math. Soc. **42** (1967), 321–324.
- [19] P. Turán, *On a theorem of Hardy and Ramanujan*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 274–276.