MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 7 Técnicas de integração

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Em particular o aluno ou aluna **não deve se limitar aos exercícios deste guia**, deve também fazer exercícios da lista e da bibliografia recomendada, pois integral se aprende por meio de vários exercícios.

Mudança de variável

Ex: Calcule: $\int_a^b \cos(x^2)\, 2x\, dx$

Abordagem informal: $y = x^2$; $\frac{dy}{dx} = 2x$; $\quad dy = 2xdx$

$$\begin{aligned}\int \cos(x^2)\, 2x\, dx &= \int \cos(y)\, dy \\ &= \sin(y) + c \\ &= \sin(x^2) + c\end{aligned}$$

Assim $\int_a^b \cos(x^2)\, 2x\, dx = \sin(x^2)\big|_a^b = \sin(b^2) - \sin(a^2)$

Proposição 1 (mudança de variável)

Sejam $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *e* f *uma função continua em* $g[a, b]$. *Então:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

onde $\frac{d}{dy}F(y) = f(y)$

Dem: Pela regra da cadeia $(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)$. Isto e o teorema fundamental do Cálculo termina a prova.

Mudança de variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Ex: $\int_a^b \cos(x^2)\, 2x\, dx$

Neste caso $g(x) = x^2$; $g'(x) = 2x$; $f(y) = \cos(y)$; $F(y) = \sin(y)$
Assim

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(x^2)\, 2x\, dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} \cos(y)\, dy \\ &= \sin(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \sin(x^2)\Big|_a^b \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Prob: Calcule:

1. $\int_a^b \sin^3(x)\cos(x)dx$

2. $\int_a^b x\sqrt{1+x}dx$

3. $\int_a^b \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx$

4. $\int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2}dx$

Mudança de variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)|_a^b = F(y)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Sol: $\int_a^b \sin^3(x)\cos(x)dx$

Escolhendo $g(x) = \sin(x)$ temos $g'(x) = \cos(x)$. Assim:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^3(x)\cos(x)dx &= \int_a^b g(x)^3 g'(x)dx \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} (y)^3 dy \\
&= \frac{y^4}{4}\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \frac{(\sin(x))^4}{4}\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F\circ g(x)|_a^b = F(y)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Sol: $\int_a^b x\sqrt{1+x}dx$

Escolha $g(x) = (1+x)$ Assim $g'(x) = 1$ e $x = g(x) - 1$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\sqrt{1+x}dx &= \int_a^b (g(x)-1)\sqrt{g(x)}g'dx \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} (y-1)\sqrt{y}dy \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} (y^{3/2} - y^{1/2})dy \\
&= \left(\frac{2y^{5/2}}{5} - \frac{2y^{3/2}}{3}\right)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \left(\frac{2(1+x)^{5/2}}{5} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3}\right)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\big|_a^b = F(y)\big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Sol: $\int_a^b \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx.$

Escolha $g(x) = x^3 + x$. Então $g'(x) = 3x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx &= \int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{dy}{y} \\
&= \ln|y|\big|_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \ln\left|x^3+x\right|\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$

Sol: $\int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2}dx$

Escolha $g(x) = (x+1)$. Então $g'(x) = 1$ e $x = g(x) - 1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2}dx &= \int_a^b \frac{2(g(x)-1)}{(g(x))^2} g'(x)dx \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{2(y-1)}{(y)^2} dy \\
&= 2\Big(\ln|y| + y^{-1} \Big)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\
&= 2\Big(\ln|x+1| + (x+1)^{-1} \Big)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Prob: Calcule:

1. $\int \cos^2(x)dx$

2. $\int \sin^2(x)dx$

3. $\int \cos^3(x)dx$

4. $\int \sin^3(x)dx$

5. $\int \tan(x)dx$

Integral por partes

Teorema 2 (Integração por partes)
Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Enão $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Dem:

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x)|_a^b &= \int_a^b \frac{d}{dx} f(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b f'(x)g(x)dx \\
&+ \int_a^b f(x)g'(x)dx
\end{aligned}
$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ex: $\int_a^b x\exp(x)\,dx$.

Escolha: $g(x) = x$ e $f'(x) = \exp(x)$.
Assim $g'(x) = 1$ e $f(x) = \exp(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b x\exp(x)\,dx &= x\exp(x)|_a^b - \int_a^b \exp(x)1\,dx \\ &= x\exp(x)|_a^b - \exp(x)|_a^b\end{aligned}$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

1. $\int x^2 \sin(x) dx$

2. $\int \ln(x) dx$

3. $\int_a^b \exp(x)\cos(x) dx$

Int. por partes: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)| - \int f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int x^2 \sin(x)dx$. Escolhemos: $g(x) = x^2$ e $f'(x) = \sin(x)$

$$\int x^2 \sin(x)dx \quad = \quad -\cos(x)x^2 + \int 2x\cos(x)dx$$

Para $\int 2x\cos(x)dx$ escolhemos: $g(x) = 2x$ e $f'(x) = \cos(x)$

$$\int 2x\cos(x)dx \quad = \quad 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)dx$$

Juntando temos:

$$\int x^2 \sin(x)dx = -\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int \ln(x)dx$. Escolhemos $g(x) = \ln(x)$ e $f'(x) = 1$

$$\int \ln(x)1dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}xdx$$

Assim:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int_a^b \exp(x)\cos(x)dx$ seja $g(x) = \cos(x)$ e $f'(x) = \exp(x)$

$$\underline{\int_a^b \exp(x)\cos(x)dx} = \cos(x)\exp(x)|_a^b + \int_a^b \sin(x)\exp(x)dx$$

Para $\int_a^b \sin(x)\exp(x)dx$ seja $g(x) = \sin(x)$ e $f'(x) = \exp(x)$

$$\int_a^b \sin(x)\exp(x)dx = \sin(x)\exp(x)|_a^b - \underline{\int_a^b \cos(x)\exp(x)dx}$$

Substituindo a segunda equação na primeira temos:

$$2\underline{\int_a^b \exp(x)\cos(x)dx} = \cos(x)\exp(x)|_a^b + \sin(x)\exp(x)|_a^b$$