2^0 **Lista MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (2^0 semestre 2023)**

Turma: 2023221

Referências principais (nas quais a lista foi baseada):

1. C P. Simon, L. Blume Mathematics for Economists, W. W. Norton & Company; 1ª edição
2. J. Stewart , *Cálculo II* Pioneira Thomson Learning,
3. A. Chiang, K. Wainwright, *Matemática para Economia*,
4. D. B. Júnior, *Cálculo para ciências humanas*,
5. S.T. Tan, *Matemática Aplicada a Adminisraçao e Economia*,
6. J. E. Weber, *Matemática para Economia e Administração.*

1 Parte 1

1.1 Lista anterior

Recorde conteúdo na Lista 1, Guias 3,2,1

2 Parte 2

2.1 Polinômio de Taylor

Problema 2.1. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Escreva a fórmula do polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de um ponto $p \in \Omega$, em termos do Hessiano e gradiente.

Problema 2.2. Seja $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine o Polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $(3, -2)$.

2.2 Pontos críticos

Problema 2.3. Seja $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Problema 2.4. Determine e classifique os pontos críticos de f.

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$
2) $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$
3) $f(x, y) = xy - 2x - y$
4) $f(x, y) = \exp(x)\cos(y)$
5) $f(x, y) = x\text{sen}\,(y)$
6) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

Problema 2.5. Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2 + 6y - 9)\exp(y - 3)$

a) Determine os pontos críticos.
b) Classifique os pontos críticos em pontos de sela, máximos e/ou mínimos locais.

Problema 2.6. Sejam x_1 e x_2 as demanandas dos produto 1 e 2. Suponha que os preços dos produtos estejam relacionados com as demandas da seguinte forma $p_1 = 36 - 3x_1$ e $p_2 = 40 - 5x_2$. Seja C a função custo conjunto definida como $C = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Temos então que o lucro é $L = p_1x_1 + p_2x_2 - C$. Determine a quantidade e os preços que maximizam (localmente) o lucro e ache o lucro máximo (local).

Problema 2.7. Suponha que a função de produção seja dada por: $16z = 65 - 2(x - 5)^2 - 4(y - 4)^2$. Os preços unitários dos insumos x e y são 8 e 4 respectivamente, e o preço unitário do produto acabado é 32. Temos então que o lucro é $L = 32z - 8x - 4y$. Determine o lucro máximo (local).

2.3 Respostas da Parte 2

Problema 2.1:

$$\begin{aligned} P_2(x_1,x_2) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x_1-p_1, x_2-p_2)\rangle \\ &+ \frac{1}{2}[x_1-p_1\; x_2-p_2]\mathrm{Hess} f(p) \begin{bmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\mathrm{Hess} f(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix}$$

Problema 2.2:
$P_2(x,y) = 24+32(x-3)-18(y+2)+8(x-3)^2-24(x-3)(y+2)+3(y+2)^2$

Problema 2.3:

(a) O conjunto dos pontos críticos é: $\{(0,0),\ (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\ (2,2)\}$

(b) Pontos de sela: $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$e $(2,2)$ Ponto de máximo local: $(1,1)$.

Problema 2.4

1) Mínimo local $(0,0)$ e pontos de sela $(\sqrt{2},-1)$ e $(-\sqrt{2},-1)$

2) Os pontos (x_0,x_0) são máximos locais.

3) Ponto de sela $(1,2)$.

4) Nenhum.

5) Pontos de sela $(0,n\pi)$ para n inteiro.

6) Máximo local $(0,0)$, mínimo local $(0,2)$ e pontos de sela $(1,1)$ e $(-1,1)$.

Problema 2.5

a) $(0,3)$, $(0,1)$.

b) $(0,3)$ é ponto de sela; $(0,1)$ é ponto de mínimo local.

Problema 2.6
$x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $p_1 = 24$, $p_2 = 30$ e lucro máximo é 112.

Problema 2.7
$x = 4$, $y = \frac{15}{4}$ e lucro máximo é 39.

3 Parte 3

3.1 VII Máximos e mínimos absolutos

Problema 3.1. Seja $f(x,y) = 2x^2+x+y^2-2$ Determine os valores máximos e mínimos da função f na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 \leq 4\}$.

Problema 3.2. Determine os pontos críticos e valores máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D.

1) $f(x,y) = 5-3x+4y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
2) $f(x,y) = x^2+y^2+x^2y+4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
3) $f(x,y) = 1+xy-x-y$, D é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$.
4) $F(x,y) = 2x^3+y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$

Problema 3.3. Determine os pontos críticos e valores máximos e mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2+2x+1$ no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1/2)^2+y^2 \leq 4\}$.

3.2 Respostas da parte 3

Problema 3.1

Verificamos que $(-1/4,0)$ é ponto de mínimo absoluto e o *valor mínimo* é $f(-1/4,0) = -17/8$. O ponto de máximo global por sua vez é $(2,0)$ e o *valor máximo* é 8.

Problema 3.2

1) Valor mínimo $-7 = f(4,0)$, valor máximo $13 = f(4,5)$.
2) Valor máximo $7 = f(1,1) = f(-1,1)$,valor mínimo $4 = f(0,0)$.
3) Valor máximo $3 = f(2,4)$,valor mínimo $-9 = f(-2,4)$

4) Valor máximo $2 = f(1,0)$, valor mínimo $-2 = f(-1,0)$.

Problema 3.3:

O ponto crítico é $(-1,0)$. O valor máximo é $49/4 = f(5/2,0)$ e o valor mínimo é $0 = f(-1,0)$.

4 Parte 4:

4.1 VIII- Plano tangente e o teorema da função implícita

Problema 4.1 (*)**.** Enuncie o teorema da função implicita para uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Problema 4.2 (*)**.** Enuncie o teorema da função implícita para uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Problema 4.3. Determine a equação do plano tangente à superfície S no ponto p.

(1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$ e $p = (4, -1, 1)$.

(2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4\}$ e $p = (1, 0, 1)$.

(3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + 1 = x \exp(y) \cos(z)\}$ e $p = (1, 0, 0)$.

Problema 4.4. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$.

(1) Esboce a superfície regular S.

(2) Seja $p = (\frac{1}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\sqrt{2}}{2})$. Determine a equação do plano tangente à S no ponto p.

Problema 4.5 (*)**.** Dê uma interpretação geométrica do plano tangente à uma superfície regular.

Problema 4.6 (*)**.** Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

Problema 4.7 (*)**.** Determine a reta tangente à intersecção do cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 2$ com o gráfico da função $h(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

4.2 Respostas da Parte 4

Problema4.1 (Teorema da função implícita em $\mathbb{R}^2$)

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponha que a curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = c\}$ é regular (i.e., o vetor gradiente não se anula ao longo de C.) Então para todo $p \in C$ existe um $\epsilon > 0$ tal que uma das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $B_\epsilon(p) \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = h(x), x \in I\}$

(b) $B_\epsilon(p) \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = h(y), y \in I\}$

Além disto, a função h é de classe C^1 e o Item (a) acontece se $\frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0$ e o Item (b) acontece se $\frac{\partial g}{\partial x}(p) \neq 0$.

Problema 4.2 (Teorema da função implícita em $\mathbb{R}^3$)

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponha que a superfície de nível $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = c\}$ é regular (i.e., o vetor gradiente não se anula ao longo de S.) Então para todo $p \in S$ existe um $\epsilon > 0$ tal que uma das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = h(x, y), (x, y) \in D\}$

(b) $B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = h(y, z), (y, z) \in D\}$

(c) $B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = h(z, x), (z, x) \in D\}$

Além disto, a função h é de classe C^1 e o Item (a) acontece se $\frac{\partial g}{\partial z}(p) \neq 0$ e o Item (b) acontece se $\frac{\partial g}{\partial x}(p) \neq 0$ e o Item (c) acontece se $\frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0$

Problema 4.3

1) $4x - 2y + 3z = 21$

2) $3x - y + z = 4$

3) $x + y - z = 1$

Problema 4.4

(1) S é um toro.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{2}(3+\frac{\sqrt{2}}{2}))+\frac{\sqrt{6}}{2}(y-\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\frac{\sqrt{2}}{2}))+\sqrt{2}(z-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$

Problema4.5 (Interpretação geométrica do plano tangente)

Sejam $g:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *uma função* C^1 *e* $c\in g(\Omega)$. *Seja* $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/g(x,y,z)=c\}$ *a superfície de nível associada ao valor c. Suponha que* grad $g(x)$ *é diferente de zero para todo* $x\in S$.

a) Seja $\beta:I\to\mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada* C^1 *tal que sua imagem está contida em* S *e* $\beta(0)=p$. *Então o vetor velocidade de* β *está contido no plano tangente* T_pS *da superfície de nível* S *no ponto* p.

b) Seja T_pS *o plano tangente a um ponto* $p\in S$ *e* $v\in T_pS$. *Então existe uma curva* β *de classe* C^1 *cuja a imagem esta contida em* S *e tal que o vetor velocidade* $\beta^{'}(0)=v$.

Problema 4.6

$\alpha(t)=(-1-10t,1-16t,2-12t)$

Problema4.7

$\beta(s)=(1,1,4)+s(1,-1,0)$

5 Parte 5

5.1 IX- Multiplicadores de Lagrange

Problema 5.1. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximos e mínimos da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

a) $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 35\}$ onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

b) $f(x, y, z) = xyz$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 6\}$ onde $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 1\}$ onde $g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$.

d) $f(x, y, z) = x + 2y$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 1, g_2(x, y, z) = 4\}$ onde $g_1(x, y, z) = x + y + z$, $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$.

e) $f(x, y, z) = yz+xy$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 1, g_2(x, y, z) = 1\}$ onde $g_1(x, y, z) = xy$, $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$.

f) $f(x, y, z) = 3x-y-3z$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 1\}$ onde $g_1(x, y, z) = x + y - z$, $g_2(x, y, z) = x^2 + 2z^2$.

Problema 5.2. Sejam $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{(x-2)^2}{9} + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$.

a) Determine a equação do plano tangente a superfície S no ponto $(3, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

b) Determine o <u>valor máximo</u> e o <u>valor mínimo</u> da função f restrita a superfície S e os <u>pontos</u> onde f assume tais valores.

Problema 5.3. Seja $U(x, y, z) = xyz$ a função utilidade onde x, y, z representam o número de unidades das mercadorias A, B, C consumidas mensalmente por uma pessoa. Sejam $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$4,00$ os preços unitários de A, B, C respectivamente. Suponha que as despesas para mercadorias sejam $R\$90,00$. Quantas unidades de cada mercadoria de cada tipo devem ser adiquiridas para maximizar a utilidade?

Problema 5.4. Na teoria clássica da demanda, o problema do consumidor consiste em escolher uma cesta de maneira que ele obtenha o máximo de utilidade à sua restrição orçamentária. Considerando dois bens 1 e 2 e denotando por x_1 e x_2 as respectivas quantidades demandadas desses bens, admita que a função utilidade seja dada por:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}}$$

Se o preço do bem 1 é \$30,00, o preço do bem 2 é \$20,00, a renda do consumidor é \$100,00 e esses bens são desejáveis, a restrição orçamentária é então dada por:

$$30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 = 100$$

Determine a cesta ótima para este consumidor.

Problema 5.5. O problema da firma consiste em minimizar os custos de produção. Assim, se temos dois fatores de produção digamos 1 e 2 com respectivos preços \$2,00 e \$5,00, queremos encontrar a maneira mais barata de produzir um nível 10 de "output". Se x_1 e x_2 são as respectivas quantidades usadas dos dois fatores e a função de produção da firma é dada por:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{5}} \cdot x_2^{\frac{4}{5}}$$

o problema da firma consiste então em minimizar

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

de maneira que se obtenha o nível

$$x_1^{\frac{1}{5}} \cdot x_2^{\frac{4}{5}} = 10$$

Determine a quantidade ótima a ser usada dos fatores 1 e 2.

5.2 Respostas da parte 5

Problema 5.1

a) Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$.

b) Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

c) Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1.

d) Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$, mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$.

e) Máximo 3/2, mínimo 1/2.

f) Máximo $2\sqrt{6} = f(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$, mínimo $-2\sqrt{6} = f(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6})$.

Problema 5.2

a) $\frac{2}{9}(x-3) + \frac{4}{3}(y - \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(z - \frac{2}{3}) = 0$.

b) O valor máximo é 16 e ocorre no ponto $(5, 0, 0)$. O valor mínimo é 56/64 e ocorre na curva $\{(7/8, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 = 55/64\}$

Problema 5.3: $x = 15$, $y = 10$, e $z = \frac{15}{2}$.

Problema 5.4:
A cesta ótima será $x_1 = \frac{10}{9}$ e $x_2 = \frac{10}{3}$.

Problema 5.5: $x_1 = 5\sqrt[5]{625}$ e $x_2 = 8\sqrt[5]{625}$.