MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 2 : Derivada: Regras de derivação e Exponencial

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras,ideias de demonstrações, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreende-las melhor.

Objetivo:

(1) Motivação:taxa de variação média

(2) Definição de derivada

(3) Reta tangrente

(4) Derivada das funções básicas

(5) Regras básicas de derivações

(6) Regra da cadeia

(7) Função exponencial e logarítma

Motivação:taxa de variação média

Dado uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **uma taxa de variação média em** x_0 é definida como $m(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Ex: Se $f = -x^2 + 4$, observamos que a taxa $\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = 2 > 0$ e olhando o gráfico vemos que de fato a função é crescente. Este exemplo **sugere** que quanto menor Δx mais informação a taxa pode conter sobre o comportamento de f próximo a x_0, em particular sobre seu crescimento ou descrescimento próximo a x_0. Isto nos **motiva** a considerar o limite das taxas de variação média quando $\Delta x \to 0$ e assim introduzir o conceito da derivada de f, a qual será utilizada nas aulas não só para determinar crescimento e decrescimento da função mas também para detectar candidatos a máximos e mínimos locais.

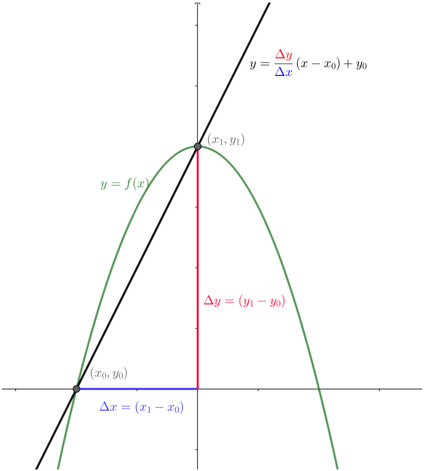


Figura: $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0$

Definição de derivada

Definição 1

Dado uma $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O limite abaixo (quando existir) é chamado **derivada** no ponto $x_0 \in I$.

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Obs:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

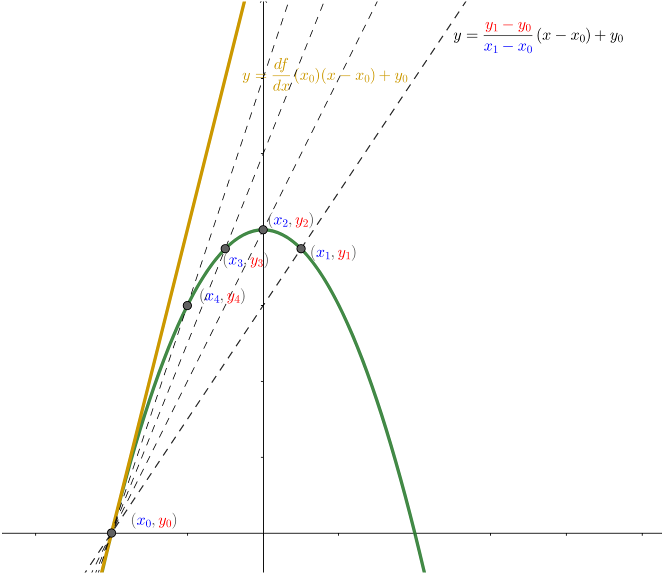


Figura: a medida que $x_i \to x_0$ as inclinações $m_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$ convergem para $\frac{df}{dx}(x_0)$

Reta tangrente

Proposição 2

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *função diferenciável em* x_0. *Então*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + R(x - x_0)$$

onde $R : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ *é uma função tal que* $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

Definição 3

Dado $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável em x_0 a reta

$$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

é chamada **reta tangente**.

Obs Toda função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável é continua, mas nem toda função continua é diferenciável.

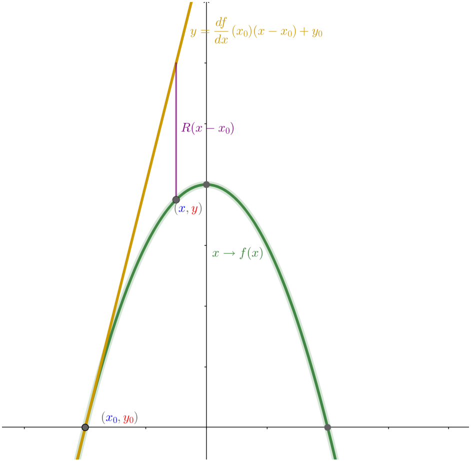


Figura: Reta tangente $y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$ **aproxima** o gráfico de f perto do ponto x_0

Prob: Sejam $f(x) = x^2$.

1. Calcule $f'(x)$.
2. Calcule $f'(3)$ e $f'(-3)$
3. Qual a inclinação da reta tangente do gráfico de f no ponto $(3, 9)$.
4. Qual a inclinação da reta tangente do gráfico de f no ponto $(-3, 9)$.
5. Próximo a $x_0 = 3$ a função f está crescendo ou descrescendo?
6. Próximo a $x_0 = -3$ a função f está crescendo ou descrescendo?
7. Quanto vale $f'(0)$?
8. $x_0 = 0$ é um ponto de máximo ou mínimo local de f?

Derivada das funções básicas

Proposição 4

1. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ *para* $n \in \mathbb{Q}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right) = \cos(x)$
3. $\frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right) = -\sin(x)$
4. $\frac{d}{dx}c = 0$.

Prob: Seja $h(x) = x^3$.

1. Calcule $h'(x)$
2. Calcule $h'(2)$
3. Quanto é a inclinação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $(2, 8)$?
4. Calcule $h'(0)$
5. $x_0 = 0$ é ponto de máximo, mínimo ou nenhum dos dois?

Regras básicas de derivações

Proposição 5

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis e* $k \in \mathbb{R}$. *Então:*

1. $\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$
2. $\frac{d}{dx}(f-g)(x) = \frac{df}{dx}(x) - \frac{dg}{dx}(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$
4. $\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{df}{dx}(x)$.

Ex:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + x^2\cos(x)) &= \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(x^2 cos(x)) \\
&= 3\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(x^2)\cos(x) + x^2\frac{d}{dx}(cos(x)) \\
&= (\frac{3}{2})x^{-\frac{1}{2}} + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)
\end{aligned}$$

Regra da cadeia

Teorema 6 (Regra da cadeia)

Sejam $g : A \to B$ e $h : B \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis. Então* $f = h \circ g$ *é diferenciável. Além disto:*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}\left(g(x_0)\right)\frac{dg}{dx}(x_0)$$

Ex: Seja $f(x) = \sin(x^2)$. Então $h(y) = \sin(y)$, $g(x) = x^2$, $\frac{dh}{dy}(y) = \cos(y)$, $\frac{dg}{dx}(x) = 2x$. Assim pelo teorema:

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos\left(x^2\right)(2x)$$

Mais exemplos:

Visto que: $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}\Big(g(x_0)\Big)\frac{dg}{dx}(x_0)$ para $f = h \circ g$ temos:

$$\frac{d}{dx}\cos(x^3 - \sin(x)) = -\sin(x^3 - \sin(x))(3x^2 - \cos(x))$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(\sin(x^2)) &= -\sin(\sin(x^2))\frac{d}{dx}\sin(x^2) \\
&= -\sin(\sin(x^2))\frac{d}{dx}\sin(x^2) \\
&= -\sin(\sin(x^2))\cos\left(x^2\right)(2x)
\end{aligned}$$

Dado uma função g diferenciável, com $g(x) \neq 0$, podemos usar a regra da cadeia para calcular (em termos de g') a derivada do quociente, ou seja: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)^{-1} = \frac{-1}{g(x)^2}\frac{dg}{dx}(x)$. Este resultado junto com a regra do produto, nos permite calcular a derivada do quociente das funções.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Se $f : A \to B$ admite uma **inversa** $f^{-1} : B \to A$ e ambas são diferenciáveis, quanto vale (em termos de $\frac{df}{dx}(x_0)$) a derivada $\frac{df^{-1}}{dy}\left(y_0\right)$ para $y_0 = f(x_0)$?

Uma vez que $f^{-1}(f(x)) = x$ temos, derivando ambos os lados, que:

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(y_0\right)\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dx}{dx} = 1$$

assim concluimos:

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(y_0\right) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)} \tag{1}$$

Ex: $\frac{d\arcsin}{dy}\left(y_0\right) = \frac{1}{\frac{d\sin}{dx}(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1-{y_0}^2}}$

Resumo: Para f, g, h (e f^{-1} no último item) funções diferenciáveis temos:

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Q}$.
2. $\frac{d}{dx}\big(\sin(x)\big) = \cos(x)$
3. $\frac{d}{dx}\big(\cos(x)\big) = -\sin(x)$
4. $\frac{d}{dx}c = 0.$
5. $\frac{d}{dx}(f \pm g)(x) = \frac{df}{dx}(x) \pm \frac{dg}{dx}(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$
7. $\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{df}{dx}(x)$
8. $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}\Big(g(x_0)\Big)\frac{dg}{dx}(x_0)$ para $f = h \circ g$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$, com $g(x) \neq 0$,
10. $\frac{df^{-1}}{dy}\Big(y_0\Big) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}$ onde $f^{-1} \circ f(x) = x$ e $f \circ f^{-1}(y) = y$

Função exponencial e logarítma

Motivação:

Qual função atende a **E.D.O** (2) (i.e.,equação diferencial ordinária) com condição inicial (3) abaixo ?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f) &= f \qquad (2) \\ f(0) &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Primeiro tentemos algo menos ambicioso. Tentemos encontrar um polinômio P_n tal que $P_n(0) = 1$ e $\frac{d}{dx}P_n(x) \approx P_n(x)$ (estejam **próximos**) pelo menos para x pequeno.

Por exemplo para $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ temos que ter $P_3(0) = a_0 = 1$. Como desejamos:

$$\frac{d}{dx}P_3(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \approx P_3(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Devemos igualar as potências (da menor para a maior). Concluimos que: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$.

Podemos continuar a calibrar polinômios de grau $n > 3$, e quanto maior o n melhor a aproximação. E se o polinômio for um polinômio infinito? Tal discussão **motiva** a definição a seguir:

Definição: Considere o polinômio

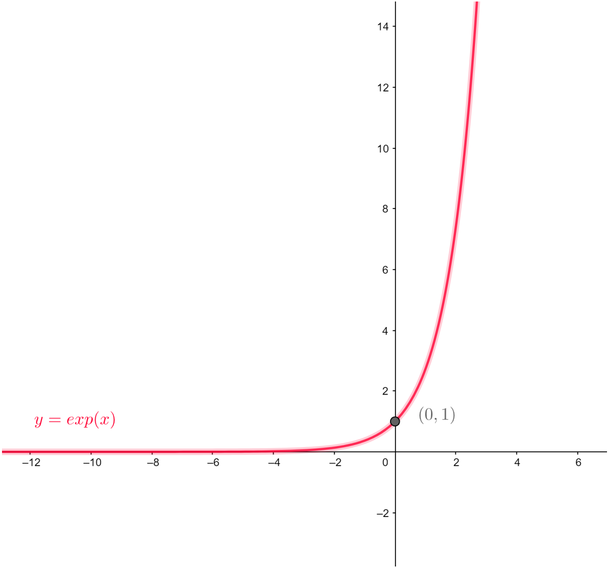
$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

A função **exponencial** é definida como

$$\boxed{\exp(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x)}$$

É possível demonstrar não só que $f(x) = \exp(x)$ está bem definida, mas também que ela é a **única função** que atende a E.D.O

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= f(x) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$



$y = exp(x)$
$(0, 1)$
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−12
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6

Teorema 7

Dado uma função $g : I \to \mathbb{R}$ classe C^1 e um ponto $y_0 \in I$. Então existe uma única função $f : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= g(f(x)) \\ f(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Do teorema acima podemos concluir o resultado:

Proposição 8

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$

$e := \exp(1)$ (**número de Euler**)

$e^x = \exp(x)$ (**notação**) Assim $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

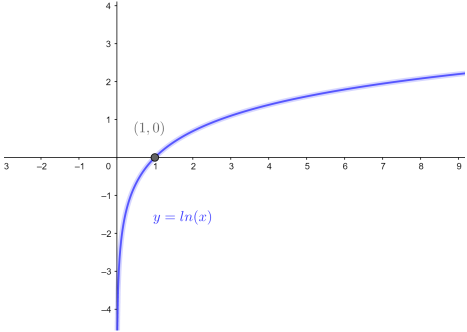
Proposição 9

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$

Definição 10

Dado a função $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definimos a função **logarítmo (natural)** $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como a função inversa da exponencial ou seja:

$$
\begin{aligned}
\ln \circ \exp(x) &= x \\
\exp \circ \ln(y) &= y
\end{aligned}
$$



Aplicando a derivada de função inversa (vide Eq. (1))

Proposição 11

$\frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{y}$

Da definição de ln e da Proposição 8 temos:

Proposição 12

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

Da proposição acima concluimos:

Proposição 13

$\ln(a^n) = n\ln(a) \text{ } onde \text{ } n \in \mathbb{Q}$

Definição 14

Dado $a > 0$ definimos $a^x = \exp(x \ln(a))$

Pela regra da cadeia (Teorema 6) concluimos:

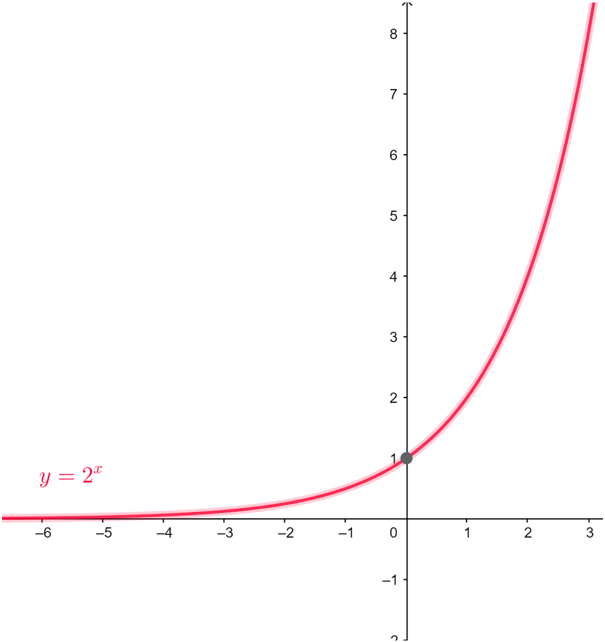
Proposição 15

Para $a > 0$ *temos* $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a)$

Ex: $\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \ln(2)$

Obs $\sqrt[x]{x} = x^{1/x} := \exp(\frac{1}{x} \ln(x))$ ou mais geralmente $(f(x))^{g(x)}$ para $f(x) > 0$ podemos **definir**

$$(f(x))^{g(x)} := \exp(g(x) \ln(f(x)))$$



8
7
6
5
4
3
2
1
$y = 2^x$
–6
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
–1

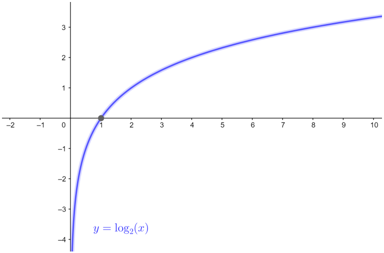
Definição 16

Seja $a > 0$, definimos a função $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como a função inversa de a^x

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \\ a^{(\log_a(y))} &= y \end{aligned}$$

Aplicando a derivada da função inversa (vide Eq. 1)

$$\frac{d}{dy}\log_a(y) = \frac{1}{y\ln(a)}$$

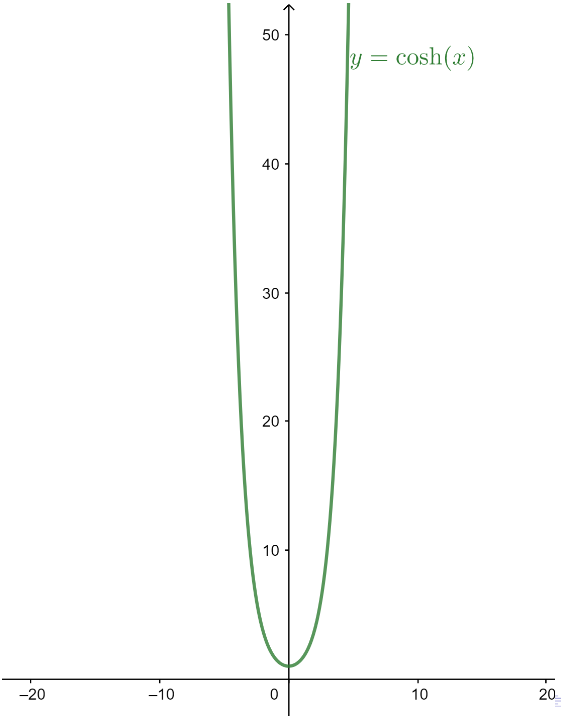


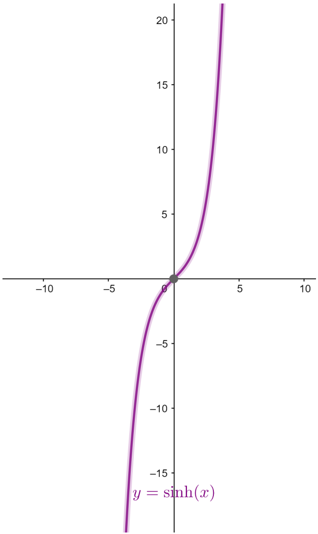
Definimos:

$$\boxed{\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ; \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Obs: $\cosh(0) = 1 \quad \sinh(0) = 0$

Obs: $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$


$y = \cosh(x)$
50
40
30
20
10
−20
−10
0
10
20



20
15
10
5
–10
–5
0
5
10
–5
–10
–15
$y = \sinh(x)$

Defina as funções:

$$\alpha_1(t) = x(t) = \cosh(t)\,; \quad \alpha_2(t) = y(t) = \sinh(t)$$

Observe que $x(t)^2 - y(t)^2 = 1$. Assim a imagem da curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ está contida no ramo da **hiperbole**

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |, x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

ou seja α é uma parametrização da curva C.

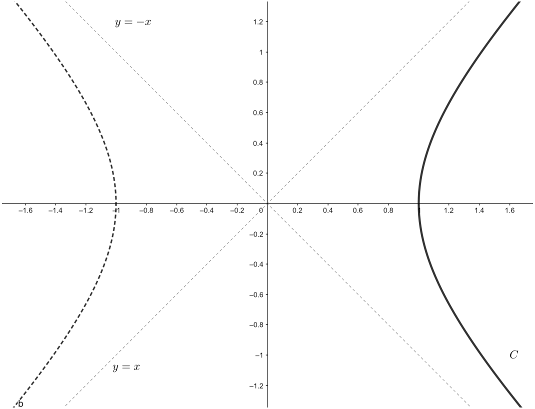


Figura: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |, x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$

Prob: Verifique que $f(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$ é solução da E.D.O de segunda ordem com condições iniciais

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d^2 x}(x) + f(x) &= 0 \\ \frac{df}{dx}(0) &= a_1 \\ f(0) &= a_0 \end{aligned}$$

Comentário: $f(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$ é de fato **única** solução da E.D.O.

Prob: Verifique que $f(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x)$ é solução da E.D.O de segunda ordem com condições iniciais

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d^2 x}(x) - f(x) &= 0 \\ \frac{df}{dx}(0) &= a_1 \\ f(0) &= a_0 \end{aligned}$$

Comentário: $f(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x)$ é de fato **única** solução da E.D.O.