Perturbação de contorno do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano

Marcone Corrêa Pereira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Antônio L. Pereira**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, 19 de agosto de 2004

Perturbação de contorno do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Marcone Corrêa Pereira
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 19 de agosto de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Antônio L. Pereira (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Sérgio M. Oliva - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre N. Carvalho - ICMC-USP
- Prof. Dr. J. Gaspar R. Filho - ICMC-USP
- Prof. Dr. Orlando Lopes - IMECC-UNICAMP

“Perguntaram-lhe: Como pois se abriram os teus olhos? Respondeu ele: O homem chamado Jesus fez lodo, untou-me os olhos e disse: Vai ao tanque de Siloé e lava-te. Então eu fui, lavei-me e pude ver.” João 9:10,11.

À Raquel,
com quem espero passar mais
o resto da minha vida.

Agradecimentos

A **Deus**, cuja graça me proporcionou mais esta conquista.
À Raquel, pelo suporte, amor, carinho, companhia, incentivo ...
Ao Antônio, meu orientador e amigo, que com dedicação e alegria, me apresentou às equações diferenciais.
Aos meus pais e irmãos que sempre me amaram e apoiaram.
A todos os professores que me ajudaram, opinando, esclarecendo dúvidas e discutindo partes deste trabalho, em particular os professores Luiz Augusto, Sérgio Oliva e Paulo Cordaro.
Aos meus amigos, que fazem mais fácil o meu seguir.
Ao saudoso Professor Daniel B. Henry, que com genialidade produziu a Matemática que hoje admiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações da teoria de perturbação de fronteira desenvolvida por D. Henry em [5], provando a simplicidade genérica no conjunto das regiões C^4-regulares, com uma topologia apropriada, de todos os autovalores do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano (mesmo quando tais regiões são $\mathbb{Z}_2$-simétricas) e de todas as soluções de uma equação semilinear envolvendo o mesmo problema de valor de contorno.

Abstract

In this work, we apply the theory developed by D. Henry in [5] to show the generic simplicity in the set of the C^4-regular regions of the eigenvalues of the Dirichlet problem for the Bilaplacian (even if the regions are $\mathbb{Z}_2$-symmetric) and of the solutions of a semilinear equation with the Bilaplacian as its principal part.

Índice

Introdução

O tema de perturbação do contorno para problemas com valor de fronteira em EDP's foi estudado por vários autores sobre vários pontos de vista. Entre outros, podemos citar os trabalhos pioneiros de Rayleigh [1] e Hadamard [2].

Citamos também os trabalhos de A. M. Micheletti [7], K. Uhlenbeck [9], Saut e Teman [11], nos quais propriedades genéricas das soluções de problemas de valor de contorno com relação a deformação do domínio são estudados.

Para tratar, entre outras coisas, problemas de perturbação de contorno para EDP's, Daniel Henry desenvolveu em [5] uma espécie de cálculo diferencial no qual a variável independente é o domíno onde os problemas de valor de contorno são considerados. Essa teoria nos permite utilizar teoremas clássicos tais como o Teorema das Funções Implícitas e o Método de Lyapunov-Shmidt. Em seu trabalho, Henry também prova uma versão mais geral do Teorema da Transversalidade e obtém, como aplicações, vários resultados na teoria de perturbação de contorno para o operador de *Laplace* considerando várias condições de contorno.

Mais precisamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, C^m-regular. Uma C^m-*perturbação* de Ω é dada por $\Omega_h = h(\Omega)$ onde

$$h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega) \quad = \quad \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid h \text{ é injetiva e } |\det h'(x)|^{-1} \text{ é limitado em } \Omega\}.$$

Considere os seguintes operadores diferenciais não lineares F_Ω e B_Ω definidos em $C^m(\Omega)$ e $C^m(\partial\Omega)$ respectivamente e dados por

$$\begin{aligned} F_\Omega(u)(x) &= f(x, Lu(x)),\ x \in \Omega \\ B_\Omega(u)(x) &= b(x, Lu(x), MN_\Omega(x)),\ x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde f e b são funções, L e M são operadores diferenciais com coeficientes constantes e N_Ω é a normal unitária exterior em $\partial\Omega$.

Nosso objetivo é estudar o comportamento das soluções do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} f(x, Lu(x)) = 0, & x \in \Omega \\ b(x, Lu(x), MN_\Omega(x)) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

quando a região Ω é submetida a uma C^m-perturbação.

Surge uma dificuldade conceitual quando nos propomos a tal tarefa: Os espaços de funções variam sempre que as regiões de definição do problema de valor de contorno variam. Uma maneira de evitar este inconveniente é fazer com que o problema de valor de contorno retorne à região de referência original.

Para isso, se $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um mergulho de classe C^m e u é uma função definida em $h(\Omega)$, definimos a composição (ou o *pull back*) h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)),\ x \in \Omega.$$

Agora, se $F_{h(\Omega)}$ é um operador diferencial em $h(\Omega)$, podemos considerar o operador diferencial $h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}$ definido na região fixada Ω.

Essa abordagem nos permite trabalhar em espaços de funções que não variam quando a região é perturbada. Entretanto, precisamos provar a suavidade com relação a h desse operador e ser capazes de calcular sua derivada. A primeira tarefa é relativamente fácil, mas a segunda, na prática, pode se tornar difícil se tentarmos uma abordagem direta.

Suponha que devessemos calcular a t-derivada ao longo de uma curva $t \to (h(t,\cdot), u(t,\cdot)) \in \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega)$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(h^{-1}(t, h(t,\cdot)), Lu(t, h^{-1}(t,\cdot))(h(t,\cdot))).$$

Podemos simplesmente aplicar a regra da cadeia, mas isto, em geral, nos levaria a uma longa sequência de cálculos. Seria mais fácil calcular a derivada de $f(h^{-1}(t,y), Lu(t, h^{-1}(t,\cdot))(y))$ em um ponto fixo y pertencente a uma região perturbada $h(t,\Omega)$, entretanto, teríamos que permitir a variação de nossas regiões (e espaços).

D. Henry introduz então, um artifício, que facilita os cálculos enquanto mantemos a região fixada. Esse truque consiste basicamente em introduzir a *derivada anti-convectiva* D_t

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad U(x,t) = \Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}$$

que, quando aplicada ao operador $h(t,\cdot)^* F_{h(\Omega)} h(t,\cdot)^{*-1}$ numa região fixada, "corresponde", em um certo sentido, à t-derivada aplicada ao operador $F_{h(t,\Omega)}$ numa região perturbada. Mais precisamente temos

Lema 1 *Suponha que* $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *são de classe* C^1 *e que* $h(t, \cdot)$ *é um difeomorfismo de classe* C^1 *sobre sua imagem* $\Omega(t)$ *para cada* t*. Então*

$$D_t(h^*\psi) = h^*\Big(\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big).$$

Usando esta propriedade, não é difícil provar os Teoremas 6 e 8 adiante, que são essenciais para o cálculo das derivadas das aplicações que "representam" nossos problemas de perturbação de contorno.

Considere então, o seguinte problema de Dirichlet para o Bilaplaciano

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda)u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Sabe-se que este problema admite uma sequência de autovalores negativos $0 > \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots \to -\infty$ com multiplicidade, isto é, a dimensão do auto-espaço associado finita.

Dizemos que um autovalor desse problema é *simples* se a dimensão do auto-espaço associado é 1 e *múltiplo* caso contrário.

É natural perguntar se, como no caso do problema de Dirichlet para o Laplaciano, é possível encontrar um subconjunto residual de regiões (isto é: uma interseção enumerável de abertos densos) em uma topologia adequada tal que em qualquer região Ω deste subconjunto todos os autovalores de (1) são simples.

Em [8] Micheletti responde afirmativamente a essa pergunta. Em nosso trabalho, apresentamos uma outra prova para este resultado, utilizando o Teorema da Transversalidade de Henry. Provamos também, usando os mesmos métodos, que o resultado continua verdadeiro se nos restringimos à regiões Ω que satisfazem uma condição de simetria do tipo: $g\Omega = \Omega$, onde g é uma transformação linear ortogonal satisfazendo: $g^2 = Id$, $g \neq Id$.

Entretanto, o mesmo resultado não vale se outros tipos de simetria são considerados. De fato, exceto no caso $\mathbb{Z}_2$ citado acima, existem autovalores múltiplos em qualquer região simétrica. A prova dessa afirmação para o caso do Laplaciano foi dada por A. L. Pereira em [22]. Argumentos similares se aplicam aqui. Resultados de genericidade envolvendo o problema de Dirichlet para o Laplaciano em regiões simétricas também podem ser encontrados em [22]. É natural conjecturar resultados análogos para o Bilaplaciano. Pretendemos investigar esse tema em trabalhos futuros.

Consideramos também a seguinte equação semilinear com condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) + f(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x)) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial N} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $f(x,\lambda,y,\mu)$ é uma função real de classe C^4 definida em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ satisfazendo $f(x,0,0,0)\equiv 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Nessas condições, demonstramos a existência de um subconjunto residual de regiões $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ nas quais todas as soluções u do problema (2) são simples, isto é, a linearização

$$\begin{aligned} L(u):\dot{u} \quad \to \quad & \Delta^2\dot{u}+\frac{\partial f}{\partial\mu}(\cdot,u,\nabla u,\Delta u)\Delta\dot{u} \\ & +\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,u,\nabla u,\Delta u)\cdot\nabla\dot{u}+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\cdot,u,\nabla u,\Delta u)\dot{u} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Segue diretamente do Teorema da Função Inversa em espaços de Banach que, se todas as soluções u de (2) são simples, tais soluções formam um conjunto discreto.

É importante mencionar que, para a prova de nossos resultados foi necessário lançar mão da forma generalizada do Teorema da Transversalidade demonstrada por Henry. Ao aplicar esse resultado encontramos uma dificuldade técnica: demonstrar que certos operadores pseudo-diferenciais não tem posto finito. Para superar essa dificuldade Henry desenvolve em [5] um método que permite obter condições necessárias para que alguns desses operadores relacionados a problemas de valor de fronteira para o Laplaciano, tenham posto finito. No Capítulo 4 desse trabalho, estendemos o método para equações diferenciais elípticas envolvendo o Bilaplaciano, obtendo assim resultados de genericidade para esse operador.

Perturbação de Contorno

No trabalho citado na introdução, D. B. Henry desenvolve uma espécie de cálculo diferencial onde a variável independente é o domínio de definição do problema com valor de contorno.

Neste capítulo preliminar vamos introduzir de maneira sucinta a técnica desenvolvida em [5] (onde uma exposição completa pode ser encontrada) para tratar esse tipo de problema, bem como notações e alguns resultados que serão necessários nos próximos capítulos.

1.1 Definições, notações e resultados preliminares

Denotaremos um ponto x qualquer do espaço n-dimensional Euclidiano $\mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, ..., x_n)$.

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e a $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. De maneira análoga $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$. Usaremos também a seguinte notação para derivadas parciais,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}.$$

Seja f uma aplicação que assume valores reais m-diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$. A m-ésima derivada de f em x pode ser considerada como uma m-forma linear simétrica sobre $\mathbb{R}^n$,

$$h \longrightarrow D^m f(x) h^m.$$

A norma $|\cdot|$ de $D^m f(x)$ pode ser definida como o

$$max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|.$$

Vale a pena observar que a m-ésima derivada de f em x pode ser considerada também como a coleção das derivadas parciais de f até ordem m, ou seja,

$$D^m f(x) = \{\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} \mid |\alpha| = m\}.$$

Denotaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ e fecho $\bar{\Omega}$. Se E é algum espaço vetorial normado, $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$ é o espaço das funções limitadas m-diferenciáveis f definidas em Ω com derivadas limitadas e valores em E cujas derivadas se extendem continuamente a $\bar{\Omega}$ com a norma usual

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,E)} = max_{0\leq j\leq m} sup_{x\in\Omega}|D^m f(x)|.$$

No caso $E = \mathbb{R}$, escreveremos simplesmente $\mathcal{C}^m(\Omega)$.

$\mathcal{C}^m_0(\Omega)$ é o subeconjunto de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ consistindo de todas as funções com suporte compacto em Ω.

$\mathcal{C}^m_{unif}(\Omega, E)$ é o subespaço fechado de $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$ consistindo das funções cuja m-ésima derivada é uniformemente contínua. Observe que se Ω é limitado, esse conjunto é o próprio $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$.

$\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega, E)$ é o espaço consistindo de todas as funções cuja a m-ésima derivada é Holder contínua com expoente α, $0 < \alpha \leq 1$, e norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega,E)} = max\Big\{\|f\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,E)}, H^\Omega_\alpha(D^m f)\Big\}$$

onde

$$H^\Omega_\alpha(f) = sup\Big\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \mid x \neq y \in \Omega\Big\}.$$

Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{C}^m$*-regular* se existir $\phi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, que é pelo menos $\mathcal{C}^1_{unif}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) > 0\}$$

e $\phi(x) = 0$ implica $|\nabla\phi| \geq 1$.

D. Henry mostra em [5] que, para abertos limitados, essa definição de região $\mathcal{C}^m$-regular é equivalente às definições usadas por E. Browder [12] e Agmon-Douglis-Nirenberg [13] em seus artigos sobre problemas de contorno para operadores elípticos.

Seja m um inteiro não negativo, p um número real ≥ 1 e Ω um aberto limitado. Para uma função $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

O espaço vetorial $\mathcal{C}^m(\Omega)$ não é completo sob a norma (1.1). O completado de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ com essa norma é um espaço de Banach denotado por $H^{m,p}(\Omega)$. Usaremos a notação $\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ para a norma (1.1) em $H^{m,p}(\Omega)$.

Introduzimos outro espaço linear $W^{m,p}(\Omega)$ da seguinte maneira. Uma função a valores reais u pertence a $W^{m,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ e se todas as suas derivadas fracas de ordem menor ou igual a m pertencem a $L^p(\Omega)$. Friedman prova em [17] que se $\partial\Omega$ é $\mathcal{C}^m$-regular então $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ usa-se a notação $H^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

De maneira análoga introduzimos os espaços $H_0^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $H_0^{m,p}(\Omega)$ é o completamento do espaço $\mathcal{C}_0^m(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções u cuja m-ésima derivada pertence a $L^p(\Omega)$ satisfazendo $D^\alpha u = 0$ para todo $|\alpha| \leq \frac{m}{2}$ em $\partial\Omega$. [Quando estivermos trabalhando com funções de valores complexos indicaremos por $L^2(\Omega,\mathbb{C}), H^4 \cap H_0^2(\Omega,\mathbb{C})$ etc ... os espaços de funções a valores complexos que serão considerados espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$.]

Para funções ϕ definidas sobre $\partial\Omega$ introduzimos a classe de funções $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, onde ϕ é o valor de contorno de funções v pertencentes a $W^{m,p}(\Omega)$ cuja norma é dada por

$$\|\phi\| = \inf \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções v em $W^{m,p}(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = \phi$.

Algumas vezes se faz necessário o uso de operadores diferenciais em hipersuperfícies $S \subset \mathbb{R}^n$.

Seja S uma hipersuperfície $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$ e seja $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ em uma vizinhança de S. Então $\nabla_S\phi$ é o campo vetorial tangente sobre S tal que para cada curva $x(t) \subset S$ de classe $\mathcal{C}^1$, tenha-se

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla_S\phi(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Seja S uma hipersuperfície $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^n$ e $\vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial $\mathcal{C}^1$. Definimos $div_S\vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como a função contínua tal que, para toda função $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ com suporte compacto em S,

$$\int_S (div_S\vec{a})\phi = -\int_S \vec{a} \cdot \nabla_S\phi.$$

Finalmente, se $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2$, então $\Delta_S u = div_S(\nabla_S u)$ ou equivalentemente, para toda $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ com suporte compacto em S,

$$\int_S \phi\Delta_S u = -\int_S \nabla_S\phi \cdot \nabla_S u.$$

Teorema 2 *1. Se S é uma hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^1$ numa vizinhança de S, então, $\nabla_S\phi(x)$ é a componente do $\nabla\phi(x)$ tangente a S em x, ou seja,*

$$\nabla_S\phi(x) = \nabla\phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial N}(x)N$$

onde N é um campo vetorial normal sobre S.

2. *Se S é uma hipersuperfície $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ numa vizinhança de S, $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial unitário sobre uma vizinhança de S, e N sobre S é o campo normal a S nos pontos de S. Então*
$$div_S\vec{a} = div\vec{a} - (divN)\vec{a} \cdot N - \frac{\partial}{\partial N}(a \cdot N)$$
sobre S.

3. *Se S é uma hipersuperfície $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2$ sobre uma vizinhança de S e N é um campo vetorial normal unitário a S no sentido de 2 acima. Então*
$$\Delta_S u = \Delta u - divN\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_S u \cdot \frac{\partial N}{\partial N}$$
sobre S.

Prova. Veja [4]. ∎

Observação 3 *Se $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ temos que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}$ em $\partial\Omega$. De fato, pelo Teorema 2*
$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{\partial\Omega} u \\ &= \Delta u - \ div\ N\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial N}{\partial N} \\ &= \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\ \ em\ \partial\Omega \end{aligned}$$
já que $\nabla_{\partial\Omega} u = \nabla u - \frac{\partial u}{\partial N} N = 0$ em $\partial\Omega$.

Para obtermos nossos resultados de genericidade, necessitamos frequentemente do Teorema de unicidade do problema de Cauchy para o Bilaplaciano.

Teorema 4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^4-regular e B uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio positivo tal que $B \cap \partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^4 . Suponha que $u \in H^4(\Omega)$ satisfaz*
$$|\Delta^2 u| \leq C\Big(|\Delta u| + |\nabla u| + |u|\Big)\ \ q.t.p.\ \ em\ \Omega$$
para alguma constante positiva C e que
$$u = \frac{\partial u}{\partial N} = \Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial N} = 0\ \ em\ B \cap \partial\Omega.$$
Então u necessariamente é identicamente nula.

Prova. É uma aplicação direta do Teorema 8.9.1 de [20].

∎

Finalizando esta seção de preliminares, provamos algumas identidades envolvendo o Bilaplaciano e termos de ordem menor. Tais identidades são necessárias em vários cálculos realizados em todo o trabalho e nem sempre serão mencionadas.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e u, v duas funções reais suaves definidas em Ω. Então temos a seguinte relação

$$\int_\Omega \{v\Delta^2 u - u\Delta^2 v\} = \int_{\partial\Omega} \Big\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N} - u\frac{\partial \Delta v}{\partial N} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial N}\Big\}.$$

De fato, pela segunda identidade de Greem temos que

$$\int_\Omega \{v\Delta(\Delta u) - \Delta v \Delta u\} = \int_{\partial\Omega} \Big\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N}\Big\}$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \{v\Delta^2 u - u\Delta^2 v\} &= \int_\Omega \{v\Delta(\Delta u) - \Delta v \Delta u + \Delta u \Delta v - u\Delta(\Delta v)\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N} - u\frac{\partial \Delta v}{\partial N} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial N}\Big\}.
\end{aligned}$$

Sejam $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções suaves e considere o operador diferencial

$$L = \Delta^2 + a(x)\Delta + b(x)\cdot\nabla + c(x) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Então o seu adjunto (formal) é dado por

$$L^* = \Delta^2 + a(x)\Delta + (2\nabla a(x) - b(x))\cdot\nabla + (c(x) + \Delta a(x) - \text{ div } b(x)) \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega vLu &= \int_\Omega v\{\Delta^2 + a(x)\Delta + b(x)\cdot\nabla + c(x)\}u \\
&= \int_\Omega u\{\Delta^2 v + \Delta(av) - b\cdot\nabla v - v \text{ div } b + cv\} \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \Big\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N} - u\frac{\partial \Delta v}{\partial N} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial N}\Big\} \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \Big\{ av\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial (av)}{\partial N} + uvb\cdot N\Big\}
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \{vLu - uL^*v\} &= +\int_{\partial\Omega} \Big\{ v\frac{\partial \Delta u}{\partial N} - \Delta u \frac{\partial v}{\partial N} - u\frac{\partial \Delta v}{\partial N} + \Delta v \frac{\partial u}{\partial N}\Big\} \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \Big\{ av\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial (av)}{\partial N} + uvb\cdot N\Big\}.
\end{aligned}$$

1.2 Cálculo para perturbação regular de contorno

Consideremos o operador linear diferencial matricial formal

$$Lu(x) = \Big(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x), ...\Big),\ x \in \mathbb{R}^n$$

com a quantidade de termos que se fizer necessário. Dada uma função f de várias variáveis podemos definir um operador diferencial formal não linear por

$$v(x) = f(x, Lu(x)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mais precisamente, suponha que $Lu(\cdot)$ assume valores em $\mathbb{R}^p$ e $f(x,\lambda)$ está definida para (x,λ) em algum conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)),\ x \in \Omega$$

para funções u suficientemente suaves sobre Ω tal que $(x, Lu(x)) \in O$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Por exemplo, se f é contínua, Ω é limitado e L envolve derivadas de ordem menor ou igual a m, o domínio de F_Ω é um subconjunto aberto de $\mathcal{C}^m(\Omega)$, (talvez vazio) e os valores de F_Ω se encontram em $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Outros espaços de funções podem ser usados com modificações naturais.

Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mergulho m vezes diferenciável, isto é, um difeomorfismo sobre sua imagem $h(\Omega)$ de ordem m. Definimos a aplicação de composição (ou o *pull-back*) h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)),\ x \in \Omega$$

onde u é uma função definida em $h(\Omega)$.

Proposição 5 *$h^* : \mathcal{C}^m(h(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{C}^m(\Omega) : u \longrightarrow u \circ h$ é um isomorfismo com inversa $h^{*-1} = (h^{-1})^*$.*

Prova. Seja $h : \Omega \longrightarrow h(\Omega)$ um mergulho de ordem m, $h^*u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ para todo $u \in \mathcal{C}^m(h(\Omega))$ pela regra da cadeia, portanto h^* está bem definido. Além disso h^* é claramente linear, injetora e sobrejetora. Observe também que h^* é limitado, de fato, $\|h^*u\|_{\mathcal{C}^m(\Omega)} = \|u \circ h\|_{\mathcal{C}^m(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{C}^m(h(\Omega))}$ para algum $c > 0$ já que $h \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Logo h^* é um isomorfismo já que $h^{*-1} = (h^{-1})^*$. ∎

É importante observar que a proposição anterior é válida em outros espaços de funções, como por exemplo, os espaços de Sobolev, $h^* : H^{k,p}(h(\Omega)) \longrightarrow H^{k,p}(\Omega)$ $0 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$.

Dado um mergulho h de uma região limitada Ω podemos considerar o operador diferencial $F_{h(\Omega)}$ com domínio aberto $D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(h(\Omega))$. A aplicação

$$F_{h(\Omega)} : D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(h(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{C}^0(h(\Omega))$$

é chamada a forma *Euleriana* do operador diferencial formal não linear $v \longrightarrow f(\cdot, Lv(\cdot))$ sobre $h(\Omega)$, enquanto

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega)$$

é chamada forma *Lagrangeana* do mesmo operador diferencial formal não linear. Os mesmos termos são usados para outros espaços de funções.

A forma Euleriana é frequentemente mais natural e simples para se fazer cálculos, a forma Lagrangeana é usada para provar teoremas.

A vantagem da forma Lagrangeana é que ela age em espaços de funções que não dependem de h facilitando então o uso de teoremas como o Teorema da Função Implícita e o Teorema da Transversalidade. Entretanto precisamos garantir que

$$(u, h) \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u \tag{1.2}$$

é diferenciável e calcular derivadas com respeito a h. Isto pode ser visto no capítulo 2 de [5], de fato, dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo, limitado, C^k-regulars e f é uma função $\mathcal{C}^r$ ou analítica em O temos que a aplicação

$$\mathcal{C}^m(\Omega) \times \mathrm{Diff}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega) : (u, h) \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u = f(h(\cdot), h^* L h^{*-1} u)$$

é $\mathcal{C}^r$ ou analítica respectivamente em seu domínio de definição onde

$$\mathrm{Diff}^k(\Omega) = \{h \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid h \text{ é injetivo e } 1/|\det h'(x)| \text{ é limitado em } \Omega\}$$

é um subconjunto aberto de $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Outros espaços de funções podem ser empregados e os resultados de suavidade são essencialmente os mesmos.

1.2.1 Cálculo da diferencial na forma Lagrangeana

Sabendo que

$$h \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u,$$

é derivável, para calcular a sua derivada, basta calcular a derivada de Gâteaux, isto é, a t-derivada ao longo de uma curva de mergulhos $t \longrightarrow h(t, \cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha então que queremos calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

com $y = h(t,x)$ fixo em $\Omega(t) = h(t,\Omega)$. Para que y permaneça fixo devemos ter $x = x(t)$, $y = h(t,x(t))$ tal que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x'(t) \Longrightarrow x'(t) = -(\frac{\partial h}{\partial x})^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} \ ,$$

ou seja, se $U(x,t) = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}$, $x(t)$ deve ser solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -U(x,t)$. Assim a derivada parcial com relação a t na forma Eureliana com $y = h(t,x)$ fixado corresponde à *derivada anti-convectiva* D_t da forma Lagrangeana na região de referência Ω

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x},\ U(x,t) = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}.$$

Mais precisamente, temos os seguintes resultados de [5] que nos permitem realizar os cálculos de derivação.

Teorema 6 *Suponha que $f(t,y,\lambda)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ num conjunto aberto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, L é um operador diferencial com coeficientes constantes de ordem menor ou igual a m com $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$. Para um conjunto aberto $Q \subset \mathbb{R}^n$ e funções v definidas em Q, seja $F_Q(t)v$ a aplicação*

$$y \longrightarrow f(t,y,Lv(y)),\ y \in Q.$$

Suponhamos que $t \longrightarrow h(t,\cdot)$ é uma curva de mergulhos de um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega(t) = h(t,\Omega)$ e para $|j| \leq m$, $|k| \leq m+1$ $(t,x) \longrightarrow \partial_t\partial_x^j h(t,x)$, $\partial_x^k h(t,x)$, $\partial_x^k u(t,x)$ sejam contínuas em $\mathbb{R}\times\Omega$ numa vizinhança de $t=0$ e que $h(t,\cdot)^{*-1}u(t,\cdot)$ está no domínio de $F_{\Omega(t)}$. Então nos pontos de Ω

$$D_t(h^*F_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) = (h^*\dot{F}_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) + (h^*F'_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u)\cdot D_t u$$

onde D_t é a derivada anti-convectiva definida anteriormente,

$$\dot{F}_Q(t)v(y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y,Lv(y))$$

e

$$F'_Q(t)v\cdot w(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,y,Lv(y))\cdot Lw(y),\ y \in Q$$

é a linearização de $v \longrightarrow F_Q(t)v$.

Exemplos:

1. Suponhamos que $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha$ é um operador diferencial linear que não depende explicitamente de t e $h(t,x) = x + tV(x) + o(t)$ numa vizinhança de $t=0$ e

$x \in \Omega$. Então pelo Teorema 6 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} &= D_t(h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} + h_x^{-1} h_t \nabla (h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} \\ &= A\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - V \cdot \nabla u\Big) + V \cdot \nabla (Au) \\ &= A\frac{\partial u}{\partial t} + [V \cdot \nabla, A]u \end{aligned}$$

já que $\frac{\partial}{\partial t}A = 0$. $[V \cdot \nabla, A](\cdot)$ é chamado *comutador* e ainda é uma operador de ordem m embora $V \cdot \nabla A$ e $AV \cdot \nabla$ sejam operadores de ordem $m+1$. Portanto pode ser calculado em funções de classe $\mathcal{C}^m$.

2. Seja $f(x, \lambda, y, \mu)$ uma função suave definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e considere o operador diferencial formal não linear

$$F_\Omega(v)(x) = \Delta^2 v(x) + f(x, v(x), \nabla v(x), \Delta v(x))$$

que não depende explicitamente de t. Como no exemplo anterior, suponha que $h(t,x) = x + tV(x) + o(t)$ numa vizinhança de $t = 0$ e $x \in \Omega$. Então pelo Teorema 6 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Big(h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)\Big) &= D_t\Big(h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)\Big)\Big|_{t=0} - h_x^{-1} h_t \nabla \Big(h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)\Big)\Big|_{t=0} \\ &= h^* F'_{h(\Omega)} h^{*-1}(u) \cdot D_t(u)\Big|_{t=0} - h_x^{-1} h_t \nabla \Big(h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)\Big)\Big|_{t=0} \\ &= L(u)\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - V \cdot \nabla u\Big) \\ &\quad - V \cdot \nabla \Big(\Delta^2 u + f(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x))\Big) \end{aligned}$$

onde

$$L(u) = \Delta^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)\Delta + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) \cdot \nabla + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u).$$

De fato, $\frac{\partial}{\partial t}\Big(F_\Omega(u)\Big) = 0$ e $F'_\Omega(u) \cdot w = L(u)w$.

Precisaremos também diferenciar condições de contorno do tipo

$$b(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y)) = 0 \text{ para } y \in \partial\Omega(t),$$

onde L, M são operadores diferenciais com coeficientes constantes e $N_{\Omega(t)}(y)$ é a normal unitária apontando para fora em $y \in \partial\Omega(t)$, estendido suavemente a um campo vetorial em uma vizinhança de $\partial\Omega(t)$. Escolhemos alguma extensão de N_Ω na região de referência e então definimos $N_{\Omega(t)} = N_{h(t,\Omega)}$ por

$$h^* N_{h(t,\Omega)}(x) = N_{h(t,\Omega)}(h(x)) = \frac{(h_x^{-1})^t N_\Omega(x)}{\|(h_x^{-1})^t N_\Omega(x)\|} \tag{1.3}$$

para x próximo a $\partial\Omega$, onde $(h_x^{-1})^t$ é a transposta inversa da matriz Jacobiana h_x e $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Esta extensão deve ser entendida da seguinte maneira:
$b(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y))$ está definido para $y \in \Omega$ próximo a $\partial\Omega$ e tem limite zero (em algum sentido, dependendo dos espaços de funções empregados) quando $y \to \partial\Omega$.

Lema 7 *Seja Ω uma região C^2-regular, $N_{\Omega(\cdot)}$ um campo vetorial unitário C^1 definido numa vizinhança de $\partial\Omega$ que é o vetor unitário sobre $\partial\Omega$, e para uma função C^2 $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ defina $N_{h(\Omega)}$ sobre uma vizinhança de $h(\partial\Omega) = \partial h(\Omega)$ como em (1.3). Suponha que $h(t,\cdot)$ é um mergulho para cada t, definido por*

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t,x) = V(t, h(t,x)) \text{ para } x \in \Omega,\ h(0,x) = x,$$

$(t,x) \to V(t,y)$ uma aplicação C^2, $\Omega(t) = h(t,\Omega)$ e $N_{\Omega(t)} = N_{h(t,\Omega)}$. Então para x próximo a $\partial\Omega$, $y = h(t,x)$ próximo a $\partial\Omega(t)$, podemos calcular a derivada $(\partial/\partial t)_{y=constante}$ e, se $y \in \partial\Omega$,

$$\frac{\partial}{\partial t}N_{\Omega(t)}(y) = D_t(h^* N_{h(t,\Omega)})(x) = -\Big(\nabla_{\partial\Omega(t)}\sigma + \sigma\frac{\partial N_{\Omega(t)}}{\partial N_{\Omega(t)}}(y)\Big)$$

onde $\sigma = V \cdot N_{\Omega(t)}$ é a velocidade normal e $\nabla_{\partial\Omega(t)}\sigma$ é o gradiente em $\partial\Omega$ tangente a $\partial\Omega$.

Teorema 8 *Seja $b(t, y, \lambda, \mu))$ uma aplicação C^1 sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e seja L, M operadores diferenciais com coeficientes constantes com ordem $\leq m$ com dimensões apropriadas de maneira que $b(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y))$ faça sentido. Assuma que Ω é uma região $C^m -$ regular, $N_\Omega(x)$ é um campo vetorial C^m próximo à $\partial\Omega$ que é normal unitário sobre $\partial\Omega$ e defina $N_{h(t,\Omega)}$ como em (1.3) quando $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um mergulho C^{m+1}. Defina também $\mathcal{B}_{h(\Omega)}(t)$ por*

$$\mathcal{B}_{h(\Omega)}v(y) = b(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y))$$

para $y \in h(\Omega)$ próximo à $\partial h(\Omega)$. Se $t \to h(t,\cdot)$ é uma curva C^1 de mergulhos de Ω e para $|j| \leq m$, $|k| \leq m+1$, $(t,x) \to (\partial_t\partial_x^j h, \partial_x^k h, \partial_t\partial_x^j u, \partial_x^k u)(t,x)$ são contínuas sobre $\mathbb{R} \times \Omega$ próximo a $t = 0$, então em pontos de Ω próximos a $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} D_t(h^*\mathcal{B}_{h(\Omega)}h^{*-1})(u) &= (h^*\dot{\mathcal{B}}_{h(\Omega)}h^{*-1})(u) + h^*\mathcal{B}'_{h(\Omega)}h^{*-1})(u) \cdot D_t u \\ &\quad + \Big(h^*\frac{\partial\mathcal{B}_{h(\Omega)}}{\partial N}h^{*-1})\Big)(u) \cdot D_t(h^*N_{\Omega(t)}) \end{aligned}$$

onde $h = h(t,\cdot)$, $\dot{\mathcal{B}}_{h(\Omega)}$ e $\mathcal{B}'_{h(\Omega)}$ são definidos como no Teorema 6,

$$\frac{\partial\mathcal{B}_{h(\Omega)}}{\partial N}(v) \cdot \eta(y) = \frac{\partial b}{\partial\mu}(t, y, Lv(y), MN_{\Omega(t)}(y)) \cdot M\eta(y)$$

e $D_t(h^*N_{\Omega(t)})\Big|_{\partial\Omega}$ é calculada como no Lema 7.

1.2.2 Mudança de origem

Se a 'origem' ou região de referência para a variação do domínio é Ω, podemos facilmente transferí-la para qualquer região $\tilde{\Omega}$ difeomorfa a Ω. De fato, seja $\tilde{H} : \Omega \to \tilde{\Omega}$ um difeomorfismo e para todo mergulho $h : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ defina o mergulho $\tilde{h} = h \circ \tilde{H}^{-1} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$. Sejam $\tilde{x} = \tilde{H}(x)$, $\tilde{u} = \tilde{H}^{-*}u$,

$$N_{\tilde{\Omega}}(\tilde{x}) = N_{\tilde{H}(\Omega)}(\tilde{H}(x)) = \frac{\tilde{H}_x^t N_\Omega(x)}{\|\tilde{H}_x^t N_\Omega(x)\|}.$$

Então $h(\Omega) = \tilde{h}(\tilde{\Omega})$,

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) = \tilde{h}^* F_{\tilde{h}(\tilde{\Omega})} \tilde{h}^{-*} \tilde{u}(\tilde{x}),$$

$$h^* \mathcal{B}_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) = \tilde{h}^* \mathcal{B}_{\tilde{h}(\tilde{\Omega})} \tilde{h}^{-*} \tilde{u}(\tilde{x}),$$

usando a normal

$$\begin{aligned} N_{\tilde{h}(\tilde{\Omega})}(\tilde{h}(\tilde{x})) &= \frac{\tilde{h}_{\tilde{x}}^{-t} N_{\tilde{\Omega}}(\tilde{x})}{\|\tilde{h}_{\tilde{x}}^{-t} N_{\tilde{\Omega}}(\tilde{x})\|} \\ &= \frac{h_x^{-t} N_\Omega(x)}{\|h_x^{-t} N_\Omega(x)\|} \\ &= N_{h(\Omega)}(h(x)). \end{aligned}$$

Esta 'mudança de origem' será frequentemente utilizada nas próximas seções. Ela nos permite calcular as derivadas com relação a variável h em $h = i_\Omega$, onde as fórmulas são mais simples.

1.3 O Teorema da Transversalidade

O Teorema da Transversalidade de *Thom* e *Abraham* [10] é uma ferramenta útil em muitos ramos da Geometria e Análise. Em [5], *Henry* provou uma versão generalizada desse teorema visando aplicações em dimensão infinita com atenção especial para o caso de índice negativo.

Antes de enunciarmos o Teorema precisamos de alguns resultados e definições.

Uma operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ onde X e Y são espaços de Banach é *semi-Fredholm* se a imagem de T é fechada e ao menos um (ou ambos, para *Fredholm*) dos números $\dim \mathcal{N}(T)$ e codim $\mathcal{R}(T)$ é finito; o *índice* de T é então definido como

$$ind(T) = \dim \mathcal{N}(T) - \text{codim } \mathcal{R}(T).$$

Observe que o índice de um operador semi-Fredholm pode assumir valores inteiros, $+\infty$ e $-\infty$. Dizemos que T é *left-Fredholm* se $ind(T) < +\infty$ e dizemos que T é *right-Fredholm* se $ind(T) > -\infty$.

Várias resultados envolvendo os operadores semi-Fredholm são enunciados e demonstrados em [6], [25] e [5]. Usaremos frequentemente nos próximos capítulos os seguintes:

1. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é semi-Fredholm se somente se $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ é semi-Fredholm. Neste caso $ind(T^*) = -ind(T)$.

2. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é semi-Fredholm e $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ é compacto, então $T + K$ é semi-Fredholm e $ind(T + K) = ind(T)$.

3. Sejam $T_i \in \mathcal{L}(X, Y_i)$ $i = 1, ..., m$ e suponha T_1 left-Fredholm. Então a aplicação linear limitada $x \mapsto (T_1 x, T_2 x, ..., T_m x)$ é left-Fredholm e possui índice $-\infty$ se algum Y_i $(i > 1)$ tem dimensão infinita.

4. Sejam $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ operadores semi-Fredholm cujos índices podem ser somados (excluindo somente o caso "$\infty - \infty$"). Então $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ é semi-Fredholm e $ind(ST) = ind(S) + ind(T)$.

Dizemos que um subconjunto F de um espaço topológico X é *magro* se F está contido em uma união enumerável de conjuntos raros, ou seja, se F está contido em uma união enumerável de conjuntos cujo fecho não possui interior. Segue da definição de conjunto magro que a união enumerável de conjuntos magros é magro. Dizemos que F é *residual* se seu complementar é magro, ou seja, se F é a interseção enumerável de abertos densos. Dizemos ainda que um espaço topológico X é espaço de *Baire* se todo subconjunto residual é denso.

Seja f uma aplicação $\mathcal{C}^k$ entre espaços de Banach. Diremos que x é *ponto regular* de f se a derivada $f'(x)$ é sobrejetora e possui núcleo de dimensão finita. Se x não é ponto regular de f, x é chamado *ponto crítico* de f. Em nossas aplicações o núcleo de f' sempre será de dimensão finita, portanto, para x ser ponto crítico de f será necessário e suficiente $f'(x)$ ser não sobrejetora. Um *valor crítico* de f é a imagem por f de algum ponto crítico de f. Todos os outros pontos do contradomínio são chamados *valores regulares* de f, incluindo todos os pontos fora da imagem de f.

Sejam agora X um espaço topológico de Baire e $I = [0, 1]$. Para qualquer subconjunto fechado $F \subset X$ e um inteiro $m \geq 0$, dizemos que a codimensão de F é maior ou igual a m (*codim* $F \geq m$) se o subconjunto $\{\phi \in \mathcal{C}(I^m, X); \phi(I^m) \cap F \text{ é não vazio }\}$ é magro em $\mathcal{C}(I^m, X)$. Dizemos que *codim* $F = k$ se k é o maior inteiro satisfazendo *codim* $F \geq m$.

Teorema 9 *Sejam k, m inteiros positivos; X, Y e Z variedades de Banach de classe $\mathcal{C}^k$; $A \subset X \times Y$ um conjunto aberto; $f : A \longrightarrow Z$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$ e um ponto $\xi \in Z$. Suponhamos que para cada $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$:*

1. *$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : T_x X \longrightarrow T_\xi Z$ é semi-Fredholm com índice $< k$.*
2. *(α) $Df(x, y) : T_x X \times T_y Y \longrightarrow T_\xi Z$ é sobrejetora*

   ou

   (β) dim $\left\{\frac{\mathcal{R}(Df(x,y))}{\mathcal{R}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))}\right\} \geq m +$ dim $\mathcal{N}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))$.
3. *$(x, y) \longrightarrow y : f^{-1}(\xi) \longrightarrow Y$ é σ-própria, ou seja, $f^{-1}(\xi)$ é a união enumerável de conjuntos M_j tais que $(x, y) \longrightarrow y : M_j \longrightarrow Y$ é uma aplicação própria para cada j.[Dado $(x_n, y_n) \in M_j$ tal que $\{y_n\}$ converge em Y, existe uma subsequência convergente de $\{(x_n, y_n)\}$ com limite em M_j.]*

Observamos que (3) se verifica se $f^{-1}(\xi)$ é Lindelof, ou mais especificamente se $f^{-1}(\xi)$ é um espaço métrico separável, ou se X e Y são espaços métricos separáveis.

Seja $A_y = \{x \in X; (x, y) \in A\}$ e

$$Y_{crit} = \{y \in Y; \xi \text{ é valor crítico de } f(\cdot, y) : A_y \longrightarrow Z\}.$$

Então Y_{crit} é magro em Y e se $(x, y) \longrightarrow y : f^{-1}(\xi) \longrightarrow Y$ é própria, Y_{crit} também é fechado. Se ind$(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) \leq -m < 0$ em $f^{-1}(\xi)$ então $2(\alpha)$ implica $2(\beta)$ e

$$Y_{crit} = \{y \in Y; \xi \in f(A_y, y)\}$$

tem codimensão maior ou igual a m em Y.[Note que Y_{crit} é magro em Y se somente se codim $Y_{crit} \geq 1$.]

Observação 10 *A hipótese usual é a de que ξ seja valor regular de f, assim sempre temos $2(\alpha)$. Se $2(\beta)$ se verifica em algum ponto, então ind$(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) \leq -m$ neste ponto já que a*

$$\text{codim } \mathcal{R}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) \geq \text{dim } \left\{\frac{\mathcal{R}(Df(x, y))}{\mathcal{R}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))}\right\}.$$

Se o ind$(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) \leq -m$ e $2(\alpha)$ se verifica, então $2(\beta)$ também se verifica. Portanto a hipótese $2(\beta)$ é mais geral para o caso de índice negativo.

Perturbação de Contorno para o Bilaplaciano

2.1 Continuidade dos autovalores

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado, conexo, C^4-regular. Mostraremos nesta seção a continuidade dos autovalores do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda)v = 0 & \text{em } h(\Omega) \\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial h(\Omega) \end{cases} \tag{2.1}$$

em relação à variação de $h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Mais precisamente, mostraremos que uma parte do espectro de (2.1) formada por um número finito de autovalores varia continuamente em h.

Para isto, utilizamos a teoria descrita em 1.2, escrevendo o problema (2.1) como

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $u = h^*v$. Observe que o problema (2.1) é equivalente ao (2.2). De fato, v é solução de (2.1) se somente se $u = h^*v$ é solução de

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = h^* \frac{\partial}{\partial N_h} h^{*-1}u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $N_{h(\Omega)}$ é a normal da região $h(\Omega)$. Agora, se $y = h(x)$ para $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \Big(h^* \frac{\partial}{\partial N_{h(\Omega)}} h^{*-1}u\Big)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1}u\Big)(x)(N_{h(\Omega)})_i(h(x)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x))(N_{h(\Omega)})_i(h(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(h^{-1}(y)) \frac{\partial (h^{-1})_j}{\partial y_i}(h(x))(N_{h(\Omega)})_i(h(x)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{ji}(x)(N_{h(\Omega)})_i(h(x)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(N_{h(\Omega)})_i(h(x)) \\
&= N_{h(\Omega)} \cdot (h(x)) b(x) \nabla u(x)
\end{aligned}$$

onde $b_{ij}(x) = (h_x^{-1})_{ji}(x)$ [a i,j-ésima entrada da transposta da matriz jacobiana inversa de h] e $b(x) = (b_{ij})(x)$ para $x \in \Omega$. Como $u = 0$ em $\partial\Omega$ temos que

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial N} N \text{ em } \partial\Omega.$$

Observe que, para todo $x \in \Omega$, $b(x)$ é uma matriz não singular e como pode ser visto na definição (1.3), $b(x)N(x)$ está na mesma direção de $N_{h(\Omega)}(h(x))$. Logo

$$h^* \frac{\partial}{\partial N_{h(\Omega)}} h^{*-1} u = 0 \text{ em } \partial\Omega \iff \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{2.4}$$

implicando que v é solução de (2.1) se e somente se $u = h^* v$ é solução de (2.2).

Observação 11 *É importante observar também que a propriedade (2.4) implica que a aplicação* pull-back $h^* : H_0^2(h(\Omega)) \to H_0^2(\Omega)$ *está bem definida. Assim, argumentando como na Proposição 5 podemos provar que de fato tal aplicação é um isomorfismo.*

O próximo Lema é essencial na demonstração da dependência contínua do conjunto finito de autovalores de (2.1) com relação a h.

Lema 12 *Dado $h_0 \in \mathrm{Diff}^4(\Omega)$ existe uma vizinhança V_0 de h_0 em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ tal que, para todo $h \in V_0$ e $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$*

$$\|(h^* \Delta^2 h^{*-1} - h_0^* \Delta^2 h_0^{*-1}) u\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon(h) \|h_0^* \Delta^2 h_0^{*-1} u\|_{L^2(\Omega)}$$

com $\epsilon(h) \to 0$ quando $h \to h_0$ em $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Prova. Sem perda de generalidade podemos, supor $h_0 = i_\Omega$. Temos

$$\begin{aligned}
\Big(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} u\Big)(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{ji}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)
\end{aligned}$$

onde $b_{ij}(x) = (h_x^{-1})_{ji}(x)$, ou seja, $b_{ij}(x)$ é a i,j-ésima entrada da transposta da matriz Jacobiana inversa de $h_x = (\frac{\partial h_i}{\partial x_j})_{i,j=1}^n$. Portanto

$$\begin{aligned}
h^* \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} h^{*-1} u(x) &= \sum_{k=1}^n b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{ik}(x) \sum_{j=i}^n \Big[\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x)\Big] \\
&= \sum_{j,k=1}^n b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) + \sum_{j,k=1}^n b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^* \frac{\partial^3}{\partial y_s \partial {y_i}^2} h^{*-1} u(x) &= \sum_{l=1}^n b_{sl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}(u \circ h^{-1})(h(x))\Big) \\
&= \sum_{l,j,k=1}^n b_{sl}(x) b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(x) \\
&\quad + \sum_{l,j,k=1}^n b_{sl}(x) b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j}(x) \\
&\quad + \sum_{l,j,k=1}^n \Big[b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ik}(x)) + b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))\Big] b_{sl}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) \\
&\quad + \sum_{l.j.k=1}^n \Big[\frac{\partial}{\partial x_l}(b_{ik}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x)) + b_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}(b_{ij}(x))\Big] b_{sl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^* \frac{\partial^4}{\partial {y_s}^2 \partial {y_i}^2} h^{*-1} u(x) &= \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{\partial^3}{\partial y_s \partial {y_i}^2}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\
&= \sum_{r=1}^n b_{rs}(x) \frac{\partial}{\partial x_r}\Big(\frac{\partial^3}{\partial y_s \partial {y_i}^2}(u \circ h^{-1})(h(x))\Big) \\
&= \frac{\partial^4 u}{\partial {x_s}^2 \partial {x_i}^2}(x) + L_{si}^h(u)(x) \text{ onde}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{si}^h(u)(x) &= \Big(b_{ss}(x)^2 b_{ii}(x)^2 - 1\Big) \frac{\partial^4 u}{\partial {x_s}^2 \partial {x_i}^2}(x) \\
&\quad + \sum_{r,l,j,k=1}^n (1 - \delta_{s,r,l}\delta_{i,j,k}) b_{sl}(x) b_{sr}(x) b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x_r \partial x_l \partial x_j \partial x_k}(x) \\
&\quad + \sum_{r,l,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r}\Big[b_{sl}(x) b_{ik}(x) b_{ij}(x)\Big] b_{sr}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(x) \\
&\quad + \sum_{r,l,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l}\Big[b_{ik}(x) b_{ij}(x)\Big] b_{sr}(x) b_{sl}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_r \partial x_k \partial x_j}(x)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x)b_{sl}(x)b_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))\frac{\partial^3 u}{\partial x_r\partial x_l\partial x_j}(x)$$
$$+\sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}\Big[\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(b_{ij}(x)b_{ik}(x)\Big)b_{sl}(x)\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}(x)$$

$$+\sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x)b_{sl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(b_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_r\partial x_j}(x)$$
$$+\sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}\Big[b_{sl}(x)b_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}(b_{ij}(x))\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_j}(x)$$
$$+\sum_{r,l,j,k=1}^{n} b_{sr}(x)\frac{\partial}{\partial x_r}\Big[\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(b_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij}(x))\Big)b_{sl}(x)\Big]\frac{\partial u}{\partial x_j}(x).$$

Assim obtemos que

$$h^*\Delta^2 h^{*-1}u = \Delta^2 u + L^h u \tag{2.5}$$

onde $L^h u = \sum_{s,i=1}^{n} L^h_{is}u$.

Como $b_{ij} \to \delta_{ij}$ em $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$ quando $h \to i_\Omega$ em $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$, temos que os coeficientes de L^h tendem a 0 uniformemente em $x \in \Omega$ quando $h \to i_\Omega$ em $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Logo,

$$\|L^h u\|_{L^2(\Omega)} \le \epsilon(h)\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.6}$$

onde $\epsilon(h)$ vai a 0 quando $h \to i_\Omega$ em $C^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

∎

Teorema 13 *Seja λ um autovalor de (2.1) em Ω com multiplicidade m e I um intervlo em $\mathbb{R}$ tal que λ é o único elemento do espectro em I.*

Então, dado $\eta > 0$ e um intervalo aberto $J \subset I$ com $\lambda \in J$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω em $\mathrm{Diff}^k(\Omega)$ ($k \ge 4$) tal que se $h \in \mathcal{V}$ existem exatamente m autovalores $\lambda_1(h), ..., \lambda_m(h)$ de (2.1) em J contados com multiplicidade com $\lambda_i(i_\Omega) = \lambda$ para todo $1 \le i \le m$. Além disso, a projeção $P(h)$ de $L^2(\Omega)$ sobre o auto-espaço associado a $\lambda_1(h), ..., \lambda_m(h)$ satisfaz $\|P(h) - P(i_\Omega)\| < \eta$ em $\mathcal{V}$.

Prova. Para provarmos este Lema, utilizaremos a teoria de perturbação de operadores ilimitados desenvolvida no capítulo IV de [6].

Pelo Lema 12, provado anteriormente, $A_h = h^*\Delta^2 h^{*-1} - \Delta^2$ é Δ^2-limitado (ou seja, $D(A_h) = D(\Delta^2) = H^4 \cap H^2_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $\|A_h u\|_{L^2(\Omega)} \le \epsilon(h)\|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H^4 \cap H^2_0(\Omega)$ com $\epsilon(h) \to 0$ quando $h \to i_\Omega$). Além disso, existe uma vizinhança V de

i_Ω em $\mathrm{Diff}^k(\Omega)$ tal que $\epsilon(h) < 1$ para todo $h \in V$. Portanto, pelo Teorema IV 2.14 de [6], temos que $A_h + \Delta^2 = h^*\Delta^2 h^{*-1}$ é um operador fechado em $L^2(\Omega)$ com

$$\widehat{\delta}(h^*\Delta^2 h^{*-1}, \Delta^2) \leq (1 - \epsilon(h))^{-1}\epsilon(h) \;\; \forall h \in V \tag{2.7}$$

onde $\widehat{\delta}$ é o *gap* entre operadores fechados definido em [6]. Se J é um intervalo aberto satisfazendo as hipóteses anteriores, então podemos encontrar uma curva fechada γ em $\mathbb{C}$ com *int* $\gamma \cap \mathbb{R} = J$. Já que $\widehat{\delta}(h^*\Delta^2 h^{*-1}, \Delta^2) \to 0$ quando $h \to i_\Omega$ em C^k, obtemos pelo Teorema IV 3.16 de [6] que, se $\|i_\Omega - h\|_{C^k(\Omega)}$ é suficientemente pequeno, $h^*\Delta^2 h^{*-1}$ possui exatamente m autovalores $\lambda_1(h), ..., \lambda_m(h)$ contados com multiplicidade no interior da curva γ. Sendo reais, temos que tais autovalores devem pertencer a J. Além disso, pelo mesmo teorema podemos concluir que $P(h) \to P(i_\Omega)$ em norma quando $h \to i_\Omega$ em C^k.

∎

Corolário 14 *O conjunto*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M \;\; = \;\; & \{h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega) \mid -M \textit{ não é autovalor de (1) em } h(\Omega) \\ & \textit{e todos os autovalores } \lambda \in (-M, 0) \textit{ são simples}\} \end{aligned}$$

é aberto em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ *para todo* $M \in \mathbb{N}$.

Prova. Sejam $h_0 \in \mathcal{D}_M$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalores simples de Δ^2 em $h_0(\Omega)$ estritamente maiores que $-M$. Seja também γ um círculo de raio M com centro na origem.

Segue do Lema anterior que para cada $1 \leq i \leq k$ existe uma vizinhança $V_i \subset Diff^4(\Omega)$ de h_0 e funções contínuas $\Lambda_i : V_i \longrightarrow (-M, 0)$ tal que $\Lambda_i(h)$ é um autovalor simples de $h^*\Delta^2 h^{*-1}$ para qualquer $h \in V_i$ com $\Lambda_i(h_0) = \lambda_i$ e os conjuntos $\Lambda_i(V_i)$ são dois a dois disjuntos. Defina $V = \bigcap_{i=0}^k V_i$ e observe que $\forall h \in V$, $h^*\Delta^2 h^{*-1}$ tem k autovalores maiores que $-M$ todos simples. Portanto, $\mathcal{D}_M$ é aberto.

∎

2.2 Perturbação de autovalores simples

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^4-regular e λ_0 um autovalor simples da equação

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda)u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

associado à autofunção u_0 com $\int_\Omega u_0^2 = 1$.

Consideremos a aplicação

$$F : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^4(\Omega) \to L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$$

definida por

$$F(u, \lambda, h) = (h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u, \int_\Omega u^2 \det h').$$

Pelas observações da seção 1.2 e 2.1 F é analítica, está bem definida e $F(u, \lambda, h) = (0, 1)$ se e somente se $v = h^{*-1}u \in H^4 \cap H_0^2(h(\Omega))$ é solução de (2.8) em $h(\Omega)$ com $\int_{h(\Omega)} v^2 = 1$.

Observe também que $F(u_0, \lambda_0, i_\Omega) = (0, 1)$ e que o operador

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0, \lambda_0, i_\Omega) : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \quad &\to \quad L^2(\Omega) \times \mathbb{R} \\ (\dot{u}, \dot{\lambda}) \quad &\to \quad \left((\Delta^2 + \lambda_0)\dot{u} + \dot{\lambda}u_0, 2\int_\Omega u_0\dot{u}\right) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, dado $(f, \alpha) \in L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$, como

$$\Delta^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é auto-adjunto e Fredholm de índice zero e λ_0 é um autovalor simples de Δ^2, existe solução em $\dot{u}$ de

$$(\Delta^2 + \lambda_0)\dot{u} + \dot{\lambda}u_0 = f \iff (\Delta^2 + \lambda_0)\dot{u} = f - \dot{\lambda}u_0$$

se somente se $(f - \dot{\lambda}u_0) \perp u_0$, ou seja, se

$$\dot{\lambda} = \int_\Omega u_0 f.$$

Nesse caso, todas as soluções são dadas por

$$\dot{u} = \beta u_0 + w,$$

onde $w \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ é a única solução de

$$(\Delta^2 + \lambda_0)w = f - \dot{\lambda}u_0$$

satisfazendo $w \perp u_0$. Como queremos

$$\alpha = 2\int_\Omega u_0\dot{u} = 2\int_\Omega \{u_0 w + \beta u_0^2\} = 2\beta$$

segue que $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Portanto, a única solução da equação

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda_0)\dot{u} + \dot{\lambda}u_0 = f \\ 2\int_\Omega u_0\dot{u} = \alpha \end{cases} \tag{2.9}$$

é dada por

$$(\dot{u}, \dot{\lambda}) = (\frac{\alpha}{2}u_0 + w, \int_\Omega u_0 f).$$

Assim

$$\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0, \lambda_0, i_\Omega) : (\dot{u}, \dot{\lambda}) \to ((\Delta^2 + \lambda_0)\dot{u} + \dot{\lambda}u_0, 2\int_\Omega u_0 \dot{u})$$

é uma bijeção contínua e pelo Teorema do Gráfico Fechado um isomorfismo. [Observe que a recíproca de tal afirmação também é verdadeira. De fato, se existir outra autofunção v_0 de Δ^2 associada ao autovalor λ_0 com $\int_\Omega u_0 v_0 = 0$ então obtemos que $(v_0, 0) \in \mathcal{N}(\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0, \lambda_0, i_\Omega))$.]

Logo, pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança V de i_Ω em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ e funções analíticas $u(h)$ e $\lambda(h)$ em V tal que $F(u(h), \lambda(h), h) = (0, 1)$ para todo $h \in V$. Podemos afirmar ainda que $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u(h), \lambda(h), h)$ é um isomorfismo para todo $h \in V$, ou seja, $\lambda(h)$ é autovalor simples para todo $h \in V$. Temos portanto o seguinte resultado.

Proposição 15 *Seja λ_0 um autovalor simples de (2.8). Então, existe uma vizinhança V de i_Ω em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ e funções analíticas $u(h)$ e $\lambda(h)$ de V em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ e $\mathbb{R}$ respectivamente, satisfazendo a equação (2.2) para todo $h \in V$. Além disso, $\lambda(h)$ é um autovalor simples para todo $h \in V$ com $\lambda(i_\Omega) = \lambda_0$.*

Seja agora h_t uma curva analítica em $\mathrm{Diff}^k(\Omega)$, $k \geq 4$, passando por i_Ω no tempo 0. Em vista da Proposição 15 podemos calcular a derivada $\frac{d\lambda}{dt}(0)$ da função analítica $\lambda(t) = \lambda(h_t)$. De fato, pela Proposição 15, se λ_0 é um autovalor simples de (2.8) associado à autofunção u_0, existem funções analíticas $u(t)$ e $\lambda(t)$ numa vizinhança I de $0 \in \mathbb{R}$ com $\lambda(0) = \lambda_0$ e $u(0) = u_0$ satisfazendo

$$\begin{cases} h_t^*(\Delta^2 + \lambda(t))h_t^{*-1}u(t) = 0 & \text{em } \Omega \\ u(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

e $\int_\Omega u(t)^2 \det{(h_t)_x}\, dx = 1$ para todo $t \in I$.

Seja $k \geq 5$. Pelo Teorema 6 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= D_t\Big(h_t^*(\Delta^2 + \lambda(t))h_t^{*-1}u(t)\Big)\Big|_{t=0} \\ &= (\Delta^2 + \lambda_0)(D_t u(t))|_{t=0} + \dot{\lambda}u_0 \\ &= (\Delta^2 + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u_0) + \dot{\lambda}u_0 \end{aligned}$$

onde $\dot{u} = \frac{d}{dt}u(t)|_{t=0}$, $\dot{h} = \frac{d}{dt}h_t|_{t=0}$ e $\dot{\lambda} = \frac{d}{dt}\lambda(t)|_{t=0}$. Observe que $u(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $t \in I$, logo $\dot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Note também que a escolha de $k \geq 5$ nos garante que $u_0 \in H^5(\Omega)$ (veja por exemplo [13]) implicando que $\dot{h} \cdot \nabla u_0 \in H^4(\Omega)$. Multiplicando por u_0 e integrando dos dois lados a equação anteiror, obtemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \int_\Omega \dot{\lambda} {u_0}^2 \\
&= -\int_\Omega u_0(\Delta^2 + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u_0) \\
&= \int_\Omega \Big\{(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u_0)(\Delta^2 + \lambda_0)u_0 - u_0(\Delta^2 + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u_0)\Big\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big\{(\dot{u} - \dot{h} \cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N})\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u_0) - \Delta u_0 \frac{\partial}{\partial N}(\dot{u} - \dot{h} \cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}) \\
&\quad - u_0 \frac{\partial}{\partial N}\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N}) + \frac{\partial u_0}{\partial N}\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot N\frac{\partial u_0}{\partial N})\Big\} \\
&= \int_\Omega \Big\{\dot{u}\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u_0) - \Delta u_0\Big(\frac{\partial \dot{u}}{\partial N} - \dot{h} \cdot N\frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2}\Big)\Big\} \\
&= \int_\Omega \dot{h} \cdot N \Delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2}.
\end{aligned}$$

Pela Observação 3 sabemos que $\Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2}$ em $\partial\Omega$, logo

$$\dot{\lambda} = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2}\Big)^2 \dot{h} \cdot N \tag{2.11}$$

implicando que numa vizinhança do 0 em $\mathbb{R}$

$$\lambda(t) = \lambda_0 + t\int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2}\Big)^2 \dot{h} \cdot N + O(t^2). \tag{2.12}$$

2.3 Simplicidade genérica dos autovalores

Suponhamos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade que depende de um parâmetro $x \in X$, onde X é um espaço topológico de Baire. Dizemos que $\mathcal{P}$ é *genérica* (em x) se ela vale para todo x em um conjunto residual de X.

Em nossas aplicações X será a classe de regiões $\mathcal{C}^m$ difeomorfas a uma região fixa Ω_0 de classe $\mathcal{C}^m$, ou seja,

$$X = \{h(\Omega_0); h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega_0)\}.$$

Introduzimos uma topologia em X definindo uma sub-base das vizinhanças de um $\Omega \in X$ por

$$\{h(\Omega); \|h - i_\Omega\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} < \epsilon, \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno}\}.$$

Michelleti prova em [7] que este é de fato um espaço topológico metrizável, portanto de Baire.

De fato, o que provaremos nas aplicações é que a propriedade $\mathcal{P}$ vale para todo h fora de um conjunto magro de $\mathrm{Diff}^m(\Omega_0)$.

Entretanto nessas aplicações, o conjunto F de mergulhos excluídos será sempre definido pelas propriedades da imagem do mergulho, (portanto é invariante por composição com difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^m$ de Ω_0 em Ω_0). Isto implica (ver [5]) que o subconjunto das regiões definidas por F também é magro no nosso espaço X.

Nesta seção, mostraremos através do Teorema da Transversalidade a simplicidade genérica de todos os autovalores de (2.8) no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, abertas, conexas, limitadas, C^4-regulares.

Com o objetivo de aplicar os argumentos de transversalidade, mostramos primeiro que nossa propriedade genérica é equivalente a zero ser valor regular de uma aplicação apropriada. Mais precisamente temos

Proposição 16 *Todos os autovalores da equação (2.8) são simples se somente se zero é valor regular da aplicação*

$$\phi_\Omega : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$$

definida por

$$\phi_\Omega(u, \lambda) = (\Delta^2 + \lambda)u.$$

Prova. De fato, 0 é valor regular de ϕ_Ω se somente se para todo $(u, \lambda) \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ com $\phi_\Omega(u, \lambda) = 0$

$$D\phi_\Omega(u, \lambda)(\dot{u}, \dot{\lambda}) = (\Delta^2 + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u$$

é sobrejetora. Agora, como o operador

$$(\Delta^2 + \lambda) : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é um operador auto-adjunto, Fredholm de índice zero temos que

$$L^2(\Omega) = \mathcal{R}(\Delta^2 + \lambda) \oplus \mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda) \quad \text{(soma ortogonal).}$$

Logo, $D\phi_\Omega(u, \lambda)$ é sobrejetora se e somente se

$$\mathcal{R}(\Delta^2 + \lambda) \oplus [u] = L^2(\Omega),$$

ou seja, se e somente se λ é autovalor simples de (2.8).

∎

Considere aplicação

$$F : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \text{Diff}^4(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

definida por

$$F(u, \lambda, h) = h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u.$$

Observe que 0 é valor regular da aplicação

$$(u, \lambda) \to F(u, \lambda, h) \tag{2.13}$$

para $h \in \text{Diff}^4(\Omega)$ se somente se $0 \in L^2(h(\Omega))$ é valor regular da aplicação $\phi_{h(\Omega)}$ já que h^* é um isomorfismo entre espaços de Banach. Como o problema (2.1) é equivalente a (2.2), temos pela Proposição 16 que todos os autovalores de (2.8) em $h(\Omega)$ são simples se somente se $0 \in L^2(\Omega)$ é valor regular da aplicação (2.13). Portanto, para provarmos a simplicidade genérica dos autovalores do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano é suficiente provar que zero é valor regular de (2.13) para a "maioria" dos $h \in \text{Diff}^4(\Omega)$, de fato, pelo Teorema da Transversalidade é suficiente mostrar que 0 é valor regular da aplicação F. Entretanto, quando tentarmos levar a cabo este argumento, encontramos uma dificuldade: não conseguimos mostrar que 0 é de fato valor regular da aplicação F. O que obtemos é que os possíveis pontos críticos devem satisfazer certas propriedades especiais (que no entanto não conduzem imediatamente a uma contradição). A idéia então é mostrar que essas "propriedades especiais" só podem ocorrer para um conjunto "excepcional" de regiões para então restrigir o problema ao complementar e aplicar o Teorema da Transversalidade nesse novo conjunto de regiões. Essa mesma situação ocorre frequentemente em nossos problemas. No caso presente a "situação excepcional" é caracterizada pela existência de autofunções u e v do problema satisfazendo a propriedade adicional $\Delta u \Delta v \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Para mostrar que esta situação é realmente "excepcional" consideramos a aplicação

$$Q : H^4 \cap H_0^2(\Omega)^2 \times \mathbb{R} \times \text{Diff}^4(\Omega) \quad \to \quad L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$Q(u, v, \lambda, h) \quad = \quad \left(h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u, h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}v, \left\{h^*\Delta h^{*-1}uh^*\Delta h^{*-1}v\right\}\Big|_{\partial\Omega}\right)$$

e então utilizamos a condição $2(\beta)$ do Teorema da Transversalidade. Observe que $(u, v, \lambda, h) \in Q^{-1}(0, 0, 0)$ se somente se u, v são autofunções de (2.8) em $h(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u \Delta v \equiv 0$ em $\partial h(\Omega)$. Assim, mostraremos que existe um subconjunto aberto e denso em $\text{Diff}^4(\Omega)$ tal que a restrição de F sobre este conjunto possui zero como valor regular, provando o resultado.

Observação 17 *Sem perda de generalidade podemos trabalhar com regiões C^5-regulares em vez de C^4-regulares. De fato, pelo Corolário 14 temos que $\mathcal{D}_M$ é um subconjunto aberto de $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ para todo $M \in \mathbb{N}$. Se conseguirmos provar que tal subconjunto é também denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ obtemos o resultado tomando interseção com M variando em $\mathbb{N}$. Precisamos provar então a densidade de tal subconjunto. Agora, para provar tal densidade podemos trabalhar com regiões de regularidade maior (por exemplo C^∞) já que regiões de classe C^4 podem ser aproximadadas por regiões de classe C^k com $k \geq 5$.*

Para provar a excepcionalidade da propriedade acima precisamos do seguinte resultado:

Lema 18 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular com $n \geq 2$ e $J \subset \partial\Omega$ um subconjunto aberto não vazio. Considere a aplicação diferenciável*

$$G : B_M \times [-M, 0] \times \mathrm{Diff}^5(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(J)$$

definida por

$$G(u, \lambda, h) = \Big(h^*(\Delta^2 + \lambda) h^{*-1} u, h^* \Delta h^{*-1} u \Big|_J \Big)$$

onde $B_M = \{u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$. Então o subconjunto

$$C_M^J = \{h \in \mathrm{Diff}^5(\Omega) \mid (0,0) \in G(B_M \times [-M, 0], h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$.

Prova. Aplicaremos o Teorema da Transversalidade para G. Observe que a G é analítica em h pela seção 1.2 e linear, portanto analítica nas outras variáveis.

Inicialmente mostraremos que a aplicação $(u, \lambda, h) \to h : G^{-1}(0,0) \to \mathrm{Diff}^5(\Omega)$ é própria, verificando a hipótese (3) do teorema e obtendo que C_M^J é fechado. Para isto seja $\{(u_n, \lambda_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G^{-1}(0,0)$ com $h_n \to h_0 = i_\Omega$ [o caso geral é análogo]. Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_M$ e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [-M, 0]$ passando a subsequência existe pela compacidade $u \in H_0^2(\Omega)$ e $\lambda \in [-M, 0]$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^2(\Omega)$ e $\lambda_n \to \lambda$ em $[-M, 0]$. Na demonstração do Lema 12 obtivemos que $h^* \Delta^2 h^{*-1} u = \Delta^2 u + L^h u$ para todo $h \in \mathrm{Diff}^5(\Omega)$. Assim temos que para todo $v \in H_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v\{h_n^*(\Delta^2 + \lambda_n) h_n^{*-1} u_n\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v\{(\Delta^2 + \lambda_n) u_n + L^{h_n} u_n\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\int_\Omega \Delta v \Delta u_n + \int_\Omega v\{\lambda_n u_n + L^{h_n} u_n\} \Big] \\
&= \int_\Omega \{\Delta v \Delta u + \lambda v u\}
\end{aligned}$$

já que $u_n \to u$ em $H_0^2(\Omega)$, $\lambda_n \to \lambda$ em $[-M,0]$, $h_n \to i_\Omega$ em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega v L^{h_n} u_n \Big| &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|L^{h_n} u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M\epsilon(h_n)\|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

com $\lim_{n\to\infty} \epsilon(h_n) = 0$ (ver (2.6)). Então, u é solução fraca, portanto forte, de (2.8). Mostraremos agora que u_n converge para u em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$. De fato, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= h_n^*(\Delta^2 + \lambda_n) h_n^{*\,-1} u_n - h_m^*(\Delta^2 + \lambda_m) h_m^{*\,-1} u_m \\ &= \Delta^2(u_n - u_m) + L^{h_n}(u_n - u_m) + (L^{h_n} - L^{h_m}) u_m \\ &\quad + \lambda_n(u_n - u_m) + (\lambda_n - \lambda_m) u_m \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \|\Delta^2(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} &= \|L^{h_n}(u_n - u_m) + (L^{h_n} - L^{h_m}) u_m \\ &\quad + \lambda_n(u_n - u_m) + (\lambda_n - \lambda_m) u_m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\{u_n\} \subset B_M$, $u_n \to u$ em $H_0^2(\Omega)$, $\lambda_n \to \lambda$ em $[-M, 0]$, $h_n \to i_\Omega$ em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ quando $n \to +\infty$ e $\|L^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon(h)\|u\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)}$ com $\lim_{h \to i_\Omega} \epsilon(h) = 0$ temos por (2.14) que

$$\|\Delta^2(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n, m \to +\infty. \tag{2.15}$$

Assim, como Δ^2 de $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é um isomofismo, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\|\Delta^2(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} \geq c_0 \|u_n - u_m\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)},$$

obtendo por (2.15) que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ para $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ provando que a aplicação $(u, \lambda, h) \to h : G^{-1}(0,0) \to \mathrm{Diff}^5(\Omega)$ é própria.

Seja $(u, \lambda, h) \in G^{-1}(0, 0)$. Como argumentamos em 1.2.2, podemos supor que $h = i_\Omega$. A derivada parcial $\partial G/\partial(u, \lambda)(u, \lambda, i_\Omega)$ definida de $H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ em $L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(J)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}) &= \Big(\frac{\partial G_1}{\partial u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}), \frac{\partial G_2}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}) \Big) \\ &= \Big((\Delta^2 + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda} u, \Delta \dot{u}|_J \Big). \end{aligned}$$

Agora, $DG(u, \lambda, i_\Omega)$ definida de $H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em $L^2(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}}(J)$ é dada por

$$\begin{aligned} & DG(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \\ &= \Big(DG_1(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}), DG_2(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \Big) \\ &= \Big((\Delta^2 + \lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} u, \Big\{ \Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \frac{\partial \Delta u}{\partial N} \dot{h} \cdot N \Big\} \Big|_J \Big). \end{aligned}$$

De fato, pelo Teorema 6 temos que

$$\begin{aligned} DG_1(u,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot\lambda,\dot h) &= (\Delta^2+\lambda)\dot u + [\dot h\cdot\nabla,(\Delta^2+\lambda)]u + \dot\lambda u \\ &= (\Delta^2+\lambda)(\dot u - \dot h\cdot\nabla u) + \dot\lambda u + \dot h\cdot\nabla[(\Delta^2+\lambda)u] \\ &= (\Delta^2+\lambda)(\dot u - \dot h\cdot\nabla u) + \dot\lambda u \end{aligned}$$

já que $(\Delta^2+\lambda)u = 0$ em Ω e

$$\begin{aligned} DG_2(u,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot\lambda,\dot h) &= \left\{\Delta(\dot u - \dot h\cdot\nabla u) + \dot h\cdot\nabla(\Delta u)\right\}\Big|_J \\ &= \left\{\Delta(\dot u - \dot h\cdot\nabla u) + \dot h\cdot N\frac{\partial\Delta u}{\partial N}\right\}\Big|_J \end{aligned}$$

já que $\Delta u|_J \equiv 0$. Observe que a escolha de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ C^5-regular nos garante que $u \in H^5(\Omega)$ (veja por exemplo [13]) e daí que $\dot h\cdot\nabla u \in H^4(\Omega)$.

Pela propriedade 3 para operadores semi-Fredholm enunciada na seção 1.3, basta verificarmos que

$$T_1 = \frac{\partial G_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega) : H^4\cap H_0^2(\Omega)\times\mathbb{R} \to L^2(\Omega)$$

é um operador Fredholm para concluirmos que a hipótese (1) do Teorema da Transversalidade é satisfeita pela aplicação G. Para isto, observe primeiro que a codimensão da imagem de T_1 é finita e que portanto $\mathcal{R}(T_1)$ é fechada em $L^2(\Omega)$. De fato, T_1 restrito a $\{(\dot u,0) \mid \dot u \in H^4\cap H_0^2(\Omega)\}$ coincide com o operador Fredholm de índice zero

$$(\Delta^2+\lambda) : H^4\cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

Agora, como

$$T_1(\dot u,\dot\lambda) = 0 \iff (\Delta^2+\lambda)\dot u + \dot\lambda u = 0$$

temos que, se $(\dot u,\dot\lambda) \in \mathcal{N}(T_1)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \{u(\Delta^2+\lambda)\dot u + \dot\lambda u^2\} \\ &= \int_\Omega \dot\lambda u^2 \end{aligned}$$

de onde obtemos que $\dot\lambda = 0$. Logo

$$(\Delta^2+\lambda)\dot u = 0 \Rightarrow \dot u \in \mathcal{N}(\Delta^2+\lambda).$$

Assim

$$\mathcal{N}(T_1) = \{(\dot u,0) \mid \dot u \in \mathcal{N}(\Delta^2+\lambda)\}$$

é um subespaço de dimensão finita, de onde podemos concluir que T_1 é um operador Fredholm.

Provaremos agora a hipótese (2β), ou seja, mostraremos que

$$\dim\left\{\frac{\mathcal{R}(DG(u,\lambda,i_\Omega))}{\mathcal{R}(\frac{\partial G}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega))}\right\}=\infty.$$

Suponha por absurdo que isto não é verdade. Então, existem $\theta_1,...,\theta_m\in L^2(\Omega)\times H^{\frac{3}{2}}(J)$ tal que para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ e $\dot{u},\dot{\lambda}\in H^4\cap H_0^2(\Omega)\times\mathbb{R}$ existem $\dot{v},\dot{\mu}\in H^4\cap H_0^2(\Omega)\times\mathbb{R}$ e escalares $c_1,...,c_m$ tal que

$$DG(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h})=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j+\frac{\partial G}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{v},\dot{\mu}),$$

ou

$$DG(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u}-\dot{v},\dot{\lambda}-\dot{\mu},\dot{h})=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j,\quad \theta_j=(\theta_j^1,\theta_j^2).$$

Em particular temos que para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ existem $\dot{u},\dot{\lambda}\in H^4\cap H_0^2(\Omega)\times\mathbb{R}$ e escalares $c_1,...,c_m$ tal que

$$DG(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h})=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j,$$

ou seja,

$$\Big((\Delta^2+\lambda)(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{\lambda}u,\Delta(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\frac{\partial\Delta u}{\partial N}\dot{h}\cdot N\Big)=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j. \tag{2.16}$$

Consideremos o operador

$$\mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}:L^2(\Omega)\to H^4\cap H_0^2(\Omega)$$

definido por

$$v=\mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}f \text{ se } (\Delta^2+\lambda)v-f\in\mathcal{N}(\Delta^2+\lambda), v\perp\mathcal{N}(\Delta^2+\lambda).$$

Mostraremos na seção 4.1 que $\mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}$ está bem definido.

Observe que em $\partial\Omega$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u) &= \frac{\partial}{\partial N}\Big(\dot{h}\cdot N\frac{\partial u}{\partial N}\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot N)\frac{\partial u}{\partial N}+\dot{h}\cdot N\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\\ &= \dot{h}\cdot N\Delta u\end{aligned}$$

já que $u\in H_0^2(\Omega)$ e pela Observação 3 $\Delta u|_{\partial\Omega}=\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big|_{\partial\Omega}$. Assim, se escolhermos $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ identicamente nula em $\partial\Omega-J$ obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)=0 \text{ em } \partial\Omega,$$

ou seja, obtemos que $\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$.

Por outro lado, existe uma única solução σ de

$$(\Delta^2 + \lambda)\sigma - \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i \in \mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda) \text{ com } \sigma \perp \mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda)$$

de fato, $\sigma = \mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}(\sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i)$. Como $\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u$ resolve a mesma equação temos que $\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u - \sigma \in \mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda)$, ou seja,

$$\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{l} \xi_j u_j + \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}\theta_j \tag{2.17}$$

onde $\{u_1, ..., u_l\}$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$ para o $\mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda)$. Em outras palavras, podemos resolver a primeira coordenada da equação (2.16) módulo o subespaço de dimensão finita $\mathcal{N}(\mathcal{S}_{\Delta^2+\lambda}) = \mathcal{N}(\Delta^2 + \lambda)$ já que $\Delta u|_J = 0$. Substituindo (2.17) na segunda coordenada de (2.16) obtemos que

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial N} \dot{h} \cdot N \Big|_J$$

pertence a um subespaço de dimensão finita. Mas isto só é possivel, no caso $\dim \Omega \geq 2$, se

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial N}\Big|_J \equiv 0. \tag{2.18}$$

Assim, a solução u satisfaz as condições do Teorema 4 de onde obtemos que $u \equiv 0$. Como $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) - \{0\}$ temos uma contradição, o que prova o resultado.

∎

Observação 19 *O Lema 18 pode ser visto como a demonstração de que genericamente no conjunto das regiões temos unicidade para o problema*

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda)u & = 0 \text{ em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} & = 0 \text{ em } J. \end{cases}$$

O próximo resultado mostra que a existência de duas autofunções u, v com $\Delta u \Delta v \equiv 0$ é de fato "excepcional".

Lema 20 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular com $n \geq 2$. Considere a aplicação diferenciável*

$$Q : B_M \times B_M \times [-M, 0] \times D_M \quad \rightarrow \quad L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$Q(u, v, \lambda, h) \quad = \quad \left(h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u, h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}v, \left\{ h^*\Delta h^{*-1}u h^*\Delta h^{*-1}v \right\}\Big|_{\partial\Omega} \right)$$

onde $B_M = \{u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$ *e* $D_M = \mathrm{Diff}^5(\Omega) - C_M^{\partial\Omega}$*. [*$C_M^{\partial\Omega}$ *é o conjunto magro e fechado cuja existência é garantida pelo Lema 18]. Então o subconjunto*

$$E_M = \{h \in D_M \mid (0,0,0) \in Q(B_M \times B_M \times [-M,0], h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$*.*

Prova. Aplicaremos o Teorema da Transversalidade para Q.

A hipótese (3) do teorema pode ser verificada como na demonstração do Lema 18, de fato, a verificação de tal hipótese segue basicamente da compacidade de B_M e $[-M,0]$ em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ e $\mathbb{R}$ respectivamente e do fato de todos os espaços envolvidos serem separáveis.

Seja $(u,v,\lambda,h) \in Q^{-1}(0,0,0)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $h = i_\Omega$. A derivada parcial $\partial Q(u,v,\lambda,i_\Omega)/\partial(u,v,\lambda)$ definida de $H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot) \;=\; & \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot), \frac{\partial Q_2}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot), \\ & \frac{\partial Q_3}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}) &= (\Delta^2+\lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u \\ \frac{\partial Q_2}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}) &= (\Delta^2+\lambda)\dot{v} + \dot{\lambda}v \\ \frac{\partial Q_3}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}) &= \Big\{\Delta u\Delta\dot{v} + \Delta v\Delta\dot{u}\Big\}\Big|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Agora, $DQ(u,v,\lambda,i_\Omega)$ definida de $H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\Omega) \times \times L^2(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ pode ser calculada como no Lema 18 e é dada por

$$\begin{aligned}DQ(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot) \;=\; & \Big(DQ_1(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot), DQ_2(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot), \\ & DQ_3(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DQ_1(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{h}) &= (\Delta^2+\lambda)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u) + \dot{\lambda}u \\ DQ_2(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{h}) &= (\Delta^2+\lambda)(\dot{v} - \dot{h}\cdot\nabla v) + \dot{\lambda}v \\ DQ_3(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{h}) &= \Big\{\Delta u\Big[\Delta(\dot{v} - \dot{h}\cdot\nabla v) + \dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big] \\ &\quad + \Delta v\Big[\Delta(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u) + \dot{h}\cdot\nabla(\Delta u)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Observe que a hipótese (1) do Teorema da Transversalidade é facilmente verificada já que o operador $\frac{\partial Q_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)$ é um operador Fredholm.

Provaremos então a hipótese (2β), ou seja, mostraremos que

$$\dim\left\{\frac{\mathcal{R}(DQ(u,v,\lambda,i_\Omega))}{\mathcal{R}(\frac{\partial Q}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega))}\right\}=\infty.$$

Suponha por absurdo que isso não é verdade. Então, argumentando como no Lema 18, existem $\theta_1,...,\theta_m \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(\partial\Omega)$ tal que para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ existem $\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda}$ e escalares $c_1,...,c_m$ tal que

$$DQ(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{v},\dot{\lambda},\dot{h})=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j,\quad \theta_j=(\theta_j^1,\theta_j^2,\theta_j^3),$$

ou seja,

$$(\Delta^2+\lambda)(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{\lambda}u=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j^1 \tag{2.19}$$

$$(\Delta^2+\lambda)(\dot{v}-\dot{h}\cdot\nabla v)+\dot{\lambda}v=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j^2 \tag{2.20}$$

$$\left\{\Delta u\Big[\Delta(\dot{v}-\dot{h}\cdot\nabla v)+\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big]+\Delta v\Big[\Delta(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{h}\cdot\nabla(\Delta u)\Big]\right\}\Big|_{\partial\Omega}=\sum_{j=1}^m c_j\theta_j^3. \tag{2.21}$$

Seja $\{u_1,...,u_p\}$ base ortonormal em $L^2(\Omega)$ para as autofunções de (2.8) associadas ao autovalor λ e considere os seguintes operadores lineares

$$\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}:L^2(\Omega)\to H^4\cap H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}:H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega)\to H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$$

definidos por

$$w=\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}f+\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}g\in H^4\cap H_0^1(\Omega)$$

se

$$(\Delta^2+\lambda)w-f\in[u_1,...,u_p],$$

$$w\perp[u_1,...,u_p] \text{ e } \frac{\partial w}{\partial N}=g \text{ em } \partial\Omega.$$

[Na seção 4.1 mostraremos que tais operadores estão bem definidos.]

Assim, das equações (2.19) e (2.20) obtemos que

$$\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u=\sum_{j=1}^p\xi_j u_j+\sum_{j=1}^m c_j\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}\theta_j^1-\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta u\Big) \tag{2.22}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)|_{\partial\Omega}=-\dot{h}\cdot N\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}|_{\partial\Omega}=-\dot{h}\cdot N\Delta u|_{\partial\Omega}$ e

$$\dot{v}-\dot{h}\cdot\nabla v=\sum_{j=1}^l\eta_i u_i+\sum_{j=1}^m c_j\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}\theta_j^2-\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta v\Big) \tag{2.23}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{v} - \dot{h}\cdot\nabla v)|_{\partial\Omega} = -\dot{h}\cdot N\frac{\partial^2 v}{\partial N^2}|_{\partial\Omega} = -\dot{h}\cdot N\Delta v|_{\partial\Omega}$.

Substituindo (2.22) e (2.23) na equação (2.21) temos que

$$\Big\{\Delta u\Big[\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)-\Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta v\Big)\Big)\Big]+\Delta v\Big[\dot{h}\cdot\nabla(\Delta u)-\Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta u\Big)\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \tag{2.24}$$

pertence a um subsepaço de dimensão finita para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Como $i_\Omega \in D_M = \text{Diff}^5(\Omega) - C_M^{\partial\Omega}$ temos pelo Lema 18 que Δu não é identicamente nulo em $\partial\Omega$. Assim, o aberto $U = \{x\in\partial\Omega \mid \Delta u \neq 0\}$ de $\partial\Omega$ é não vazio e como $\Delta u\Delta v\equiv 0$ em $\partial\Omega$ temos que $\Delta v \equiv 0$ em U.

Escolha $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\dot{h}\equiv 0$ em $\partial\Omega - U$. Nessas condições (2.24) implica que

$$\Big\{\Delta u\Big(\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big) - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta u\Big)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \tag{2.25}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para todo $\dot{h}$ nas condições acima. De fato, para tais escolhas de $\dot{h}$ temos

$$\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta v\Big) = \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(0)$$

que pertence a um subespaço de dimensão finita e

$$\Delta v\Big(\dot{h}\cdot\nabla(\Delta u)\Big) \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Observe agora que

$$\Big\{\Delta u\Big(\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big) - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h}\cdot N\Delta u\Big)\Big)\Big\}\Big|_U = \Delta u\Big(\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big)\Big|_U.$$

Logo, pela equação (2.25) obtemos que a aplicação

$$\Sigma : \dot{h} \to \Delta u\Big(\dot{h}\cdot\nabla(\Delta v)\Big)\Big|_U$$

definida para $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\dot{h}\equiv 0$ em $\partial\Omega - U$ possui posto finito. Como $\Delta u \neq 0$ em U, isso só é possível [no caso $\dim\Omega \geq 2$] quando $\nabla(\Delta v)\equiv 0$ em $U\subset\partial\Omega$. Como $\Delta v\equiv 0$ em U, temos

$$\frac{\partial\Delta v}{\partial N} = \nabla(\Delta v) \equiv 0 \text{ em } U.$$

Assim obtemos que a autofunção v de (2.8) satisfaz

$$\Delta v = \frac{\partial \Delta v}{\partial N} = 0 \text{ em } U,$$

ou seja, v satisfaz as hipóteses do Teorema 4, e portanto $v\equiv 0$ em Ω, de onde obtemos uma contradição provando o resultado.

∎

Teorema 21 *O conjunto*

$$\{h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega) \mid \text{ todos os autovalores de (2.8) em } h(\Omega) \text{ são simples } \}$$

é residual em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$.

Prova. Conforme argumentamos na Observação 17 podemos supor que a região Ω é C^5-regular. Considere a aplicação

$$F : B_M \times [-M, 0] \times U_M \to L^2(\Omega)$$

definida por

$$F(u, \lambda, h) = h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u$$

onde $U_M = D_M - E_M$. D_M é o complementar do subconjunto magro e fachado do Lema 18 e E_M é o subconjunto magro e fechado do Lema 20. Observe que U_M é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Mostraremos, através do Teorema da Transversalidade, que o subconjunto

$$\{h \in U_M \mid (u, \lambda) \to F(u, \lambda, h) \text{ não tem 0 como valor regular } \}$$

é magro e fechado em U_M. Assim, tomando a interseção do complementar desse conjunto com M variando em $\mathbb{N}$ obteremos pelo Teorema de Baire e pela Proposição 16 que todos os autovalores de (2.8) são genericamente simples em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$.

As hipóteses (1) e (3) do Teorema da Transversalidade são imediatas. Basta, portanto, verificar a hipótese (2α).

Suponha por absurdo que exista $(u, \lambda, h) \in B_M \times [-M, 0] \times U_M$, $F(u, \lambda, h) = 0$ ponto crítico de F. Sem perda de generalidade podemos supor que $h = i_\Omega$. Então, existe $\psi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$< DF(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}), \psi >= 0 \tag{2.26}$$

para todo $(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ onde $DF(u, \lambda, i_\Omega) : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)$ é dada por

$$DF(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \;\;=\;\; (\Delta^2 + \lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} u.$$

Fazendo $\dot{\lambda} = \dot{h} = 0$ em (2.26) temos que

$$\int_\Omega \psi(\Delta^2 + \lambda)\dot{u} = 0 \;\; \forall \dot{u} \in H^4 \cap H_0^2(\Omega),$$

ou seja, $\psi \in \mathcal{R}(\Delta^2+\lambda)^{\perp} = \mathcal{N}(\Delta^2+\lambda)$. Assim, como $\partial\Omega$ é de classe C^5 temos que $\psi \in H^5(\Omega)\cap C^{4,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha>0$ e satisfaz

$$\begin{aligned} (\Delta^2+\lambda)\psi &= 0 \text{ em } \Omega \\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial N} &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Se $\dot{h} = \dot{u} = 0$ e $\dot{\lambda}$ varia em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\int_\Omega u\psi = 0.$$

Tomando agora $\dot{\lambda} = \dot{u} = 0$ e fazendo $\dot{h}$ variar em $C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \psi(\Delta^2+\lambda)(\dot{h}\cdot\nabla u) \\ &= \int_\Omega \{(\dot{h}\cdot\nabla u)(\Delta^2+\lambda)\psi - \psi(\Delta^2+\lambda)(\dot{h}\cdot\nabla u)\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \{(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\psi) - \Delta\psi\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u) - \psi\frac{\partial}{\partial N}(\Delta(\dot{h}\cdot\nabla u)) + \Delta(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial\psi}{\partial N}\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \{(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\psi) - \Delta\psi\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u)\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \{\dot{h}\cdot N\frac{\partial\Delta\psi}{\partial N}\frac{\partial u}{\partial N} - \Delta\psi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\dot{h}\cdot N\frac{\partial u}{\partial N}\Big)\} \\ &= -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\Delta\psi\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \quad \forall \dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\Delta\psi\Delta u = 0 \quad \forall\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$$

já que $\Delta u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}|_{\partial\Omega}$, implicando que

$$\Delta\psi\Delta u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Mas $i_\Omega \in U_M$, de onde obtemos uma contradição em vista da definição de U_M e do Lema 20.

∎

2.4 Simplicidade genérica dos autovalores em regiões simétricas

Considere o seguinte subgrupo Γ do grupo ortogonal $O(n)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2$:

$$\Gamma = \{1, g\} \text{ onde } g \neq 1 \text{ e } g^2 = 1,$$

ou seja, g é a rotação de π em torno de um eixo ou uma reflexão em relação a um hiperplano. Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é Γ-simétrica ou Γ-invariante ou simplesmente simétrica ou invariante se $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in \Gamma$.

Estudaremos nesta seção a simplicidade genérica dos autovalores de (2.8) em regiões simétricas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ invariantes por Γ. A topologia considerada aqui é a restrição da topologia definida na seção 2.3 para regiões simétricas, ou seja, regiões invariantes por Γ.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^k-regular, $k \geq 4$, Γ-simétrica e

$$\mathrm{Diff}^k_g(\Omega) = \{h \in \mathrm{Diff}^k(\Omega) \mid h(gx) = gh(x) \text{ para todo } x \in \Omega\}.$$

[Observe que se Ω é uma região invariante então $h(\Omega)$ também o é.]

Nesta seção mostraremos que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, C^4-regulares, abertas, conexas, limitadas, invariantes por Γ, todos os autovalores do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano são simples. Para isso, mostraremos que existe um subconjunto residual de $h \in \mathrm{Diff}^k_g(\Omega)$ tal que todos os autovalores de (2.8) em $h(\Omega)$ são simples. Como $u \circ g$ é autofunção se u o é com $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u \circ g\|_{L^2(\Omega)}$ temos que se todos os autovalores de (2.8) são simples em $h(\Omega)$, então toda autofunção u deste problema é par $(u \circ g = u)$ ou ímpar $(u \circ g = -u)$ em $h(\Omega)$.

É importante observar que o mesmo resultado não vale se considerarmos outros tipos de simetrias. Nesse caso, pode-se mostrar como Antônio L. Pereira em [22], a existência de autovalores múltiplos em qualquer região simétrica (exceto o caso $\mathbb{Z}_2$).

Proposição 22 *Sejam*

$$L^2(\Omega)^{par} = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \circ g = u \text{ em } \Omega\} \text{ e}$$

$$L^2(\Omega)^{impar} = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \circ g = -u \text{ em } \Omega\}.$$

Então $L^2(\Omega) = L^2(\Omega)^{par} \oplus L^2(\Omega)^{impar}$ *como soma ortogonal.*

Prova. De fato, dado $u \in L^2(\Omega)$ temos que $u = u_e + u_o$ onde $u_e = \frac{1}{2}(u + u \circ g) \in L^2(\Omega)^{par}$ e $u_o = \frac{1}{2}(u - u \circ g) \in L^2(\Omega)^{impar}$. Se $u_e \in L^2(\Omega)^{par}$ e $v_o \in L^2(\Omega)^{impar}$ temos que $\int_\Omega u_e v_o = 0$ já que $u_e v_o \in L^2(\Omega)^{impar}$. Assim temos que a interseção dos subespaços $L^2(\Omega)^{par}$ e $L^2(\Omega)^{impar}$ é o subespaço nulo, tais espaços são ortogonais e além disso temos que $\int_\Omega u^2 = \int_\Omega u_e^2 + \int_\Omega u_o^2$. ∎

Como o Bilaplaciano comuta com o grupo ortogonal (veja por exemplo [21]) temos que os subsepaços $H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{par} = \{H^4 \cap H^2_0(\Omega)\} \cap L^2(\Omega)^{par}$ e $H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{impar} = \{H^4 \cap H^2_0(\Omega)\} \cap L^2(\Omega)^{impar}$ são invariantes para esse operador.

Para obtermos nosso resultado de genericidade procederemos da seguinte forma: mostraremos separadamente em cada subespaço (par e ímpar) que, genericamente no conjunto das regiões Γ-simétricas, todos os autovalores de (2.8) são simples. Posteriormente mostraremos que cada autovalor múltiplio de (2.8) deve bifurcar em autovalores simples por pequenas perturbações simétricas. De fato, provaremos que se isto não ocorresse existiriam duas autofunções u e v de (2.8), par e ímpar respectivamente, satisfazendo

$$(\Delta u)^2 = (\Delta v)^2 \text{ em } \partial\Omega.$$

Mas tal propriedade (como veremos) é "excepcional".

Para provarmos a simplicidade genérica de todos os autovalores nos subespaços par e ímpar precisamos de resultados análogos aos Lemas 18 e 20. De fato, tais resultados valem trocando B_M por

$$B_M^{par} = \{u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)^{par} - \{0\} \mid \|u\| \leq M\},$$

e $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$ por $\mathrm{Diff}_g^5(\Omega)$. A única diferença nas demonstrações é na escolha dos $\dot{h}$ em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Na prova dos Lemas 18 e 20 escolhemos $\dot{h}$ identicamente nula em $\partial\Omega - U$ onde U é um subconjunto aberto de $\partial\Omega$. Agora se faz necessária a escolha de $\dot{h}$ identicamente nula em $\partial\Omega - \{U \cup gU\}$ pois as funções $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ devem satisfazer também $\dot{h}(gx) = g\dot{h}(x)$ em Ω. Tais escolhas de $\dot{h}$ não modificam o restante da demonstração já que $u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)^{par}$ satisfaz $\Delta u|_U = 0$ se e somente se $\Delta u|_{gU} = 0$.

Assim, as provas dos Lemas 23 e 24 seguem de perto a demonstração dos Lemas 18 e 20 respectivamente.

Lema 23 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular com $g\Omega = \Omega$, $n \geq 2$ e $J \subset \partial\Omega$ um subconjunto aberto não vazio. Considere a aplicação diferenciável*

$$G : B_M^{par} \times [-M, 0] \times \mathrm{Diff}_g^5(\Omega) \to L^2(\Omega)^{par} \times H^{\frac{3}{2}}(J)$$

definida por

$$G(u, \lambda, h) = \left(h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u, h^*\Delta h^{*-1}u\Big|_J\right)$$

onde $B_M^{par} = \{u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)^{par} - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$. Então o subconjunto

$$C_{g,M}^J = \{h \in \mathrm{Diff}_g^5(\Omega) \mid (0,0) \in G(B_M^{par} \times [-M, 0], h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}_g^5(\Omega)$.

Lema 24 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular com $g\Omega = \Omega$ e $n \geq 2$. Considere a aplicação diferenciável*

$$Q : B_M^{par} \times B_M^{par} \times [-M, 0] \times D_M^g \quad \to \quad L^2(\Omega)^{par} \times L^2(\Omega)^{par} \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$Q(u,v,\lambda,h) \;=\; \left(h^*(\Delta^2+\lambda)h^{*-1}u, h^*(\Delta^2+\lambda)h^{*-1}v, \left\{h^*\Delta h^{*-1}uh^*\Delta h^{*-1}v\right\}\Big|_{\partial\Omega}\right)$$

onde $D^g_M = \mathrm{Diff}^5_g(\Omega) - C^{\partial\Omega}_{g,M}$ *[*$C^{\partial\Omega}_{g,M}$ *é o subconjunto magro e fechado do Lema 23]. Então o subconjunto*

$$E^g_M = \{h \in D^g_M \mid (0,0,0) \in Q(B^{par}_M \times B^{par}_M \times [-M,0], h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5_g(\Omega)$*.*

Observação 25 *Resultados análogos aos Lemas 23 e 24 podem ser provados da mesma maneira trocando* B^{par}_M *por*

$$B^{impar}_M = \{u \in H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{impar} - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$$

e consequentemente os espaços de chegada.

Teorema 26 *O subconjuto*

$$\begin{aligned}&\{h \in \mathrm{Diff}^4_g(\Omega) \mid \text{ todos os autovalores de (2.8) em } H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{par} \\ &\text{[respectivamente } H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{impar}\text{] são simples em } h(\Omega)\}\end{aligned}$$

é residual em $\mathrm{Diff}^4_g(\Omega)$*.*

Prova. Vamos considerar aqui apenas o caso em que as soluções da equação (2.8) se encontram em $H^4 \cap H^2_0(\Omega)^{par}$, o caso ímpar é análogo. Considere a aplicação diferenciável

$$F : B^{par}_M \times [-M,0] \times U^g_M \to L^2(\Omega)^{par}$$

definida por

$$F(u,\lambda,h) = h^*(\Delta^2+\lambda)h^{*-1}u$$

onde $U^g_M = D^g_M - E^g_M$. D^g_M é o complementar do subconjunto magro e fechado definido no Lema 23 e E^g_M é o subconjunto magro e fechado do Lema 24. Observe que U^g_M é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^5_g(\Omega)$. Mostraremos, através do Teorema da Transversalidade, que o subconjunto

$$\{h \in U^g_M \;\mid\; (u,\lambda) \to F(u,\lambda,h) \text{ não tem 0 como valor regular }\}$$

é magro e fechado em U^g_M. Assim, tomando a interseção do complementar desse conjunto com M variando em $\mathbb{N}$ obteremos pelo Teorema de Baire e pela Proposição (16) que todos os autovalores de (2.8) são genericamente simples em $\mathrm{Diff}^5_g(\Omega)$.

As hipóteses (1) e (3) do Teorema da Transversalidade são imediatas. Basta então verificar a hipótese (2α).

Argumentando por contradição, obtemos como na prova do Teorema 21 a existência de duas autofunções pares não nulas u e $\psi \in H^5 \cap H_0^2(\Omega)$ de (2.8) satisfazendo

$$\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \Delta u \Delta \psi = 0 \tag{2.27}$$

para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $\dot{h}(gx) = g\dot{h}(x)$ em Ω. Agora, pelo Lema 27 abaixo podemos aproximar a função par $\Delta u \Delta \psi$ por funções pares do tipo $\dot{h} \cdot N$ em $L^1(\partial\Omega)$. Assim, (2.27) implica que

$$\Delta u \Delta \psi \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

mas $i_\Omega \in U_M^g$, de onde obtemos uma contradição.

Observe que no caso em que ambas as autofunções são ímpares o produto $\Delta u \Delta \psi$ é ainda uma função par. ∎

Lema 27 *Seja $g^2 = I, g \neq I, g(\Omega) = \Omega$ e seja $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ um função contínua par ($f \circ g = f$).*

Então existe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ com $V(gx) = gV(x)$ em quase todo ponto de Ω tal que $V \cdot N|_{\partial\Omega}$ está uniformemente próximo a f. Se $f \in L^p(\partial\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, podemos aproximá-la em $L^p(\partial\Omega)$.

Prova. Ver [5]. ∎

O próximo lema mostra que a existência de duas autofunções u e v de (2.8), par e ímpar respectivamente, satisfazendo $(\Delta u)^2 = (\Delta v)^2$ em $\partial\Omega$ é "excepcional" em $\mathrm{Diff}_g^5(\Omega)$.

Lema 28 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular. Considere a aplicação diferenciável*

$$G : B_M^1 \times B_M^2 \times [-M, 0] \times Z_M^g \quad \to \quad L^2(\Omega)^{par} \times L^2(\Omega)^{impar} \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$G(u, v, \lambda, h) \quad = \quad \left(h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}u, h^*(\Delta^2 + \lambda)h^{*-1}v, \left\{(h^*\Delta h^{*-1}u)^2 - (h^*\Delta h^{*-1}v)^2\right\}\Big|_{\partial\Omega}\right)$$

onde $Z_M^g = \mathrm{Diff}_g^5(\Omega) - C_{g,M}^{\partial\Omega}$, $B_M^1 = \{u \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)^{par} - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$ e $B_M^2 = \{v \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)^{impar} - \{0\} \mid \|v\| \leq M\}$. Então o subconjunto

$$O_M^g = \{h \in Z_M^g \mid (0, 0, 0) \in G(B_M^1 \times B_M^2 \times [-M, 0], h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}_g^5(\Omega)$.

Prova. Aplicaremos o Teorema da Transversalidade.

A verificação da hipótese (3) do teorema é feita como na demonstração do Lema 18 usando a compacidade de B_M^1, B_M^2 e $[-M,0]$ em $H^4\cap H_0^2(\Omega)^{par}$, $H^4\cap H_0^2(\Omega)^{impar}$ e $\mathbb{R}$ respectivamente e pelo fato de todos os espaços envolvidos serem separáveis.

Seja $(u,v,\lambda,h)\in G^{-1}(0,0,0)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $h=i_\Omega$. A derivada parcial $\partial G(u,v,\lambda,i_\Omega)/\partial(u,v,\lambda)$ definida de $H^4\cap H_0^2(\Omega)^{par}\times H^4\cap H_0^2(\Omega)^{impar}\times\mathbb{R}$ em $L^2(\Omega)^{par}\times L^2(\Omega)^{impar}\times L^1(\partial\Omega)$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot) &= \Big(\frac{\partial G_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot),\frac{\partial G_2}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot),\\ &\quad\frac{\partial G_3}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda) &= (\Delta^2+\lambda)\dot u+\dot\lambda u\\ \frac{\partial G_2}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda) &= (\Delta^2+\lambda)\dot v+\dot\lambda v\\ \frac{\partial G_3}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda) &= 2\Big\{\Delta u\Delta\dot u-\Delta v\Delta\dot v\Big\}\Big|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Agora, $DG(u,v,\lambda,i_\Omega)$ pode ser calculada como no Lema 18 e é dada por

$$\begin{aligned}DG(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot) &= \Big(DG_1(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot),DG_2(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot),\\ &\quad DG_3(u,v,\lambda,i_\Omega)(\cdot)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DG_1(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda,\dot h) &= (\Delta^2+\lambda)(\dot u-\dot h\cdot\nabla u)+\dot\lambda u\\ DG_2(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda,\dot h) &= (\Delta^2+\lambda)(\dot v-\dot h\cdot\nabla v)+\dot\lambda v\\ DG_3(u,v,\lambda,i_\Omega)(\dot u,\dot v,\dot\lambda,\dot h) &= 2\Big\{\Delta u\Big[\Delta(\dot u-\dot h\cdot\nabla u)+\dot h\cdot\nabla(\Delta u)\Big]\\ &\quad-\Delta v\Big[\Delta(\dot v-\dot h\cdot\nabla v)+\dot h\cdot\nabla(\Delta v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\\ &= \Big\{\dot h\cdot\nabla\Big((\Delta u)^2-(\Delta v)^2\Big)\\ &\quad+2\Big[\Delta u\Delta(\dot u-\dot h\cdot\nabla u)-\Delta v\Delta(\dot v-\dot h\cdot\nabla v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Observe que a hipótese (1) do Teorema da Transversalidade é facilmente verificada já que o operador $\frac{\partial G_1}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,i_\Omega)$ definido de $H^4\cap H_0^2(\Omega)^{par}\times\mathbb{R}$ em $L^2(\Omega)^{par}$ é Fredholm.

Provaremos então a hipótese (2β), ou seja, mostraremos que

$$\dim\Big\{\frac{\mathcal{R}(DG(u,v,\lambda,i_\Omega))}{\mathcal{R}(\frac{\partial G}{\partial(u,v,\lambda)}(u,v,\lambda,i_\Omega))}\Big\}=\infty.$$

Suponha por absurdo que isso não é verdade. Então, existem $\theta_1, ..., \theta_m \in L^2(\Omega)^{par} \times L^2(\Omega)^{impar} \times L^1(\partial\Omega)$ tal que para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\dot{h}(gx) = g\dot{h}(x)$ existem $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\lambda}$ e escalares $c_1, ..., c_m$ tal que

$$DG(u, v, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \sum_{i=1}^{m} c_j\theta_j, \quad \theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3),$$

ou seja,

$$(\Delta^2 + \lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} u = \sum_{i=1}^{m} c_j\theta_j^1 \tag{2.28}$$

$$(\Delta^2 + \lambda)(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) + \dot{\lambda} v = \sum_{i=1}^{m} c_j\theta_j^2 \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} c_j\theta_j^3 \quad &= \quad \Big\{\dot{h} \cdot \nabla\Big((\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big) \\ &+2\Big[\Delta u\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) - \Delta v\Delta(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Seja $\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_l\}$ base ortonormal em $L^2(\Omega)$ para as autofunções de (2.8) associadas ao autovalor λ sendo $\{u_1, ..., u_p\}$ autofunções pares e $\{v_1, ..., v_l\}$ autofunções ímpares.

Observe que os subespaços par e ímpar de $L^2(\Omega)$ são invariantes pelos seguintes operadores

$$\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda} : L^2(\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda} : H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \to H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

definidos por

$$w = \mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda} f + \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda} g \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

se

$$(\Delta^2 + \lambda)w - f \in [u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_l],$$

$$w \perp [u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_l] \text{ e } \frac{\partial w}{\partial N} = g \text{ em } \partial\Omega.$$

De fato, podemos resolver o problema no subespaço par, por exemplo

$$\mathcal{A}^{par}_{\Delta^2+\lambda} : L^2(\Omega)^{par} \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)^{par}$$

$$\mathcal{C}^{par}_{\Delta^2+\lambda} : H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega)^{par} \to H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^{par}$$

definidos por

$$\tilde{w} = \mathcal{A}^{par}_{\Delta^2+\lambda} f + \mathcal{C}^{par}_{\Delta^2+\lambda} g \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)^{par}$$

se

$$(\Delta^2 + \lambda)\tilde{w} - f \in [u_1, ..., u_p],$$
$$\tilde{w} \perp [u_1, ..., u_p] \text{ e } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial N} = g \text{ em } \partial\Omega$$

obtendo $\tilde{w}$ par. Mas $\tilde{w}$ satisfaz o problema no espaço todo implicando que $\tilde{w} = w$. [Mostraremos na seção 4.1 que tais operadores estão bem definidos.]

Assim, podemos resolver as equações (2.28) e (2.29) módulo o subespaço de dimensão finita $[u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_l]$ obtendo

$$\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda} \theta_j^1 - \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta u\Big) \tag{2.31}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N\Delta u|_{\partial\Omega}$ e

$$\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{l} \xi_i v_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda} \theta_j^2 - \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta v\Big) \tag{2.32}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v)|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \frac{\partial^2 v}{\partial N^2}|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N\Delta v|_{\partial\Omega}$.

Substituindo (2.31) e (2.32) na equação (2.30) temos que

$$\Big\{\dot{h} \cdot \nabla\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big] + 2\Big[\Delta v \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta v\Big)\Big) - \Delta u \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta u\Big)\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}$$

pertence a um subsepaço de dimensão finita para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\dot{h}(gx) = g\dot{h}(x)$.

Como

$$(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2 = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{2.33}$$

podemos concluir que o operador

$$\begin{aligned} \Theta(\dot{h}) \;\; = \;\; & \Big\{\dot{h} \cdot N \frac{\partial}{\partial N}\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big] \\ & +2\Big[\Delta v \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta v\Big)\Big) - \Delta u \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta u\Big)\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \end{aligned} \tag{2.34}$$

definido para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $\dot{h}(gx) = g\dot{h}(x)$ em Ω possui posto finito.

Aparentemente Θ é um operador pseudo-diferencial de primeira ordem em $\dot{h}$ já que o operador

$$\Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N\Delta v\Big)\Big)\Big|_{\partial\Omega}$$

o é.

Agora, como estamos tratando o caso particular $(\Delta u)^2 = (\Delta v)^2$ em $\partial\Omega$ temos pelo Método das Soluções Rapidamente Oscilantes, detalhado na próxima seção, que Θ de fato é um operador de ordem zero. De fato, mostraremos na seção 4.2 que se Θ é um operador de posto finito então é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0. \tag{2.35}$$

Agora, da equação (2.35) obtemos que

$$(\Delta u - \Delta v)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u + \Delta v) + (\Delta u + \Delta v)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u - \Delta v) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{2.36}$$

Como u e v são autofunções par e ímpar respectivamente do Bilaplaciano satisfazendo (2.33) e $i_\Omega \in Z_M^g$ temos pelo Lema 28 que existe um aberto não vazio $U \subset \partial\Omega$ tal que

$$\Delta u - \Delta v \neq 0 \text{ em } U. \tag{2.37}$$

Consequentemente, temos que

$$\Delta u + \Delta v = 0 \text{ em } U. \tag{2.38}$$

Assim podemos concluir pelas equações (2.36), (2.37) e (2.38) que

$$\Delta(u+v) = \frac{\partial}{\partial N}\Delta(u+v) \equiv 0 \text{ em } U,$$

ou seja, a autofunção $w = u + v$ de (2.8) satisfaz as hipóteses do Teorema 4. Logo podemos concluir que $w \equiv 0$ em Ω, ou seja, $u = v = 0$ em Ω já que $H^4 \cap H_0^1(\Omega)^{par} \cap H^4 \cap H_0^1(\Omega)^{impar} = \{0\}$ de onde obtemos uma contradição pois por hipótese, u e v são autofunções não nulas de (2.8).

∎

Teorema 29 *Os autovalores da equação (2.8) são genericamente todos simples em* $\mathrm{Diff}_g^4(\Omega)$*, ou seja, existe um subconjunto residual* $\mathcal{F} \subset \mathrm{Diff}_g^4(\Omega)$ *tal que para todo* $h \in \mathcal{F}$ *todos os autovalores de (2.8) em* $h(\Omega)$ *são simples.*

Prova. Pela Observação 17 podemos supor que Ω é C^5-regular. Seja λ um autovalor de (2.8) em Ω. Podemos supor também, sem perda de generalidade, pelo Teorema 26, que λ é um autovalor simples de (2.8) em $L^2(\Omega)^{par}$ e $L^2(\Omega)^{impar}$. Então, existem autofunções u e v de (2.8) associadas ao autovalor λ com $u = u \circ g$ e $-v = v \circ g$, $\int_\Omega u^2 = \int_\Omega v^2 = 1$.

Se permitirmos uma pequena perturbação $h(t,x) = x + tV(x)$ da região Ω com $V(gx) = gV(x)$, obtemos pela Proposição 15 dois ramos de autovalores simples λ_{par} e λ_{impar}, perturbações do autovalor λ associados aos subespaços $L^2(\Omega)^{par}$ e $L^2(\Omega)^{impar}$ respectivamente.

De fato, nesses subespaços λ é um autovalor simples e vale a expressão (2.12) para λ_{par} e λ_{impar} numa vizinhança do 0 em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\lambda_{par}(t) = \lambda + t\int_{\Omega} V \cdot N\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big)^2 + O(t^2) \text{ e} \tag{2.39}$$

$$\lambda_{impar}(t) = \lambda + t\int_{\Omega} V \cdot N\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big)^2 + O(t^2). \tag{2.40}$$

Pelo Teorema 13 e pelas expressões (2.39) e (2.40), λ se bifurca em dois autovalores simples pela perturbação simétrica de Ω a não ser, talvez, se

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big)^2 \text{ em } \partial\Omega.$$

Seja $w_+ = u + v$ e $w_- = u - v$. w_+ e w_- são autofunções de (2.8) em Ω com $\int_\Omega w_+^2 = \int_\Omega w_-^2 = 2$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_+}{\partial N^2}\frac{\partial^2 w_-}{\partial N^2} &= \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big) && (2.41)\\ &= \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big)^2 && (2.42)\\ &= (\Delta u)^2 - (\Delta v)^2 = 0 \text{ em } \partial\Omega && (2.43)\end{aligned}$$

já que para $u, v \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ temos $\frac{\partial^2}{\partial N^2}|_{\partial\Omega} = \Delta|_{\partial\Omega}$. Observe que, pelo Lema 28, (2.43) não pode se anular genericamente em $\mathrm{Diff}_g^5(\Omega)$. Logo, qualquer autovalor de (2.8) se bifurca em autovalores simples através de pequenas perturbações simétricas de contorno.

Assim, em um subconjunto aberto e denso de $h \in \mathrm{Diff}_g^4(\Omega)$ todos os autovalores de (2.8) em $h(\Omega)$ com módulo $\leq M$ são simples. Logo, em um subconjunto residual de $h \in \mathrm{Diff}_g^4(\Omega)$ todos os autovalores de (2.8) são simples em $h(\Omega)$.

∎

Capítulo 3

Perturbação de Contorno para um problema não linear

3.1 Genericidade da propriedade de isomorfismo para uma classe de operadores lineares

Sejam $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^3, considere o operador diferencial formal

$$L = \Delta^2 + a(x)\Delta + b(x) \cdot \nabla + c(x) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostraremos nesta seção que o operador

$$\begin{aligned} L_\Omega : H^4 \cap H_0^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u &\to Lu \end{aligned} \tag{3.1}$$

é genericamente um isomorfismo no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, abertas, conexas, limitadas, C^4-regulares. Mais precisamente, mostraremos que o subconjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \;=\; &\{h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega) \mid \text{ o operador } h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1} \text{ de } H^4 \cap H_0^2(\Omega) \text{ em } L^2(\Omega) \\ &\text{é um isomorfismo}\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Observe que o operador $h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1}$ é um isomorfismo se somente se o operador $L_{h(\Omega)}$ de $H^4 \cap H_0^2(h(\Omega))$ em $L^2(h(\Omega))$ é um isomorfismo já que h^* e h^{*-1} são isomorfismos de $L^2(h(\Omega))$ em $L^2(\Omega)$ e $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ em $H^4 \cap H_0^2(h(\Omega))$ respectivamente.

Considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} K : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times \mathrm{Diff}^4(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ (u, h) &\to h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1} u. \end{aligned}$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas (ver por exemplo [19]) obtemos que o subconjunto $\mathcal{I}$ é aberto em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Assim, para concluirmos nosso resultado, basta mostrar a densidade de $\mathcal{I}$.

Proposição 30 *Sejam $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^4-regular e $h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Se zero é valor regular da aplicação*

$$\begin{aligned} K_h : H^4 \cap H_0^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longrightarrow h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1} u, \end{aligned}$$

então o operador $h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1}$ é um isomorfismo.

Prova. Observe que 0 é valor regular de K_h se somente se $h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1}$ é sobrejetora. Agora, o índice de Fredholm dessa aplicação é zero, pois h^* e h^{*-1} são isomorfismos e o índice de Fredholm de $L_{h(\Omega)}$ é zero. Logo $h^* L_{h(\Omega)} h^{*-1}$ é bijetora e contínua e então, pelo Teorema do Gráfico Fechado um isomorfismo. ▮

Teorema 31 *Sejam $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^3. Então o operador L_Ω definido em (3.1) é genericamente um isomorfismo no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, abertas, conexas, limitadas, C^4-regulares. Mais precisamente, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) é uma região aberta, conexa, limitada, C^4-regular, então o subconjunto $\mathcal{I}$ definido em (3.2) é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$.*

Prova. Pela Proposição 30 precisamos mostrar que 0 é valor regular de K_h em um subconjunto residual em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ para concluirmos que L_Ω é genericamente um isomorfismo no conjunto das regiões C^4-regulares. Para isso, mostraremos através do Teorema da Transversalidade que existe um subconjunto residual em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ tal que zero é valor regular do operador K, obtendo assim o resultado desejado.

Como sempre, a dificuldade para mostrar tal afirmação é verificar a hipótese (2α) do Teorema da Transversalidade. Suponha por absurdo que exista $(u, h) \in K^{-1}(0)$ ponto crítico. Sem perda de generalidade, podemos supor pela 'mudança de origem' que $h = i_\Omega$. Podemos supor também que Ω é C^5-regular já que regiões de classe C^4 podem ser aproximadas por regiões de classe C^5. Sendo (u, i_Ω) ponto crítico temos que existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v DK(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = 0 \text{ para todo } (\dot{u}, \dot{h}) \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

onde $DK(u, i_\Omega)$ de $H^4 \cap H_0^2(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em $L^2(\Omega)$ é dado por

$$DK(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = L_\Omega(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u).$$

Escolhendo $\dot{h} = 0$ e fazendo $\dot{u}$ variar em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ obtemos que

$$\int_\Omega v L_\Omega \dot{u} = 0 \text{ para todo } \dot{u} \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$$

de onde podemos concluir que $v \in H^4 \cap H_0^2(\Omega) \cap C^{4,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha > 0$ e satisfaz

$$L_\Omega^* v = 0 \text{ em } \Omega$$

onde L_Ω^* de $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é dado por

$$L_\Omega^* v = \Delta^2 v + a\Delta v + (2\nabla a - b) \cdot \nabla v + (c + \Delta a - \text{ div } b)v.$$

[Note que $u \in H^5(\Omega)$ já que Ω é C^5-regular.]

Portanto, se escolhermos $\dot{u} = 0$ e variarmos $\dot{h}$ em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ na equação (3.3) obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_\Omega v L_\Omega(\dot{h} \cdot \nabla u) \\
&= \int_\Omega \{(\dot{h} \cdot \nabla u) L_\Omega^* v - v L_\Omega(\dot{h} \cdot \nabla u)\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big\{\Delta v \frac{\partial}{\partial N}\Big(\dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N}\Big) - \dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N} \frac{\partial \Delta v}{\partial N} - \Delta\Big(\dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N}\Big) \frac{\partial v}{\partial N}\Big\} \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \Big\{v \frac{\partial}{\partial N}\Big(a\dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N}\Big) - \dot{h} \cdot N a \frac{\partial v}{\partial N} \frac{\partial u}{\partial N} - v\dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N} b \cdot N\Big\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \Delta v \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \Delta v \Delta u \ \ \forall \dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

já que $\Delta u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big|_{\partial\Omega}$. Logo podemos concluir que

$$\Delta v \Delta u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Portanto para concluirmos que L_Ω é genericamente um isomorfismo em $\text{Diff}^4(\Omega)$, basta mostrar que tal propriedade não se verifica genericamente em $\text{Diff}^4(\Omega)$. Para isso, consideremos a aplicação diferenciável

$$H : B_M^2 \times \text{Diff}^5(\Omega) \to L^2(\Omega)^2 \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$H(u, v, h) = (K(u, h), h^* L_{h(\Omega)}^* h^{*-1} v, h^* \Delta h^{*-1} u h^* \Delta h^{*-1} v|_{\partial\Omega})$$

onde $B^2_M = \{(u,v) \in H^4 \cap H^2_0(\Omega)^2 \mid \|u\|, \|v\| \leq M\}$. Mostraremos através do Teorema da Transversalidade que o subconjunto

$$\mathcal{H}_M = \{h \in \mathrm{Diff}^5(\Omega) \mid (0,0,0) \in H(B^2_M, h)\}$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$ para todo $M \in \mathbb{N}$. Assim, o conjunto dos difeomorfismos tal que existem soluções $u, v \in H^5(\Omega)$ de

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} L^* v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

satisfazendo

$$\Delta v \Delta u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega$$

é magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$ obtendo o resultado tomando união com M variando em $\mathbb{N}$.

A hipóteses (1) do Teorema da Transversalidade é imediata já que $\frac{\partial K}{\partial u}(u, i_{\partial\Omega})$ é Fredholm. Basta então verificar que a aplicação $(u,v,h) \to h : H^{-1}(0,0,0) \to \mathrm{Diff}^5(\Omega)$ é própria e a hipótese (2β).

Inicialmente verificaremos que a aplicação $(u,v,h) \to h : H^{-1}(0,0,0) \to \mathrm{Diff}^5(\Omega)$ é própria. Para isso, seja $\{(u_n, v_n, h_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{-1}(0,0,0)$ uma sequência com $h_n \to i_\Omega$ em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$ (o caso geral é análogo). Como $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B^2_M$ passando a uma subsequência, existe por compacidade $(u,v) \in H^2_0(\Omega)^2$ tal que $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $H^2_0(\Omega)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$h_n^*\Big(\Delta^2 + a\Delta + b\cdot\nabla + c\Big)h_n^{*-1}u_n = 0 \iff h_n^*\Delta^2 h_n^{*-1}u_n = -h_n^*\Big(a\Delta + b\cdot\nabla + c\Big)h_n^{*-1}u_n,$$

ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$u_n = -h_n^*(\Delta^2)^{-1}\Big(a\Delta + b\cdot\nabla + c\Big)h_n^{*-1}u_n \tag{3.6}$$

já que Δ^2 é um isomorfismo. Pela seção 1.2 temos que o lado direito da equação (3.6) define uma aplicação analítica de $H^2_0(\Omega) \times \mathrm{Diff}^5(\Omega)$ em $H^4 \cap H^2_0(\Omega)$. Tomando o limite de (3.6) com $n \to +\infty$ obtemos que $u \in H^4 \cap H^2_0(\Omega)$ e satisfaz

$$\Delta^2 u + a\Delta u + b\cdot\nabla u + cu = 0.$$

Mais ainda, por (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \|\Delta^2(u_n - u) + L^{h_n}(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} &= \|h_n^*\Delta^2 h_n^{*-1}(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|h_n^*\Delta^2 h_n^{*-1}u + h_n^*\Big(a\Delta + b\cdot\nabla + c\Big)h_n^{*-1}u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\to \|\Delta^2 u + a\Delta u + b\cdot\nabla u + cu\|_{L^2(\Omega)} = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

quando $n \to +\infty$ já que $u_n \to u$ em $H_0^2(\Omega)$ e $h_n \to i_\Omega$ em $\text{Diff}^5(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Por (2.6) temos também que

$$\|L^{h_n}(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2M\epsilon(h_n) \tag{3.8}$$

já que $\{(u_n, v_n)\} \subset B_M^2$ onde $\epsilon(h_n) \to 0$ quando $h_n \to i_\Omega$ em $\text{Diff}^5(\Omega)$. Assim, podemos concluir pelas relações (3.7) e (3.8) que

$$\|\Delta^2(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{3.9}$$

Como o Δ^2 é um isomorfismo de $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ existe $c_0 > 0$ tal que

$$\|\Delta^2(u_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \geq c_0\|u_n - u\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)}$$

de onde obtemos que $u_n \to u$ em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)} \leq M$ já que $\|u_n\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente podemos provar que $v_n \to v$ em $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ e $\|v\|_{H^4 \cap H_0^2(\Omega)} \leq M$ de onde obtemos que a aplicação $(u, v, h) \to h : H^{-1}(0, 0, 0) \to \text{Diff}^5(\Omega)$ é própria.

Finalmente verificaremos a hipótese (2β) mostrando que

$$\dim \left\{ \frac{\mathcal{R}(DH(u, v, h))}{\mathcal{R}\left(\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, h)\right)} \right\} = \infty$$

para todo $(u, v, h) \in H^{-1}(0, 0, 0)$. Suponha por contradição que exista $(u, v, h) \in H^{-1}(0, 0, 0)$ tal que essa afirmação seja falsa (pela "mudança de origem"podemos supor que $h = i_\Omega$). Então existem $\theta_1, ..., \theta_m \in L^2(\Omega)^2 \times L^1(\partial\Omega)$ tal que para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem $\dot{u}, \dot{v} \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ e escalares $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$DH(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) = \sum_{i=1}^{m} c_i\theta_i, \qquad \theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3) \tag{3.10}$$

onde $DH(u, v, i_\Omega) : H^4 \cap H_0^2(\Omega)^2 \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)^2 \times L^1(\partial\Omega)$ pode ser calculada pelo Teorema 6 e é dada por

$$\begin{aligned} DH(u, v, i_\Omega)(\cdot) &= \Big(DH_1(u, v, i_\Omega)(\cdot), DH_2(u, v, i_\Omega)(\cdot), \\ &\quad DH_3(u, v, i_\Omega)(\cdot)\Big) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} DH_1(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) &= L_\Omega(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) \\ DH_2(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) &= L_\Omega^*(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) \\ DH_3(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) &= \Big\{\Delta v\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \Delta u\Delta(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) \\ &\quad + \dot{h} \cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

pois $\Delta u \Delta v \equiv 0$ em $\partial\Omega$ implica que $\nabla(\Delta u \Delta v) = \frac{\partial}{\partial N}(\Delta u \Delta v)N$ em $\partial\Omega$. Assim, temos por (3.10) que

$$L_\Omega(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^1 \tag{3.11}$$

$$L_\Omega^*(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^2 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^3 = & \Big\{ \Delta v \Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \Delta u \Delta(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) \\ & + \dot{h} \cdot N \frac{\partial}{\partial N}(\Delta u \Delta v) \Big\} \Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja $\{u_1, ..., u_l\}$ uma base para o núcleo de L_Ω e considere os operadores

$$\mathcal{A}_L : L^2(\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_L : H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

definidos por

$$w = \mathcal{A}_L(z) + \mathcal{C}_L(g)$$

onde $Lw - z$ pertence a um subespaço complementar de $\mathcal{R}(L_\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ escolhido previamente, $\frac{\partial w}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega w\phi = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{N}(L_\Omega^*)$. Seja também $\{v_1, ..., v_l\}$ uma base para o núcleo de L_Ω^* e considere os operadores

$$\mathcal{A}_{L^*} : L^2(\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega) \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_{L^*} : H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \to H^4 \cap H_0^1(\Omega)$$

definidos de modo análogo. (Na seção 4.1 provaremos que esses operadores estão bem definidos.)

Então pelas equações (3.11) e (3.12) temos que

$$\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{l} \xi_i u_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_L \theta_i^1 - \mathcal{C}_L(\dot{h} \cdot N \Delta u) \tag{3.14}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)\Big|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}\Big|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \Delta u|_{\partial\Omega}$ e

$$\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{l} \eta_i v_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{L^*} \theta_i^1 - \mathcal{C}_{L^*}(\dot{h} \cdot N \Delta v) \tag{3.15}$$

já que $\frac{\partial}{\partial N}(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v)\Big|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \frac{\partial^2 v}{\partial N^2}\Big|_{\partial\Omega} = -\dot{h} \cdot N \Delta v|_{\partial\Omega}$.

Substituindo as equações (3.14) e (3.15) em (3.13) temos que

$$\left\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \left[\Delta u\Delta\mathcal{C}_{L^*}(\dot{h}\cdot N\Delta v) + \Delta v\Delta\mathcal{C}_L(\dot{h}\cdot N\Delta u)\right]\right\}\Big|_{\partial\Omega} \tag{3.16}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Seja $U=\{x\in\partial\Omega \mid \Delta u(x)\neq 0\}$. Pode-se mostrar como no Lema 18 que o aberto U é não vazio num subconjunto aberto e denso de regiões difeomorfas a Ω. A demonstração é essencialmente a mesma e não a faremos aqui. Então $\Delta v|_U\equiv 0$ já que $\Delta u\Delta v\equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Escolhendo $\dot{h}$ variando em $C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ com $\dot{h}\equiv 0$ em $\partial\Omega - U$ temos por (3.16) que

$$\left\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \Delta v\Delta\mathcal{C}_L(\dot{h}\cdot N\Delta u)\right\}\Big|_{\partial\Omega} \tag{3.17}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para todo $\dot{h}$ nestas condições. De fato, para tais escolhas de $\dot{h}$ temos que

$$\Delta u\Delta\mathcal{C}_{L^*}(\dot{h}\cdot N\Delta v) = \Delta u\Delta\mathcal{C}_{L^*}(0)$$

pertence ao subespaço de dimensão finita $[\Delta u\Delta v_1,...,\Delta u\Delta v_l]$ onde $\{v_1,...,v_l\}$ é uma base para o núcleo de $\mathcal{N}(L^*_\Omega)$. Portanto, temos que

$$\left\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \Delta v\Delta\mathcal{C}_L(\dot{h}\cdot N\Delta u)\right\}\Big|_{U} = \dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\Big|_U \tag{3.18}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para cada $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ com $\dot{h}\equiv 0$ em $\partial\Omega - U$. Logo podemos concluir que a aplicação

$$\dot{h}\to\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\Big|_U$$

tem posto finito. Agora, isto só é possível ($\dim\Omega\geq 2$) quando

$$\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\equiv 0 \text{ em } U. \tag{3.19}$$

Logo, como $\Delta v|_U\equiv 0$ e $\Delta u|_U\neq 0$ temos por (3.19) que $\frac{\partial\Delta v}{\partial N}\Big|_U\equiv 0$, ou seja, a função v satisfaz as hipóteses do Teorema 4 de onde obtemos que $v\equiv 0$ em Ω. Mas v por hipótese é não nula de onde obtemos uma contradição provando o resultado.

∎

3.2 Simplicidade genérica de soluções

Seja $f(x,\lambda,y,\mu)$ uma função real de classe C^4 definida em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ satisfazendo $f(x,0,0,0)\equiv 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Provaremos que, genericamente no conjunto das regiões

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, abertas, conexas, limitadas, $\mathcal{C}^4$-regulares, todas as soluções u de

$$\begin{cases} \Delta^2 u + f(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.20}$$

são simples, isto é, a linearização

$$\begin{aligned} L(u) : W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \quad & \to L^p(\Omega) \\ \dot{u} \quad \longrightarrow \quad & \Delta^2 \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)\Delta \dot{u} \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) \cdot \nabla \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)\dot{u} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Observe que isto independe do valor de p em $[1, +\infty)$.

Trabalhamos com soluções de (3.20) em $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ com $p > \frac{n}{2}$ pois para tais escolhas de p, $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \subset C^{2,\alpha}(\Omega)$ continuamente para algum $\alpha > 0$.

Segue diretamente do Teorema da Função Inversa em espaços de Banach que, se todas as soluções de (3.20) são simples, tais soluções formam um conjunto discreto em $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$. Além disso, se ainda supusermos que f é uma função limitada, obteremos que o conjunto das soluções de (3.20) é finito.

Observação 32 *A função nula é sempre solução de (3.20) já que por hipótese $f(x, 0, 0, 0) \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n$. É conveniente estudar a simplicidade genérica dessa solução separadamente. Segue do Teorema 31 que existe um subconjunto aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ onde a linearizada de (3.20) em $u = 0$ é um isomorfismo, ou seja, onde a solução nula de (3.20) é simples. Basta, portanto provar a simplicidade genérica das soluções não nulas.*

Proposição 33 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^4-regular e $f(x, \lambda, y, \mu)$ uma função real de classe C^2 definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Se, para algum $h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega)$ zero é valor regular da aplicação*

$$\begin{aligned} F_h : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad & \longrightarrow \quad L^p(\Omega) \\ u \quad & \longrightarrow \quad h^* \Delta^2 h^{*-1} u + h^* f(\cdot, h^{*-1} u, \nabla h^{*-1} u, \Delta h^{*-1} u), \end{aligned}$$

então todas as soluções de (3.20) em $h(\Omega)$ são simples.

Prova. Se 0 é valor regular de F_h temos que a sua linearizada $h^* L(h^{*-1} u) h^{*-1}$ é sobrejetora para todo $u \in {F_h}^{-1}(0)$. Agora, o índice de Fredholm de tal aplicação é zero. Isso segue das propriedades 2 e 4 da seção 1.3 já que h^* e h^{*-1} são isomorfismos de $L^p(h(\Omega))$ em $L^p(\Omega)$ e $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ em $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(h(\Omega))$ respectivamente e $L(h^{*-1}u)$ é uma perturbação compacta de Δ^2 (um operador Fredholm de índice zero). Logo tal aplicação é bijetora e portanto um isomorfismo pelo Teorema do Gráfico Fechado. ∎

Proposição 34 *Uma função $u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ é solução simples de*

$$\begin{cases} h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u) = 0 & em\ \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

se somente se $v = h^{*-1}u$ é solução simples de (3.20) em $h(\Omega)$.

Prova. Seja $u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$, como h^* e h^{*-1} são isomorfismos temos que

$$\begin{aligned} & h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \Delta^2 h^{*-1}u + f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, u é solução de (3.21) se somente se $h^{*-1}u$ é solução de (3.20) em $h(\Omega)$. Novamente usando o fato de que h^* e h^{*-1} são isomorfismos temos que $h^*L(v)h^{*-1}$ é isomorfismo em $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ se somente se $L(v)$ é isomorfismo em $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(h(\Omega))$. ∎

A Proposição 34 nos diz que estudar a simplicidade genérica das soluções de (3.20) é equivalente a estudar a simplicidade genérica das soluções de (3.21). Portanto, de acordo com a Proposição 33, obteremos a simplicidade genérica de todas as soluções de (3.20) se mostrarmos que para a maioria das $h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega)$ zero é valor regular da aplicação F_h. Para isso, mostraremos que zero é valor regular de

$$\begin{aligned} F : B_M \times \mathrm{Diff}^4(\Omega) &\rightarrow L^p(\Omega) \\ (u, h) &\rightarrow h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u) \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $B_M = \{u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$ para todo $M \in \mathbb{N}$, verificando as hipóteses do Teorema da Transversalidade. De fato, mostraremos que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ onde a restrição de F a este conjunto possui zero como valor regular, de onde o resultado segue pelo Teorema de Baire.

Observação 35 *Aplicando o Teorema da Função Implícita em (3.22) obtemos que*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M = \{ & h \in \mathrm{Diff}^4(\Omega) \mid \ todas\ as\ soluções\ u\ de \\ & (3.21)\ com\ \|u\|_{W^{4,p}\cap W_0^{2,p}(\Omega)} < M\ são\ simples\} \end{aligned}$$

é um subconjunto aberto de $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ para todo $M \in \mathbb{N}$. Se conseguirmos provar que tal subconjunto é também denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ obtemos o resultado tomando interseção com M variando em $\mathbb{N}$. Precisamos provar então a densidade de tal subconjunto. Agora, para provarmos tal densidade podemos trabalhar com regiões de regularidade maior (por exemplo C^∞) já que regiões de classe C^4 podem ser aproximadas por regiões de classe C^k com $k \geq 5$.

Como no capítulo anterior, se aplicarmos o Teorema da Transversalidade para F definida em (3.22), não obtemos imediatamente uma contradição. O que obtemos é que os possíveis pontos críticos devem satisfazer certas propriedades especiais. A idéia então é mostrar que essas "propriedades especiais" só podem ocorrer para um conjunto "excepcional" de regiões para então restrigir o problema ao complementar e aplicar o Teorema da Transversalidade nesse novo conjunto de regiões. No caso presente a " situação excepcional" é caracterizada pela existência de uma solução u de (3.20) e de uma solução v do problema

$$\begin{cases} L^*(u)v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfazendo a propriedade adicional $\Delta u \Delta v \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Para mostrar que esta situação é realmente "excepcional" consideramos a aplicação

$$Q : A_{M,p} \times A_{M,q} \times \text{Diff}^5(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$\begin{aligned} Q(u, v, h) &= \Big(h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u), \\ &\quad h^* L^*(h^{*-1}u)h^{*-1}v, h^*\Delta h^{*-1}u h^*\Delta h^{*-1}v\Big|_{\partial\Omega}\Big) \end{aligned}$$

onde $A_{M,p} = \{u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$,
$A_{M,q} = \{u \in W^{4,q} \cap W_0^{2,q}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$ e

$$\begin{aligned} L^*(w) &= \Delta^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Delta \\ &+ \Big[2\nabla\Big(\frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big) - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big] \cdot \nabla \\ &+ \Delta\Big[\frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big] - \text{ div } \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w) \end{aligned}$$

e então utilizamos a condição $2(\beta)$ do Teorema da Transversalidade.

Para provar a excepcionalidade da propriedade acima precisamos antes do seguinte resultado:

Lema 36 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular, $n \geq 2$, $p > \frac{n}{2}$, $J \subset \partial\Omega$ um subconjunto aberto não vazio e $f(x, \lambda, y, \mu)$ uma função real de classe C^2 definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com $f(\cdot, 0, 0, 0) \equiv 0$. Considere a aplicação diferenciável*

$$G : A_M \times \text{Diff}^5(\Omega) \to L^p(\Omega) \times W^{2-\frac{1}{p},p}(J)$$

definida por

$$G(u,h) = \left(h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u), h^*\Delta h^{*-1}u\Big|_J \right)$$

onde $A_M = \{u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$.

Então

$$C_{M,f}^J = \{h \in \mathrm{Diff}^5(\Omega) \mid (0,0) \in G(A_M, h)\}$$

é um subconjunto magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$.

Prova. Usaremos o Teorema da Transversalidade.

Observe que a aplicação G é diferenciável. A diferenciabilidade em h é comentada na seção 1.2 e a diferenciabilidade em u segue do fato de f ser uma função de classe C^2 e do fato de $p > \frac{n}{2}$ (assim $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \subset C^{2,\alpha}(\Omega)$ continuamente para algum $\alpha > 0$).

$DG(u, i_\Omega)$ de $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em $L^p(\Omega) \times W^{2-\frac{1}{p},p}(J)$ pode ser calculada pelo Teorema 6 como no exemplo 2 da seção 1.2 e é dada por

$$\begin{aligned} DG(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) \;&=\; \Big(L(u)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u), \\ &\quad \Big\{ \Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{h} \cdot N \frac{\partial \Delta u}{\partial N} \Big\}\Big|_J \Big). \end{aligned}$$

A verificação das hipóteses (1) e (3) do teorema são análogas à feita na demonstração do Teorema 31. Logo, verificaremos somente a hipótese (2β) provando que

$$\dim \left\{ \frac{\mathcal{R}(DG(u,h))}{\mathcal{R}\left(\frac{\partial G}{\partial u}(u,h)\right)} \right\} = \infty$$

para todo $(u,h) \in G^{-1}(0,0)$. Suponha por contradição que exista $(u,h) \in G^{-1}(0,0)$ tal que essa afirmação seja falsa (pela "mudança de origem"podemos supor que $h = i_\Omega$). Então existem $\theta_1, ..., \theta_m \in L^p(\Omega) \times W^{2-\frac{1}{p},p}(J)$ tal que para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem $\dot{u} \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ e escalares $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$DG(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = \sum_{i=1}^m c_i \theta_i, \tag{3.23}$$

ou seja,

$$L(u)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) \;=\; \sum_{i=1}^m c_i \theta_i^1 \tag{3.24}$$

$$\Big\{ \Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{h} \cdot N \frac{\partial \Delta u}{\partial N} \Big\}\Big|_J \;=\; \sum_{i=1}^m c_i \theta_i^2 \tag{3.25}$$

onde

$$L(u) = \Delta^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)\Delta + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) \cdot \nabla + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u). \qquad (3.26)$$

Seja $\{u_1, ..., u_l\}$ uma base para o núcleo de $L_0(u) = L(u)\Big|_{W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)}$ e considere os operadores

$$\mathcal{A}_{L(u)} : L^p(\Omega) \to W^{4,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_{L(u)} : W^{3-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{4,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

definidos por

$$w = \mathcal{A}_{L(u)}(z) + \mathcal{C}_{L(u)}(g)$$

se $L(u)w - z$ pertence a um subespaço complementar fixo de $\mathcal{R}(L_0(u))$ em $L^p(\Omega)$, $\frac{\partial w}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega w\phi = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{N}(L_0^*(u))$. (Na seção 4.1 provaremos que esses operadores estão bem definidos.)

Escolhendo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que $\dot{h} \equiv 0$ em $\partial\Omega - J$ obtemos de (3.24) que

$$\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{l} \xi_i u_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{L(u)}(\theta_i^1) \qquad (3.27)$$

já que para tais escolhas de $\dot{h}$ temos que $\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$.

Substituindo a expressão (3.27) em (3.25) obtemos que

$$\dot{h} \cdot N \frac{\partial \Delta u}{\partial N}\Big|_J$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Agora, como $\dim \Omega \geq 2$ temos que isso só é possível se

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial N} \equiv 0 \text{ em } J.$$

Então temos que a função u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 u + f(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \Omega \\ \Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial N} = 0 & \text{em } J. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Observe agora que u satisfaz as hipóteses do Teorema de unicidade do problema de Cauchy (Teorema 4). De fato, como $u \in W^{4,p}(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha > 0$ $(p > \frac{n}{2})$ e satisfaz a equação uniformemente elíptica $\Delta^2 u + f(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) = 0$ em Ω temos que $u \in W^{4,p}(\Omega) \cap C^{4,\alpha}(\Omega)$. Além disso, $u = \frac{\partial u}{\partial N} = \Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial N} = 0$ em $J \subset \partial\Omega$ e satisfaz

$$\begin{aligned} |\Delta^2 u| &\leq |f(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)| \\ &\leq |f(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) - f(\cdot, 0, 0, 0)| \\ &\leq \max_{\bar{\Omega}}\{|Df(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)|\}\Big(|u| + |\nabla u| + |\Delta u|\Big), \end{aligned}$$

ou seja, existe $c_0 > 0$ tal que

$$|\Delta^2 u| \leq c_0\Big(|u| + |\nabla u| + |\Delta u|\Big)$$

uniformemente em Ω. Logo temos que $u \equiv 0$ obtendo uma contradição. ∎

Lema 37 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, conexo, limitado, C^5-regular, $n \geq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ com $p > \frac{n}{2}$ e $f(x, \lambda, y, \mu)$ uma função real de classe C^3 definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com $f(\cdot, 0, 0, 0) \equiv 0$. Considere a aplicação diferenciável*

$$Q : A_{M,p} \times A_{M,q} \times D_{M,f} \to L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$$

definida por

$$\begin{aligned} Q(u, v, h) &= \Big(h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u), \\ &\quad h^* L^*(h^{*-1}u)h^{*-1}v, h^*\Delta h^{*-1}u h^*\Delta h^{*-1}v\Big|_{\partial\Omega}\Big) \end{aligned}$$

*onde $A_{M,p} = \{u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$,
$A_{M,q} = \{u \in W^{4,q} \cap W_0^{2,q}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$, $D_{M,f} = \mathrm{Diff}^5(\Omega) - C^{\partial\Omega}_{M,f}$, $C^{\partial\Omega}_{M,f}$ como no Lema 36 e*

$$\begin{aligned} L^*(w) &= \Delta^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Delta \\ &\quad + \Big[2\nabla\Big(\frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big) - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big] \cdot \nabla \\ &\quad + \Delta\Big[\frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big] - \ div\ \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w)\Big) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, w, \nabla w, \Delta w). \end{aligned}$$

Então

$$E_{M,f} = \{h \in D_{M,f} \mid (0, 0, 0) \in Q(A_{M,p} \times A_{M,q}, h)\}$$

é um subconjunto magro e fechado em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$.

(Observe que $L^*(w)$ é o adjunto formal de $L(w)$ definido por (3.26).)

Prova. Como sempre aplicaremos o Teorema da Transversalidade. A diferenciabilidade de Q é clara. De fato, a diferenciabilidade com relação a h é comentada na seção 1.2 e a diferenciabilidade com relação às outras variáveis segue do fato dos espaços envolvidos serem limitados e do fato de f ser de classe C^3.

A aplicação $DQ(u, v, i_\Omega)$ de $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \times W^{4,q} \cap W_0^{2,q}(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ pode ser calculada como no exemplo 2 da seção 1.2 e é dada por

$$\begin{aligned} DQ(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) \;=\; & \Big(L(u)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u), \\ & L^*(u)(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) + \Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u) \cdot v\Big)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u), \\ & \Big\{\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)\Delta v + \Delta u \Delta(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) + \dot{h} \cdot N \frac{\partial}{\partial N}(\Delta u \Delta v)\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\Big) \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial L^*}{\partial w}(u) \cdot v$ é o operador diferencial de ordem 2 dado por

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u) \cdot v\Big) z \;=\; & \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} v + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial\mu} \cdot \nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\Delta v\Big)\Delta z \\ & + \Big[2\nabla\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} v + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial\mu} \cdot \nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\Delta v\Big) \\ & - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial y} v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial y}\Delta v\Big)\Big] \cdot \nabla z \\ & \Big[\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} v + \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial y} \cdot \nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu}\Delta v\Big) \\ & + \Delta\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial\mu} v + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\mu} \cdot \nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\Delta v\Big) \\ & - \operatorname{div}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial y} v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\nabla v + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial\mu}\Delta v\Big)\Big] z. \end{aligned}$$

(Acima escrevemos f em vez de $f(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)$ para simplificar a notação.)

As hipóteses (1) e (3) do Teorema da Transversalidade podem ser verificadas como na demonstração do Teorema 31. Logo, verificaremos apenas a hipótese (2β) provando que

$$\dim \left\{ \frac{\mathcal{R}(DQ(u, v, h))}{\mathcal{R}\Big(\frac{\partial Q}{\partial(u,v)}(u, v, h)\Big)} \right\} = \infty$$

para todo $(u, v, h) \in Q^{-1}(0, 0, 0)$. Suponha por contradição que exista $(u, v, h) \in Q^{-1}(0, 0, 0)$ tal que essa afirmação seja falsa (pela "mudança de origem"podemos supor que $h = i_\Omega$). Então existem $\theta_1, ..., \theta_m \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ tal que para todo $\dot{h} \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem $\dot{u} \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$, $\dot{v} \in W^{4,q} \cap W_0^{2,q}(\Omega)$ e escalares $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$DQ(u, v, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{v}, \dot{h}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i,$$

ou seja, tal que

$$L(u)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^1 \tag{3.29}$$

$$L^*(u)(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) + \Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u) \cdot v\Big)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^2 \tag{3.30}$$

e tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i^3 &= \Big\{\Delta(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)\Delta v + \Delta u \Delta(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v) \\ &\quad + \dot{h} \cdot N \frac{\partial}{\partial N}(\Delta u \Delta v)\Big\}\Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Como na demonstração do Lema 36, sejam $\{u_1, ..., u_l\}$ uma base para o núcleo de $L_0(u) = L(u)\Big|_{W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)}$, $\{v_1, ..., v_l\}$ uma base para o núcleo de
$L_0^*(u)$ e considere os operadores

$$\mathcal{A}_{L(u)} : L^p(\Omega) \to W^{4,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_{L(u)} : W^{3-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{4,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

definidos por

$$w = \mathcal{A}_{L(u)}(z) + \mathcal{C}_{L(u)}(g)$$

onde $L(u)w - z$ pertence a um subespaço complementar fixo de $\mathcal{R}(L_0(u))$ em $L^p(\Omega)$, $\frac{\partial w}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega w\phi = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{N}(L_0^*(u))$ e

$$\mathcal{A}_{L^*(u)} : L^q(\Omega) \to W^{4,q} \cap W_0^{1,q}(\Omega)$$

$$\mathcal{C}_{L^*(u)} : W^{3-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega) \to W^{4,q} \cap W_0^{1,q}(\Omega)$$

definidos por

$$t = \mathcal{A}_{L^*(u)}(z) + \mathcal{C}_{L^*(u)}(g)$$

onde $L^*(u)t - z$ pertence a um subespaço complementar de $\mathcal{R}(L_0^*(u))$ em $L^q(\Omega)$, $\frac{\partial t}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega t\varphi = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{N}(L_0(u))$. (Na seção 4.1 provaremos que tais operadores estão bem definidos.)

Pelas equações (3.29) e (3.30) temos que

$$\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{l} \xi_i u_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{L(u)}(\theta_i^1) - \mathcal{C}_{L(u)}(\dot{h} \cdot N \Delta u) \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{v} - \dot{h}\cdot\nabla v &= \sum_{i=1}^{s}\eta_i v_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{A}_{L^*(u)}(\theta_i^2) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta v)\\ &\quad -\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u)\Big). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Substituindo tais equações em (3.31) obtemos que

$$\Big\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta u)\Big)$$
$$+\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta u)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$, ou seja, o operador

$$\begin{aligned}\Upsilon(\dot{h}) &= \Big\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta u)\Big) \\ &\quad +\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta u)\Big)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\dot{h}\cdot N\Delta v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\end{aligned} \tag{3.34}$$

definido para todo $\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$ possui posto finito.

Mostraremos na seção 4.2 que se Υ é um operador de posto finito e $\dim\Omega\geq 2$ então

$$\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\equiv 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.35}$$

Portanto temos que as funções u e v satisfazem

$$\begin{cases} \Delta^2 u - f(\cdot,u,\nabla u,\Delta u) = 0 & \text{em } \Omega\\ u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} L^*(u)v = 0 & \text{em } \Omega\\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.37}$$

e

$$\Delta u\Delta v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.38}$$

Seja $U = \{x\in\partial\Omega \mid \Delta u(x)\neq 0\}$. Pela equação (3.38) temos que

$$\Delta v|_U = \frac{\partial\Delta v}{\partial N}\Big|_U \equiv 0.$$

Observe que o aberto U é não vazio, já que $i_\Omega\in D_M^{\partial\Omega}$ e pelo Lema 36 a solução u de (3.36) não satisfaz $\Delta u\equiv 0$ em $\partial\Omega$. Portanto $v\in W^{4,q}\cap W_0^{2,q}(\Omega)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4. De fato, v satisfaz a equação (3.37) e existe um aberto não vazio U em $\partial\Omega$ onde $v = \frac{\partial v}{\partial N} = \Delta v = \frac{\partial\Delta v}{\partial N}\equiv 0$. Logo, $v\equiv 0$ em Ω de onde obtemos uma contradição, provando o resultado.

∎

Teorema 38 *Genericamente no conjunto das regiões abertas, conexas, limitadas, C^4-regulares, todas as soluções de (3.20) são simples.*

Prova. Pela Observação 35 podemos supor sem perda de generalidade que a região Ω é C^5-regular e pela Observação 32 basta mostrarmos que as soluções não nulas de (3.20) são genericamente simples em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$ para obtermos o resultado.

Considere então a aplicação diferenciável

$$F : B_M \times U_{M,f} \to L^p(\Omega)$$

definida por

$$F(u,h) = h^*\Delta^2 h^{*-1}u + h^* f(\cdot, h^{*-1}u, \nabla h^{*-1}u, \Delta h^{*-1}u)$$

onde $B_M = \{u \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) - \{0\} \mid \|u\| \leq M\}$, $p > \frac{n}{2}$ e $U_{M,f} = D_{M,f} - E_{M,f}$. $D_{M,f}$ é o complementar do subconjunto magro e fechado do Lema 36 e $E_{M,f}$ é o subconjunto magro e fechado do Lema 37. Observe que $U_{M,f}$ é aberto e denso em $\mathrm{Diff}^4(\Omega)$. Mostraremos, através do Teorema da Transversalidade, que o subconjunto

$$\{h \in U_{M,f} \ \mid \ u \to F(u,h) \text{ não tem 0 como valor regular } \}$$

é magro e fechado em $U_{M,f}$. Assim, tomando interseção para $M \in \mathbb{N}$ do complementar desse conjunto obtemos pelo Teorema de Baire e pela Proposição 33 que todas as soluções de (3.20) são genericamente simples em $\mathrm{Diff}^5(\Omega)$.

A verificação das hipóteses (1) e (3) do Teorema da Transversalidade é simples. Vamos então verificar a hipótese (2α).

Para isto, suponha por absurdo que exista $(u,h) \in F^{-1}(0)$ ponto crítico de F. (Podemos supor sem perda de generalidade que $h = i_\Omega$). Então, existe $v \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v \, DF(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = 0 \tag{3.39}$$

para todo $(\dot{u}, \dot{h}) \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ onde $DF(u, i_\Omega) : W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega) \times C^5(\Omega, \mathbb{R}^n) \to L^p(\Omega)$ é definida por

$$DF(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) \quad = \quad L(u)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)$$

onde $L(u) = \Delta^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)\Delta + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u) \cdot \nabla + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, u, \nabla u, \Delta u)$.

Fazendo $\dot{h} = 0$ em (3.39) temos que

$$\int_\Omega v \, L(u) \, \dot{u} = 0 \ \ \forall \dot{u} \in W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega),$$

ou seja, $v \in \mathcal{N}(L^*(u))$. Assim, como $\partial\Omega$ é de classe C^5 e f é de classe C^4 temos que $v \in W^{5,q}(\Omega) \cap C^{4,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha > 0$ e satisfaz

$$\begin{cases} L^*(u)\, v = & 0 \text{ em } \Omega \\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = & 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.40}$$

Se $\dot{u} = 0$ e $\dot{h}$ varia em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega v\, L(u)(\dot{h}\cdot\nabla u) \\ &= \int_\Omega \Big\{(\dot{h}\cdot\nabla u)L^*(u)v - vL(u)(\dot{h}\cdot\nabla u)\Big\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big\{(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta v) - \Delta v\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u) - v\frac{\partial}{\partial N}(\Delta(\dot{h}\cdot\nabla u)) + \Delta(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial v}{\partial N}\Big\} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\Big\{v\frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u) - (\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{\partial f}{\partial\mu}v\Big)\Big\} + \int_{\partial\Omega} v(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial f}{\partial\lambda}\cdot N \\ &= \int_{\partial\Omega}\Big\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}(\Delta v) - \Delta v\frac{\partial}{\partial N}\Big(\dot{h}\cdot N\frac{\partial u}{\partial N}\Big)\Big\} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega}\Big\{\dot{h}\cdot N\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{\partial f}{\partial\mu}v\Big)\Big\} \\ &= -\int_{\partial\Omega}\dot{h}\cdot N\Delta v\Delta u \quad \forall\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\int_{\partial\Omega}\dot{h}\cdot N\Delta v\Delta u = 0 \quad \forall\dot{h}\in C^5(\Omega,\mathbb{R}^n)$$

implicando que

$$\Delta v\Delta u \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

mas $i_\Omega \in U_{M,f}$ de onde obtemos a contradição desejada.

∎

Capítulo 4

O Método das Soluções Rapidamente Oscilantes

Quando estudamos problemas de genericidade envolvendo perturbação de contorno para Equações Diferenciais Parciais nos deparamos com tipos especiais de operadores (pseudo-diferenciais) de posto finito. Como é bem conhecido, estes operadores devem ter símbolos de qualquer ordem nulos.

Seria extremamente conveniente obter tais símbolos da teoria abstrata de operadores diferenciais. Entretanto, isso não parece disponível na literatura, embora o "Cálculo de Boutef de Monvel" possa afinal se revelar o instrumento adequado para obtê-los. Por outro lado, D. Henry desenvolve em [5] um método que permite obter condições necessárias para que os operadores especiais de interesse para os nossos problemas tenham posto finito, baseado no comportamento dos mesmos quando aplicados a funções "rapidamente oscilantes". Como o comportamento de operadores pseudo-diferenciais é especialmente simples quando aplicado a tais funções, é inteiramente razoável conjecturar que as condições obtidas sejam exatamente a nulidade dos símbolos acima referida, mas o argumento aqui usado é independente desse resultado. O que é crucial é que tais condições são muitas vezes suficientes para obter a contradição procurada em nossos argumentos de "genericidade".

O método provado em [5] (ou em [22]) foi aplicado originalmente a equações diferenciais elípticas de segunda ordem. Nesta seção, estendemos o método para equações diferenciais elípticas envolvendo o Bilaplaciano, obtendo assim resultados de genericidade para esse operador.

4.1 O Método

Nesta seção trabalhamos com funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ assumindo valores complexos. Para uma dada função u deste tipo e um operador linear qualquer T temos que

$$Tu = T[Re(u)] + iT[Im(u)]$$

onde $Re(u)$ e $Im(u)$ são respectivamente a parte real e imaginária de u.

Sejam $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ e $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções suaves e considere o operador diferencial

$$L = \Delta^2 + a(x)\Delta + b(x) \cdot \nabla + c(x) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Procuramos inicialmente uma solução formal $u(x) = e^{wS(x)} \sum_{k \geq 0} \frac{U_k(x)}{(2w)^k}$ de

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Lu & = & (2w)^2 e^{wS} F \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial N} & = & e^{wi\theta} G \text{ em } \partial\Omega \\ u & = & 0 \text{ em } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.1}$$

quando $w \to +\infty$ onde U_k é uma função suave assumindo valores complexos; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, conexo, limitado, regular; N é a normal exterior;

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{F_k(x)}{(2w)^k},$$

$$G(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{G_k(x)}{(2w)^k},$$

F_k e G_k funções suaves assumindo valores complexos; $S|_{\partial\Omega} = i\theta$, $Re(\frac{\partial S}{\partial N}) > 0$ com $\theta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ suave tal que $|\nabla_{\partial\Omega}\theta| = 1$ na região de interesse. Observe que existe uma vizinhança V de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $Re(S) < 0$ em $V \cap \Omega$. Assim obtemos que as funções u e $(2w)^2 e^{wS} F$ tendem a zero rapidamente no interior de Ω quando $w \to +\infty$ (exceto sobre ou muito próximo a $\partial\Omega$).

Como $u|_{\partial\Omega} = 0$ temos que $U_k|_{\partial\Omega} = 0$ para todo $k \geq 0$. Daí obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial}{\partial N}\Big(e^{wS} \sum_{k \geq 0} \frac{U_k}{(2w)^k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} \\ &= e^{wS}\Big(w \sum_{k \geq 0} \frac{U_k}{(2w)^k} + \sum_{k \geq 0} \frac{\frac{\partial U_k}{\partial N}}{(2w)^k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} \\ &= e^{wi\theta} \sum_{k \geq 0} \frac{\frac{\partial U_k}{\partial N}}{(2w)^k} \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Temos também que

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 u &= \Delta(\Delta u) \\
&= \Delta\Big[e^{wS}\sum_{k\geq 0}\Big(\frac{\Delta U_k}{(2w)^k}+\frac{\nabla S\cdot\nabla U_k}{(2w)^{k-1}}+\frac{1}{2}\frac{\Delta S U_k}{(2w)^{k-1}}+\frac{1}{4}\frac{\nabla S\cdot\nabla S U_k}{(2w)^{k-2}}\Big)\Big] \\
&= e^{wS}\sum_{k\geq 0}\Big[\frac{\Delta^2 U_k}{(2w)^k}+\frac{\nabla S\cdot\nabla(\Delta U_k)+\Delta(\nabla S\cdot\nabla U_k)}{(2w)^{k-1}}+\frac{1}{2}\frac{\Delta S\Delta U_k+\Delta(\Delta S U_k)}{(2w)^{k-1}} \\
&\quad+\frac{\nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla U_k)}{(2w)^{k-2}}+\frac{1}{2}\frac{\Delta S\nabla S\cdot\nabla U_k+\nabla S\cdot\nabla(\Delta S U_k)}{(2w)^{k-2}} \\
&\quad+\frac{1}{4}\frac{(\Delta S)^2 U_k+\Delta(\nabla S\cdot\nabla S U_k)\nabla S\cdot\nabla S\Delta U_k)}{(2w)^{k-2}} \\
&\quad+\frac{1}{4}\frac{\nabla S\cdot\nabla S\nabla S\cdot\nabla U_k+\nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla S U_k)}{(2w)^{k-3}} \\
&\quad+\frac{1}{8}\frac{\nabla S\cdot\nabla S\Delta S U_k+\Delta S\nabla S\cdot\nabla S U_k)}{(2w)^{k-3}}+\frac{1}{16}\frac{(\nabla S\cdot\nabla S)^2 U_k}{(2w)^{k-3}}\Big] \\
&= e^{wS}\Big\{\Big[w^4(\nabla S\cdot\nabla S)^2+2w^3\Big((\nabla S\cdot\nabla S)\Delta S+\nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla S)\Big) \\
&\quad+4w^3(\nabla S\cdot\nabla S)\nabla S\cdot\nabla+2w^2\Big(\nabla(\nabla S\cdot\nabla S)+\nabla S\cdot\nabla S\Delta+\frac{1}{2}\Delta(\nabla S\cdot\nabla S)\Big)\Big]u \\
&\quad+\sum_{k\geq 0}\Big[(2w)^{2-k}\Big[\Big(\frac{1}{4}(\Delta S)^2+\frac{1}{2}\nabla S\cdot\nabla(\Delta S)+\Delta S\nabla S\cdot\nabla\Big)U_k+\nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla U_k)\Big] \\
&\quad+(2w)^{1-k}\Big(\frac{1}{2}\Delta^2 S+\Delta S\Delta+\nabla(\Delta S)\cdot\nabla+\nabla S\cdot\nabla\Delta\Big)U_k \\
&\quad+(2w)^{1-k}\Delta(\nabla S\cdot\nabla U_k)+(2w)^{-k}\Delta^2 U_k\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a\Delta u &= a\Delta\Big(e^{wS}\sum_{k\geq 0}\frac{U_k}{(2w)^k}\Big) \\
&= ae^{wS}\Big[\sum_{k\geq 0}(2w)^{-k}\Delta U_k+\sum_{k\geq 0}(2w)^{1-k}\Big(\nabla S\cdot\nabla U_k+\Delta S U_k\Big) \\
&\quad+\frac{1}{4}\sum_{k\geq 0}(2w)^{2-k}(\nabla S\cdot\nabla S)U_k\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b\cdot\nabla u &= b\cdot\nabla\Big(e^{wS}\sum_{k\geq 0}\frac{U_k}{(2w)^k}\Big) \\
&= e^{wS}\Big(\frac{b\cdot\nabla S}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{U_k}{(2w)^{k-1}}+\sum_{k\geq 0}\frac{b\cdot\nabla U_k}{(2w)^k}\Big).
\end{aligned}
$$

Substituindo em (4.1) obtemos que

$$U_k = 0$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial N} \;=\; G_k$$

em $\partial\Omega$ para todo $k \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
0 &= Lu - (2w)^2 e^{wS} F \\
&= e^{wS}\Big\{\Big[w^4(\nabla S\cdot\nabla S)^2 + \\
&\quad +4w^3\Big(\frac{1}{2}(\nabla S\cdot\nabla S)\Delta S + \frac{1}{2}\nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla S) + (\nabla S\cdot\nabla S)\nabla S\cdot\nabla\Big) \\
&\quad +2w^2\Big(\nabla(\nabla S\cdot\nabla S)\cdot\nabla + \nabla S\cdot\nabla S\Delta + \frac{1}{2}\Delta(\nabla S\cdot\nabla S) + \frac{1}{2}\nabla S\cdot\nabla S\Big)\Big]\sum_{k\geq 0}\frac{U_k}{(2w)^k} \\
&\quad +\sum_{k\geq 0}(2w)^{2-k}\Big[\Lambda U_k + \Gamma U_{k-1} + LU_{k-2} - F_k\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

em Ω onde $U_{-1} = U_{-2} \equiv 0$,

$$\Lambda\phi = \frac{1}{4}(\Delta S)^2\phi + \frac{1}{2}\nabla S\cdot\nabla(\Delta S)\phi + \Delta S\nabla S\cdot\nabla\phi + \nabla S\cdot\nabla(\nabla S\cdot\nabla\phi)$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma\phi &= \frac{1}{2}\Delta^2 S\phi + \Delta S\Delta\phi + \nabla(\Delta S)\cdot\nabla\phi + \nabla S\cdot\nabla(\Delta\phi) \\
&\quad +\Delta(\nabla S\cdot\nabla\phi) + a\Big(\nabla S\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}\Delta S\phi\Big) + \frac{1}{2}(b\cdot\nabla S)\phi.
\end{aligned}$$

Escolhendo S com valores complexos satisfazendo

$$(\nabla S)^2 = \nabla S\cdot\nabla S = 0 \tag{4.2}$$

numa vizinhança de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ temos, para todo $k \geq 0$ que

$$\begin{cases}
\Lambda U_k + \Gamma U_{k-1} + LU_{k-2} &= F_k \\
\frac{\partial U_k}{\partial N}|_{\partial\Omega} &= G_k \\
U_k|_{\partial\Omega} &= 0
\end{cases} \tag{4.3}$$

com $U_{-1} = U_{-2} \equiv 0$.

Para encontrarmos soluções aproximadas de (4.1) numa vizinhança de $\partial\Omega$ utilizamos as "coordenadas normais" estudadas detalhadamente em [5] (Teorema 1.5 e Capítulo 8). Tais coordenadas são obtidas pelo difeomorfismo $(y,t) \to x = y + tN(y)$ definido de $(y,t) \in \partial\Omega\times(-\delta,\delta)$ sobre uma vizinhança de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ ($\delta > 0$ suficientemente pequeno e $\partial\Omega$ pelo menos de classe C^2). Nessas coordenadas y é o ponto de $\partial\Omega$ mais próximo a x e

$$t = \begin{cases} +\ \mathrm{dist}\ (x,\partial\Omega) & \text{se } x\in\Omega^c, \\ -\ \mathrm{dist}\ (x,\partial\Omega) & \text{se } x\in\Omega. \end{cases}$$

Se $u(x)$ é uma função suficientemente suave numa vizinhança de $\partial\Omega$, temos nessa vizinhança (ver [5]) que

$$\nabla u(y+tN(y)) = (1+tK(y))^{-1}\nabla_{\partial\Omega} u(y+tN(y)) + u_t(y+tN(y))N(y)$$

e

$$\begin{aligned}\Delta u(y+tN(y)) &= u_{tt}(y+tN(y)) + \lambda_t(t,y)u_t(y+tN(y)) \\ &\quad +(1+tK(y))^{-2}\lambda_y(t,y)\cdot u_y(y+tN(y)) \\ &\quad + \text{div }_{\partial\Omega}[(1+tK(y))^{-2}u_y(y+tN(y))]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Além disso, escrevendo

$$\tilde{S}(t,y) = S(x(y,t)) = S(y+tN(y)) = \sum_{k\geq 0}\frac{S_k(y)t^k}{k!}$$

em coordenadas normais para alguma vizinhança de $\partial\Omega$, temos na vizinhança de $\partial\Omega$

$$\tilde{S}(t,0) = S(x(y,0)) = S_0(y) = i\theta(y)$$

com

$$Re\Big(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}(0,y)\Big) = Re\Big(\frac{\partial S}{\partial N}(x(y,0))\Big) > 0.$$

Observe que alguma condição sobre S deve ser imposta para determinarmos os coeficientes $S_k(y)$. A condição escolhida (4.2) tem a vantagem de simplificar os cálculos em termos de θ e quantidades geométricas de $\partial\Omega$.

Agora

$$\begin{aligned}\nabla S(x(y,t)) &= (\nabla S)(y+tN(y)) \\ &= S_t(y+tN(y))N(y) + (1+tK(y))^{-1}\nabla_{\partial\Omega}S(y+tN(y))\end{aligned}$$

e

$$(1+tK(y))^{-1} = 1 - tK(y) + t^2K^2(y) - t^3K^3(y) + ...$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Big((\nabla S)(y+tN(y))\Big)^2 \\ &= (\nabla_{\partial\Omega}S_0(y))^2 + (S_1(y))^2 \\ &\quad +t\Big(2S_1(y)S_2(y) + 2\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}S_1(y) + 2\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)\cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)\Big) + ...\end{aligned}$$

Escolhendo ainda $|\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)| \equiv 1$ na região de interesse obtemos recursivamente

$$S_1(y) = 1,$$

$$S_2(y) = -\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y),$$

e podemos assim calcular a quantidade de termos que se fizerem necessários.

Desta maneira obtemos que

$$\begin{aligned} S(x(y,t)) &= S(y + tN(x)) \\ &= i\theta(y) + t - \frac{t^2}{2}q(y) + \frac{t^3}{3!}S_3(y) + \frac{t^4}{4!}S_4(y) + ... \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} (\nabla S)(x(y,t)) &= N + i\nabla_{\partial\Omega}\theta - t\Big(iK\nabla_{\partial\Omega}\theta + qN\Big) \\ &+\frac{t^2}{2}\Big(S_3N - \nabla_{\partial\Omega}q + 2iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta\Big) \\ &+\frac{t^3}{3!}\Big(S_4N + \nabla_{\partial\Omega}S_3 + 3K\nabla_{\partial\Omega}q - 6iK^3\nabla_{\partial\Omega}\theta\Big) + O(t^4) \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \nabla S(y + tN(y)) \cdot \nabla &= i\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &+t\Big(- 2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} - q\frac{\partial}{\partial t}\Big) \\ &+\frac{t^2}{2!}\Big(6iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} - \nabla_{\partial\Omega}q \cdot \nabla_{\partial\Omega} + S_3\frac{\partial}{\partial t}\Big) \\ &+\frac{t^3}{3!}\Big(\nabla_{\partial\Omega}S_3 \cdot \nabla_{\partial\Omega} + 6K\nabla_{\partial\Omega}q \cdot \nabla_{\partial\Omega} - 24iK^3\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} + S_4\frac{\partial}{\partial t}\Big) \\ &+O(t^4) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$(\Delta S)(x(y,t)) = \alpha(y) + t\beta(y) + \frac{t^2}{2}\rho(y) + \frac{t^3}{3!}\sigma(y) + O(t^4) \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} (\Delta^2 S)(x(y,t)) &= \rho(y) + H_1(y)\beta(y) + \Delta_{\partial\Omega}\alpha(y) \\ &+t\Big(\sigma(y) + H_1(y)\rho(y) - H_2(y)\beta(y) + \nabla_{\partial\Omega}H_1(y) \cdot \nabla_{\partial\Omega}\alpha(y) \\ &+\Delta_{\partial\Omega}\beta(y) - 2\ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(K(y)\nabla_{\partial\Omega}\alpha(y))\Big) + O(t^2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde

- $K(y) = DN(y)$ a matriz curvatura no espaço tangente, $KN = 0$;
- $q(y) = \nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)$;
- $\frac{\partial}{\partial\theta} = \nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot \nabla_{\partial\Omega}$;
- $S_3(y) = 3\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot K^2(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) - q^2(y) + i\frac{\partial q}{\partial\theta}(y)$;
- $S_4(y) = 3q(y)S_3(y) - i\frac{\partial S_3}{\partial\theta}(y) - 12\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot K^3(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) - 6i\nabla_{\partial\Omega}q(y) \cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)$;

- $H_m(y) =$ traço $K^m(y)$;
- $\alpha(y) = H_1(y) - q(y) + i\Delta_{\partial\Omega}\theta(y)$;
- $\beta(y) = S_3(y) - H_1(y)q(y) + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta}(y) - 2i \text{ div}_{\partial\Omega}(K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) - H_2(y)$;
- $\rho(y) = S_4(y) + H_1(y)S_3(y) + 2H_2(y)q(y) - 4iK(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}H_1(y) - i\frac{\partial H_2}{\partial\theta}(y) + 3i \text{ div}_{\partial\Omega}(K^2(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) - \frac{1}{2}\Delta_{\partial\Omega}q(y) + 2H_3(y)$;
- $\lambda(t,y) = \ln[\det(1+tK(y))] = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}t^m H_m(y)$ para t suficientemente pequeno;
- $\sigma(y) = S_5(y) - 6H_4(y) - 6H_3(y)q(y) - 3H_2(y)S_3(y) + H_1(y)S_4(y) - 3\nabla_{\partial\Omega}H_1(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}q(y) + 18iK^2(y)\nabla_{\partial\Omega}H_1(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta + \Delta_{\partial\Omega}S_3(y) + 6 \text{ div}_{\partial\Omega}(K(y)\nabla_{\partial\Omega}q)$
$-24i \text{ div}_{\partial\Omega}(K^3(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) + 2i\nabla_{\partial\Omega}H_3(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) + 6iK(y)\nabla_{\partial\Omega}H_2(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)$.

Escrevendo agora

$$\begin{aligned}
a(x(y,t)) &= a(y+tN(y)) \\
&= a_0(y) + a_1(y)t + a_2(y)\frac{t^2}{2} + \dots \\
b(x(y,t)) &= b(y+tN(y)) \\
&= b_0(y) + b_1(y)t + b_2(y)\frac{t^2}{2} + \dots \\
U_k(x(y,t)) &= U_k(y+tN(y)) \\
&= tU_k^1(y) + \frac{t^2}{2}U_k^2(y) + \frac{t^3}{3!}U_k^3(y) + \dots \\
F_k(x(y,t)) &= F_k(y+tN(y)) \\
&= F_k^0(y) + tF_k^1(y) + \frac{t^2}{2}F_k^2(y) + \dots
\end{aligned}$$

e sabendo que

$$\begin{aligned}
(1+tK)^{-2} &= (1+tK)^{-1}(1+tK)^{-1} \\
&= (1-tK+t^2K^2-\dots)(1-tK+t^2K^2-\dots) \\
&= 1-2tK+3t^2K^2-4t^3K^3+O(t^4)
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
U_k^1|_{\partial\Omega} &= G_k \\
\Lambda U_k &= \Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)U_k^1 + U_k^2 \\
&\quad +t\left\{\begin{array}{l} U_k^1\Big(\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{3}{2}\beta + i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} - 6iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} - 2iq\frac{\partial}{\partial\theta} \\ +S_3 + q^2 - \alpha q - i\frac{\partial q}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big) + \Big(\alpha + 2i\frac{\partial}{\partial\theta} - 3q\Big)U_k^2 + U_k^3 \end{array}\right\} \\
&\quad +O(t^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma U_{k-1} \;=\; & \begin{pmatrix} \alpha H_1 + \beta - H_2 + 2\Delta_{\partial\Omega} + 2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} \\ +S_3 - 4iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - H_1 q + a_0 \end{pmatrix} U^1_{k-1} \\
& + \Big(\alpha + 2H_1 + 2i\frac{\partial}{\partial\theta} - 2q\Big) U^2_{k-1} + 2U^3_{k-1} \\
& + t \left\{ \begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
\frac{3}{2}\rho + \frac{3}{2}H_1\beta + \frac{1}{2}\Delta_{\partial\Omega}\alpha - \alpha H_2 + \alpha\Delta_{\partial\Omega} + \nabla_{\partial\Omega}\alpha\cdot\nabla_{\partial\Omega} \\
+i\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega} + 2H_2 q - i\frac{\partial H_2}{\partial\theta} - 2iH_2\frac{\partial}{\partial\theta} + 3\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} + 2H_3 + S_4 \\
+H_1 S_3 - 6\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) - 2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}H_1 \\
+i\Delta_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta} - 5\nabla_{\partial\Omega}q\cdot\nabla_{\partial\Omega} - \Delta_{\partial\Omega}q - 2q\Delta_{\partial\Omega} \\
+18iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} - 6iH_1K\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} \\
+a_0(\frac{1}{2}\alpha - q + i\frac{\partial}{\partial\theta}) + a_1 + \frac{1}{2}b_0\cdot N + \frac{i}{2}b_0\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta
\end{array} \right] U^1_{k-1} \\
+\Big(2\beta + \alpha H_1 + 2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - 3H_2 \\
+2\Delta_{\partial\Omega} - 3qH_1 - 8iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} + 3S_3 + a_0\Big) U^2_{k-1} \\
+\Big(\alpha - 4q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta} + 2H_1\Big) U^3_{k-1} + 2U^4_{k-1}
\end{array} \right\} \\
& + O(t^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
LU_{k-2} \;=\; & \begin{pmatrix} 2H_3 + \Delta_{\partial\Omega}H_1 - 4\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) - H_1H_2 \\ +2H_1\Delta_{\partial\Omega} + 4\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} + a_0H_1 + b_0\cdot N \end{pmatrix} U^1_{k-2} \\
& + \Big(2\Delta_{\partial\Omega} - 2H_2 + H_1^2 + a_0\Big) U^2_{k-2} + 2H_1U^3_{k-2} + U^4_{k-2} \\
& + t \left\{ \begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
H_2^2 - 12K\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} + 18\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K^2\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) - 2H_2\Delta_{\partial\Omega} \\
+2H_1H_3 - 4H_1\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) + \nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega}H_1 \\
-5\nabla_{\partial\Omega}H_2\cdot\nabla_{\partial\Omega} - \Delta_{\partial\Omega}H_2 + \Delta^2_{\partial\Omega} - 6H_4 - 2\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}H_1(\cdot)) \\
-2\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}H_1) + 3H_1\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} \\
+b_0\cdot\nabla_{\partial\Omega} + b_1\cdot N - a_0H_2 + a_0\Delta_{\partial\Omega} + a_1H_1 + c
\end{array} \right] U^1_{k-2} \\
+ \begin{pmatrix} 6\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} + 6H_3 - 8\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) + a_0H_1 \\ +a_1 + b_0\cdot N - 3H_2H_1 + 2H_1\Delta_{\partial\Omega} + \Delta_{\partial\Omega}H_1 \end{pmatrix} U^2_{k-2} \\
\Big(2\Delta_{\partial\Omega} - 4H_2 + H_1^2 + a_0\Big) U^3_{k-2} + 2H_1U^4_{k-2} + U^5_{k-2}
\end{array} \right\} \\
& + O(t^2).
\end{aligned}
$$

Assim podemos obter os coeficientes de U_k para $k \geq 0$ substituindo tais expressões em (4.3) e comparando seus coeficientes. De fato, para $k = 0$ temos pelo sistema (4.3) que

$$
\begin{cases}
\Lambda U_0 & = F_0 \\
\frac{\partial U_0}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} & = G_0 \\
U_0\Big|_{\partial\Omega} & = 0
\end{cases}
$$

implicando que

$$
U_0^1 \;=\; G_0
$$

$$\begin{aligned}
U_0^2 &= F_0^0 - \Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)U_0^1 \qquad (4.10)\\
U_0^3 &= F_0^1 - \Big(\alpha - 3q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)U_0^2\\
&\quad - \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{3}{2}\beta + i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + S_3 + q^2 \\ -6iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} - 2iq\frac{\partial}{\partial\theta} - \alpha q - i\frac{\partial q}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \end{array}\right)U_0^1.
\end{aligned}$$

Se $k = 1$ temos

$$\begin{cases} \Lambda U_1 + \Gamma U_0 &= F_1 \\ \frac{\partial U_1}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} &= G_1 \\ U_1\Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
U_1^1 &= G_1\\
U_1^2 &= F_1^0 - \Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)U_1^1\\
&\quad - \left(\begin{array}{l} \alpha H_1 + \beta - H_2 + 2\Delta_{\partial\Omega} + 2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} \\ +S_3 - 4iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - H_1 q \end{array}\right)U_0^1\\
U_1^3 &= F_1^1 - \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{3}{2}\beta + i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + S_3 + q^2 \\ -6iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} - 2iq\frac{\partial}{\partial\theta} - \alpha q - i\frac{\partial q}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \end{array}\right)U_1^1\\
&\quad - \Big(\alpha - 3q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)U_1^2 - 2U_0^4 - \Big(\alpha - 4q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta} + 2H_1\Big)U_0^3\\
&\quad - \left(\begin{array}{l} 2\beta + \alpha H_1 - 3qH_1 - 8iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} \\ +2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - 3H_2 + 2\Delta_{\partial\Omega} + 3S_3 \end{array}\right)U_0^2\\
&\quad - \left(\begin{array}{l} \frac{3}{2}\rho + \frac{3}{2}H_1\beta + \frac{1}{2}\Delta_{\partial\Omega}\alpha - \alpha H_2 + \alpha\Delta_{\partial\Omega} + \nabla_{\partial\Omega}\alpha\cdot\nabla_{\partial\Omega} \\ +i\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega} + 2H_2 q - i\frac{\partial H_2}{\partial\theta} - 2iH_2\frac{\partial}{\partial\theta} + 3\nabla_{\partial\Omega}H_1\cdot\nabla_{\partial\Omega} + 2H_3 + S_4 \\ +H_1S_3 - 6\ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(K\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)) - 2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}H_1 \\ +i\Delta_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta} - 5\nabla_{\partial\Omega}q\cdot\nabla_{\partial\Omega} - \Delta_{\partial\Omega}q - 2q\Delta_{\partial\Omega} \\ +18iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} - 6iH_1K\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} \end{array}\right)U_0^1.
\end{aligned}$$

Desta maneira podemos calcular a quantidade de termos que quisermos, determinando formalmente os coeficientes da solução u de (4.1).

4.1.1 Demonstração do Método

Precisamos mostrar que a solução u de (4.1) formalmente encontrada, de fato, nos fornece uma aproximação para "soluções exatas" do problema.

Nesta direção, consideremos L como um operador de $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})$ em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$. Já que o Bilaplaciano é um operador Fredholm de índice zero quando definido de $W^{4,p} \cap$

$W_0^{2,p}(\Omega,\mathbb{C})$ em $L^p(\Omega,\mathbb{C})$ e como L é uma perturbação compacta deste temos que L também é um operador Fredholm de índice zero. Assim a imagem de L é um subespaço fechado de $L^p(\Omega,\mathbb{C})$ com codimensão finita m igual à dimensão do núcleo de L^*.

Sejam $\{w_1,...,w_m\}$ uma base para um subespaço complementar de $\mathcal{R}(L)$ e $\{\phi_1,...,\phi_m\}$ uma base para $\mathcal{N}(L)$ com base dual associada $\{\tau_1,...,\tau_m\}$. Definimos

$$\mathcal{A}_L : L^p(\Omega,\mathbb{C}) \to W^{4,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{C})$$

$$\mathcal{C}_L : W^{3-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{4,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{C})$$

por

$$v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g) \in W^{4,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{C})$$

onde

$$Lv - f \in [w_1,...,w_m],$$

$$\frac{\partial v}{\partial N} = g \text{ em } \partial\Omega$$

e

$$\int_\Omega v\bar{\tau}_i = 0 \text{ para todo } 1 \le i \le m.$$

Observemos que tais operadores estão bem definidos. De fato, como o operador L de $W^{4,p}\cap W_0^{2,p}(\Omega,\mathbb{C})$ em $L^p(\Omega,\mathbb{C})$ é Fredholm de índice zero temos que

$$L^p(\Omega,\mathbb{C}) = \mathcal{R}(L) \oplus [w_1,...,w_m].$$

Dado $f = f_1 + f_2 \in L^p(\Omega,\mathbb{C})$ com $f_1 \in \mathcal{R}(L)$ e $f_2 \in [w_1,...,w_m]$ existe uma única $v \in W^{4,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{C})$ tal que $Lv = f_1$, $\frac{\partial v}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega v\bar{\tau}_i = 0$ para todo $1 \le i \le m$. (A existência de v segue de [18] e a unicidade da condição $\int_\Omega v\bar{\tau}_i = 0$ para todo $1 \le i \le m$).

Vamos agora mostrar que a solução formal u de (4.1) encontrada, de fato nos fornece uma aproximação para

$$v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g)$$

quando $w \to +\infty$ numa vizinhança de $\partial\Omega$ e quando as funções f e g são rapidamente oscilantes.

Mais precisamente, suponha que

$$u(x) = e^{wS(x)}\Big(U_0(x) + \frac{U_1(x)}{2w} + ... + \frac{U_N(x)}{(2w)^N}\Big)$$

$$F(x) = \Big(F_0 + \frac{F_1}{2w} + ... + \frac{F_N}{(2w)^N}\Big)$$

$$G(x) = \Big(G_0 + \frac{G_1}{2w} + ... + \frac{G_N}{(2w)^N}\Big)$$

$U_k|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial U_k}{\partial N}|_{\partial\Omega} = G_k$, U_k e F_k funções de classe C^{4+N-k} e C^{2+N-k} em Ω respectivamente e G_k função de classe C^{3+N-k} em $\partial\Omega$.

Suponha também que a região Ω e a função θ são de classe C^{5+N} e que os coeficientes a, b e c do operador diferencial L são funções de classe C^{N+2}, C^{N+1} e C^N em Ω respectivamente. Então, podemos escolher $S(y + tN(y))$ de classe C^{5+N} tal que para algum $\delta > 0$

$$(\nabla S)^2 = O(t^{4+N}),$$

$$\begin{cases} \Lambda U_k + \Gamma U_{k-1} + LU_k - F_k & = O(t^{2+N-k}) \\ \Gamma U_N + LU_{N-1} & = O(t) \end{cases}$$

uniformemente em $-\delta \leq t = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \delta$ $(0 \leq k \leq N$ e $U_{-2} = U_{-1} \equiv 0)$.

Escolha uma função real χ de classe C^∞, com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, $\chi \equiv 1$ quando $-\delta \leq t = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \delta$ cujo suporte esteja contido numa vizinhança próxima a este conjunto.

Mostraremos que

$$\|\chi u - v\|_{W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})} = O(w^{-N})$$

quando $w \to +\infty$ se

$$\|f - \chi (2w)^2 e^{wS} \sum_{k=0}^{N} \frac{F_k}{(2w)^k}\|_{L^p(\Omega, \mathbb{C})} = O(w^{-N})$$

e

$$\|g - e^{iw\theta} \sum_{k=0}^{N} \frac{G_k}{(2w)^k}\|_{C^3(\partial\Omega, \mathbb{C})} = O(w^{-N}).$$

Pelos cálculos e hipóteses descritas acima temos que

$$Lu - (2w)^2 e^{wS} \sum_{k=1}^{N} \frac{F_k}{(2w)^k} =$$

$$= \frac{e^{wS}}{(2w)^N} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{16}(2w)^{4+N}((\nabla S)^2)^2 + \frac{1}{2}(2w)^{3+N}\Big(\frac{1}{2}(\nabla S)^2 \Delta S \\ +\frac{1}{2}\nabla S \cdot \nabla[(\nabla S)^2] + (\nabla S)^2 \nabla S \cdot \nabla\Big) \\ +\frac{1}{2}(2w)^{2+N}\Big(\nabla[(\nabla S)^2] \cdot \nabla + (\nabla S)^2 \Delta + \frac{1}{2}\Delta[(\nabla S)^2]\Big) \end{array} \right] u \\ + \sum_{k=0}^{N} (2w)^{2+N-k}\Big(\Lambda U_k + \Gamma U_{k-1} + LU_{k-2} - F_k\Big) \\ +2w\Big(\Gamma U_N + LU_{N-1}\Big) + LU_N - F_k \end{array} \right\}$$

$$= \quad \frac{e^{wS}}{(2w)^N} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{16}(2wt)^{4+N}\frac{((\nabla S)^2)^2}{t^{4+N}} + \frac{1}{2}(2wt)^{3+N}\Big(\frac{1}{2}\frac{(\nabla S)^2\Delta S}{t^{3+N}} \\ +\frac{1}{2}\frac{\nabla S\cdot\nabla[(\nabla S)^2]}{t^{3+N}} + \frac{(\nabla S)^2\nabla S\cdot\nabla}{t^{3+N}}\Big) \\ +\frac{1}{2}(2wt)^{2+N}\Big(\frac{\nabla[(\nabla S)^2]\cdot\nabla}{t^{2+N}} + \frac{(\nabla S)^2\Delta}{t^{2+N}} + \frac{1}{2}\frac{\Delta[(\nabla S)^2]}{t^{2+N}}\Big) \end{array} \right] u \\ +\sum_{k=0}^{N}(2wt)^{2+N-k}\Big(\frac{\Lambda U_k}{t^{2+N-k}} + \frac{\Gamma U_{k-1}}{t^{2+N-k}} + \frac{LU_{k-2}}{t^{2+N-k}} - \frac{F_k}{t^{2+N-k}}\Big) \\ +(2wt)\Big(\frac{\Gamma U_N}{t} + \frac{LU_{N-1}}{t}\Big) + LU_N \end{array} \right\}.$$

Então, como χ é uma função C^∞ com suporte compacto contido numa vizinhança de $\partial\Omega$, temos para algum $C > 0$ que

$$\Big|L[\chi(x)u(x)] - \chi(x)(2w)^2\sum_{k=0}^{N}\frac{F_k(x)}{(2w)^k}\Big| \le \frac{e^{\frac{wt}{2}}}{(2w)^N}\Big\{C\sum_{k=0}^{N+4}|2wt|^k\Big\}$$

e portanto

$$L\chi u - f = O(w^{-N}) \tag{4.11}$$

uniformemente em Ω e $-\delta \le t \le 0$ quando $w \to +\infty$.

Como $v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g)$ temos que existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{cases} Lv & = f + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial N} & = g \text{ em } \partial\Omega \\ v & = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.12}$$

com $\int_\Omega v\bar{\tau}_i = 0$ para todo $1 \le i \le m$. Cada α_i é unicamente determinado, de fato, se $\{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$ é uma base de $\mathcal{N}(L^*)$ (isto considerando L como um operador de $W^{4,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})$ em $L^p(\Omega, \mathbb{C})$) temos para cada $1 \le j \le m$ que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_\Omega\bar{\sigma}_j w_i &= \int_\Omega\bar{\sigma}_j(Lv - f) \\ &= \int_{\partial\Omega}\{\bar{\sigma}_j\frac{\partial}{\partial N}\Delta v - \Delta v\frac{\partial\bar{\sigma}_j}{\partial N} - v\frac{\partial}{\partial N}\Delta\bar{\sigma}_j \\ &\quad +\Delta\bar{\sigma}_j\frac{\partial v}{\partial N} + a\bar{\sigma}_j\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial}{\partial N}(a\bar{\sigma}_j) + v\bar{\sigma}_j b\cdot N\Big\} - \int_\Omega\bar{\sigma}_j f \\ &= \int_{\partial\Omega}\Delta\bar{\sigma}_j g - \int_\Omega\bar{\sigma}_j f. \end{aligned}$$

Assim, como as funções σ_j, g e f são dadas, obtemos que os escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m$ são unicamente determinados se provarmos que a matriz $\Big[\int_\Omega\bar{\sigma}_j w_i\Big]_{i,j=1}^m$ é uma matriz inversível. Para isto, sejam $\gamma_1, ..., \gamma_m$ escalares tal que $\sum_{i=1}^m\gamma_i\int_\Omega\bar{\sigma}_j w_i = 0$ para todo $1 \le j \le m$. Tal condição significa que $\sum_{i=1}^m\gamma_i w_i \in \mathcal{N}(L^*)^\perp = [\sigma_1, ..., \sigma_m]^\perp$. Mas $\mathcal{N}(L^*)^\perp = \mathcal{R}(L)$, de onde obtemos que $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 0$, ou seja, a matriz $\Big[\int_\Omega\bar{\sigma}_j w_i\Big]_{i,j=1}^m$ é inversível.

Seja então

$$z = \chi u - v - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \phi_i$$

onde os escalares $\beta_1, ..., \beta_m \in \mathbb{C}$ são escolhidos de tal maneira que $\int_\Omega z\bar{\tau}_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq m$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i}^{m} \beta_i \int_\Omega \phi_i \bar{\tau}_j &= \int_\Omega (\chi u)\bar{\tau}_j - \int_\Omega v\bar{\tau}_j \\
&= \int_\Omega (\chi u)\bar{\tau}_j.
\end{aligned}$$

Observe que a matriz $\left[\int_\Omega \phi_i \bar{\tau}_j\right]_{i,j=1}^{m}$ também é uma matriz inversível, a demonstração é análoga a de que a matriz $\left[\int_\Omega \bar{\sigma}_j w_i\right]_{i,j=1}^{m}$ é invesível.

Note que em $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial N} &= \frac{\partial}{\partial N}(\chi u - v) \\
&= e^{iw\theta} \sum_{k=0}^{N} \frac{G_k}{(2w)^k} - g \\
&= O(w^{-N})
\end{aligned}$$

uniformemente em $\partial\Omega$ quando $w \to +\infty$.

Agora, pelo Teorema de Riemann-Lebesgue

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \alpha_i \int_\Omega \bar{\sigma}_j w_i &= \int_{\partial\Omega} \Delta\bar{\sigma}_j g - \int_\Omega \bar{\sigma}_j f \\
&= \sum_{k=0}^{N} (2w)^{-k} \int_{\partial\Omega} e^{iw\theta} \Delta\bar{\sigma}_j G_k - \sum_{k=0}^{N} (2w)^{-k+2} \int_{\partial\Omega} e^{wS} \bar{\sigma}_j (\chi F_k) \quad (4.13) \\
&\quad + O(w^{-N}) \\
&= O(w^{-N})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i}^{m} \beta_i \int_\Omega \phi_i \bar{\tau}_j &= \int_\Omega (\chi u)\bar{\tau}_j \\
&= \int_\Omega \Big(\chi e^{wS} \sum_{k=0}^{N} \frac{U_k}{(2w)^k}\Big)\bar{\tau}_j \qquad (4.14) \\
&= O(w^{-N})
\end{aligned}$$

quando $w \to +\infty$ já que F_k, G_k e U_k são respectivamente de classe C^{2+N-k}, C^{3+N-k} e C^{4+N-k} para $0 \leq k \leq N$, ou seja, $|\alpha_i| = O(w^{-N})$ e $|\beta_i| = O(w^{-N})$ para todo $1 \leq i \leq m$ quando $w \to +\infty$.

Como $Lz = L(\chi u) - Lv$ segue de (4.11), (4.12) e (4.13) que

$$\begin{cases} Lz & = O(w^{-N}) \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial N} & = O(w^{-N}) \text{ em } \partial\Omega \\ z & = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.15}$$

quando $w \to +\infty$.

Logo podemos concluir de (4.14) e (4.15) que

$$\|\chi u - v\|_{W^{4,p}(\Omega,\mathbb{C})} = \|z - \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i\|_{W^{4,p}(\Omega,\mathbb{C})} = O(w^{-N})$$

quando $w \to +\infty$ de onde segue o resultado.

4.2 Aplicações

4.2.1 O operador Θ

Para concluirmos o Teorema 29 é necessário mostrar que se o operador

$$\begin{aligned} \Theta(\dot{h}) \quad = \quad & \Big\{\dot{h} \cdot N \frac{\partial}{\partial N}\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big] \\ & +2\Big[\Delta v \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N \Delta v\Big)\Big) - \Delta u \Delta\Big(\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(\dot{h} \cdot N \Delta u\Big)\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

definido em (2.34) é de posto finito então

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big] \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{4.16}$$

Para isto vamos utilizar o Método de Soluções Rapidamente Oscilantes descrito na seção anterior e o seguinte Lema:

Lema 39 *Sejam S uma variedade C^1; A e $B \in L^2(S)$ com suporte compacto; θ uma função a valores reais C^1 definida em S com $\nabla_S \theta \neq 0$ na união dos suportes de A e B; $E \subset L^2(S)$ um subespaço de dimensão finita e $u(w) \in E$ para todo $w \in \mathbb{R}$ onde*

$$u(w) = A\cos(w\theta) + B\sin(w\theta) + o(1) \text{ em } L^2(S)$$

quando $w \to +\infty$. Então $A = B = 0$ em S.

Prova. Ver [5]. ∎

De fato mostraremos que o operador Θ de posto finito definido em (2.34) satisfaz

$$\Theta\Big(\cos(w\theta)\Big) = \cos(w\theta)\frac{\partial}{\partial N}\Big[(\Delta u)^2 - (\Delta v)^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}) \tag{4.17}$$

quando $w \to +\infty$ obtendo então pelo Lema 39 a relação (4.16).

Para mostrarmos (4.17), aplicaremos o método da seção 4.1 calculando as soluções aproximadas de

$$\Big[\Delta v \Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta v) - \Delta u \Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big]\Big|_{\partial\Omega} \tag{4.18}$$

quando $w \to +\infty$.

Da seção 4.1 (usando as mesmas notações) temos que

$$\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(e^{wi\theta}\Delta u\Big) = e^{wS}U_0 + O(w^{-1})$$

numa vizinhança de $\partial\Omega \cap \bar{\Omega}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(e^{wi\theta}\Delta u\Big)\Big|_{\partial\Omega} &= \Big(H\frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial^2}{\partial N^2}\Big)\Big(e^{wS}U_0\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}) \\
&= \Big(H\partial_t + \partial_{tt}\Big)\Big[e^{wS}\Big(U_0^0 + U_0^1 t + U_0^2\frac{t^2}{2!} + ...\Big)\Big]\Big|_{t=0} \\
&\quad +O(w^{-1}) \qquad \text{(coordenadas normais)} \\
&= e^{wi\theta}\Big((2w)U_0^1 + HU_0^1 + U_0^2\Big) + O(w^{-1}).
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$G_k = U_k^1 = \begin{cases} \Delta u|_{\partial\Omega} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

temos que

$$\Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(e^{wi\theta}\Delta u\Big)\Big|_{\partial\Omega} = e^{wi\theta}\Big(\Delta u(2w) + \Big[H\Delta u + U_0^2\Big]\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}).$$

Analogamente obtemos que

$$\Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}\Big(e^{wi\theta}\Delta v\Big)\Big|_{\partial\Omega} = e^{wi\theta}\Big(\Delta v(2w) + \Big[H\Delta v + V_0^2\Big]\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}).$$

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\Big[\Delta v \Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta v) - \Delta u \Delta \mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big]\Big|_{\partial\Omega} = \\
&= e^{wi\theta}\Big[(\Delta v)^2(2w + H) + \Delta v V_0^2 - (\Delta u)^2(2w + H) - \Delta u U_0^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}) \\
&= e^{wi\theta}\Big[\Delta v V_0^2 - \Delta u U_0^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1})
\end{aligned} \tag{4.19}$$

já que $(\Delta u)^2 = (\Delta v)^2$ em $\partial\Omega$.

Pela relação (4.10) podemos determinar U_0^2 e V_0^2, de fato,

$$U_0^2 = \Big(q - \alpha - 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Delta u\Big|_{\partial\Omega} \text{ e}$$
$$V_0^2 = \Big(q - \alpha - 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Delta v\Big|_{\partial\Omega}.$$

Logo obtemos que

$$\begin{aligned}\Big(\Delta v V_0^2 - \Delta u U_0^2\Big)\Big|_{\partial\Omega} &= \Big\{(q-\alpha)\Big[(\Delta v)^2 - (\Delta u)^2\Big] \\ &\quad -2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[(\Delta v)^2 - (\Delta u)^2\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \\ &= -2i\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega}\Big[(\Delta v)^2 - (\Delta u)^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} \\ &= 0 \text{ em } \partial\Omega\end{aligned}$$

pois por hipótese $(\Delta u)^2 = (\Delta v)^2$ em $\partial\Omega$. Assim obtemos que

$$\Big[\Delta v\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta v) - \Delta u\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big]\Big|_{\partial\Omega} = O(w^{-1}) \tag{4.20}$$

quando $w \to +\infty$.

Como

$$\Big[\Delta v\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\cos(w\theta)\Delta v) - \Delta u\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\cos(w\theta)\Delta u)\Big]\Big|_{\partial\Omega} =$$
$$Re\Big\{\Big[\Delta v\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta v) - \Delta u\Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big]\Big|_{\partial\Omega}\Big\}$$

obtemos (4.17) de (4.20).

4.2.2 O operador Υ

Para concluirmos o Teorema 38 é necessário mostrar que se o operador

$$\begin{aligned}\Upsilon(\dot h) &= \Big\{\dot h\cdot N\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(\dot h\cdot N\Delta u)\Big) \\ &\quad +\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(\dot h\cdot N\Delta u)\Big)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\dot h\cdot N\Delta v)\Big]\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

definido em (3.34) é de posto finito então

$$\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v) \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{4.21}$$

Para isto vamos utilizar o Método de Soluções Rapidamente Oscilantes descrito na seção 4.1 e o Lema 39. De fato, mostraremos que o operador Υ de posto finito definido em (3.34) satisfaz

$$\Upsilon\Big(\cos(w\theta)\Big) = \cos(w\theta)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta u\Delta v)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}) \tag{4.22}$$

quando $w \to +\infty$ obtendo então pelo Lema 39 a relação (4.21).

Para obtermos (4.22) precisamos mostrar que

$$\Big\{\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(\cos(w\theta)\Delta u)\Big)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\cos(w\theta)\Delta v)\Big]$$
$$-\Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(\cos(w\theta)\Delta u)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega} = O(w^{-1}) \tag{4.23}$$

quando $w \to +\infty$.

Para isto, sejam $e^{wS}\sum_{k=0}^{N}\frac{U_k}{(2w)^k}$ a solução aproximada de $\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)$ definida pelo sistema

$$\begin{cases} \Lambda U_k + \Gamma U_{k-1} + L(u)U_{k-2} = 0 \\ \frac{\partial U_k}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \Delta u|_{\partial\Omega} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \\ U_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

e $e^{wS}\sum_{k=0}^{N}\frac{V_k}{(2w)^k}$ a solução aproximada de

$$\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(e^{wi\theta}\Delta v)$$

definida pelo sistema

$$\begin{cases} \Lambda V_k + \Gamma V_{k-1} + L^*(u)V_{k-2} = \Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)U_{k-2} \\ \frac{\partial V_k}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -\Delta v|_{\partial\Omega} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \\ V_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

seguindo as notações da seção 4.1. (Lembre-se que $U_{-2} = U_{-1} \equiv 0$.)

Pelas coordenadas normais obtemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{C}_{L(u)}\Big(e^{wi\theta}\Delta u\Big)\Big|_{\partial\Omega} &= \Big(H\frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial^2}{\partial N^2}\Big)\Big(e^{wS}\sum_{k=0}^{N}\frac{U_k}{(2w)^k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-N}) \\
&= \Big(H\partial_t + \partial_{tt}\Big)\Big(e^{wS}\sum_{k=0}^{N}\frac{\sum_{i\geq 1}\frac{t^i}{i!}U_k^i}{(2w)^k}\Big)\Big|_{t=0} + O(w^{-N}) \\
&= e^{wi\theta}\Big(H\sum_{k=0}^{N}\frac{U_k^1}{(2w)^k} + 2w\sum_{k=0}^{N}\frac{U_k^1}{(2w)^k} + \sum_{k=0}^{N}\frac{U_k^2}{(2w)^k}\Big) + O(w^{-N}) \\
&= e^{wi\theta}\Big(\Delta u(2w) + \Big[H\Delta u + U_0^2\Big]\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1})
\end{aligned}$$

pois em tais coordenadas

$$U_k^1 = \frac{\partial U_k}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \Delta u|_{\partial\Omega} & k = 0 \\ 0 & k > 0. \end{cases}$$

Analogamente obtemos que

$$\Delta\Big(e^{wS}\sum_{k\geq 0}\frac{V_k}{(2w)^k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} = e^{wi\theta}\Big(-\Delta v(2w) + \Big[-H\Delta v + V_0^2\Big]\Big)\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1})$$

pois

$$V_k^1 = \frac{\partial V_k}{\partial N}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -\Delta v|_{\partial\Omega} & k=0 \\ 0 & k>0. \end{cases}$$

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}\Big\{\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(e^{wi\theta}\Delta v)\Big] - \Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \\ = e^{wi\theta}\Big[\Delta u V_0^2 - 2(\Delta u\Delta v)(2w+H) - \Delta v U_0^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1}) \\ = e^{wi\theta}\Big[\Delta u V_0^2 - \Delta v U_0^2\Big]\Big|_{\partial\Omega} + O(w^{-1})\end{aligned} \tag{4.26}$$

já que $\Delta u\Delta v\equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Pela relação (4.10) podemos determinar U_0^2 e V_0^2, de fato,

$$U_0^2 = -\Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Delta u\Big|_{\partial\Omega} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} V_0^2 &= \Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)U_{-2}\Big|_{\partial\Omega} + \Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Delta v\Big|_{\partial\Omega} \\ &= \Big(\alpha - q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Delta v\Big|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

pois $U_{-2}\equiv 0$ numa vizinhança de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$.

Portanto temos que

$$\begin{aligned}\Big(\Delta u V_0^2 - \Delta v U_0^2\Big)\Big|_{\partial\Omega} &= \Big\{(\alpha-q)(\Delta u\Delta v) + 2i\Delta u\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta v \\ &\quad +(\alpha-q)(\Delta v\Delta u) + 2i\Delta v\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta u\Big\}\Big|_{\partial\Omega} \\ &= 2i\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta u\Delta v)\Big|_{\partial\Omega} \\ &= 0 \text{ em } \partial\Omega\end{aligned}$$

já que $\Delta u\Delta v = 0$ em $\partial\Omega$.

Assim obtemos que

$$\begin{aligned}&\Big\{\Delta u\Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(e^{wi\theta}\Delta v)\Big] \\ &-\Delta v\Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega} = O(w^{-1})\end{aligned} \tag{4.27}$$

quando $w \to +\infty$.

Como

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Delta u \Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(\cos(w\theta)\Delta u)\Big)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(\cos(w\theta)\Delta v)\Big]\\
&-\Delta v \Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(\cos(w\theta)\Delta u)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\\
&= Re\Big\{\Big\{\Delta u \Delta\Big[\mathcal{A}_{L^*(u)}\Big(\Big(\frac{\partial L^*}{\partial w}(u)\cdot v\Big)\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big) - \mathcal{C}_{L^*(u)}(e^{wi\theta}\Delta v)\Big]\\
&-\Delta v \Delta\Big(\mathcal{C}_{L(u)}(e^{wi\theta}\Delta u)\Big)\Big\}\Big|_{\partial\Omega}\Big\}
\end{aligned}
$$

obtemos (4.22) de (4.27).

Referências Bibliográficas

[1] J. W. Rayleigh, *The Theory of Sound*, Dover, 1945.

[2] J. Hadamard, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.

[3] S. Agmon, *The L^p approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. 13, 405-448 (1959).

[4] D. B. Henry, *Topics in Nonlinear Analysis*, UnB, 1982.

[5] D. B. Henry, *Perturbation of the Boundary in Boundary Value Problems of PDEs*, Unpublished notes, 1982.

[6] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1980.

[7] A. M. Micheletti, *Pertubazione dello spettro dell operatore de Laplace in relazione ad una variazone del campo*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26(1972), 151-169.

[8] A. M. Micheletti, *Pertubazione dello spettro di un operatore ellittico di tipo variazionale, in relazione ad una variazone del campo*, Ann. Mat. Pura Appl. 4, 97(1973), 267-281.

[9] K. Uhlenbeck, *Generic Properties of Eigenfunctions*, American Journal Mathematics, vol. 98, No. 04 (1976), 1059-1078.

[10] R. Abraham and J. Robin, *Transversal Mappings and Flows*, W. A. Benjamin, 1967.

[11] Saut and Teman, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations, 4(1979) no. 3, 293-319.

[12] E. Browder, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 45 (1959), 385-372.

[13] S. Agmon, A. Douglis and Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfyng general boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 12 (1959), 623-727. American Journal Mathematics, vol. 98, No. 04 (1976), 1059-1078.

[14] S. Luckhaus, *Existence and regularity of weak solutions to the Dirichlet problem for semilinear elliptic system of higher order*, Journal für Mathematik, May (1978), 192-207.

[15] J. Simon, *Differentiation with respect to the domain in boundary value problems*, Numer. Func. Anal. Optim., 2(1980), 649-687.

[16] Jaime H. Ortega and Enrique Zuazua, *Generic simplicity of the spectrum and stabilization for a plate equation*, SIAM J. Control Optim. vol. 39, No. 5 (2001), 1585-1614.

[17] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt Rinehart and Winston, 1969.

[18] J. L. Lions and E. Megenes, *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, vol. 1, Springer-Verlag, New York (1972).

[19] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London (1969).

[20] L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Grundlehren 116 (1964).

[21] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995.

[22] A. L. Pereira, *Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 2(1995) No. 1, 63-109.

[23] A. L. Pereira and M. C. Pereira, *A generic property for the eigenvalue of the Laplacian*, TMNA 20(2002), 283-313.

[24] L. A. F. de Oliveira, A. L. Pereira and M. C. Pereira, *Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with respect to variation of domain*, Trabalhos do Departamento de Matemática 2003 09, preprint.

[25] M. C. Pereira, *Aplicações do teorema da transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elípticos*, Dissertação apresentada ao IME-USP, 2001.