

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 7 Técnicas de integração

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Em particular o aluno ou aluna **não deve se limitar aos exercícios deste guia**, deve também fazer exercícios da lista e da bibliografia recomendada, pois integral se aprende por meio de vários exercícios.

(▶ 1) Mudança de variável

(▶ 2) Integral por partes

Mudança de variável

Ex: Calcule: $\int_a^b \cos(x^2) 2x dx$

Abordagem informal: $y = x^2$; $\frac{dy}{dx} = 2x$; $dy = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int \cos(x^2) 2x dx &= \int \cos(y) dy \\ &= \sin(y) + c \\ &= \sin(x^2) + c\end{aligned}$$

Assim $\int_a^b \cos(x^2) 2x dx = \sin(x^2)|_a^b = \sin(b^2) - \sin(a^2)$

Proposição 1 (mudança de variável)

Sejam $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e f uma função contínua em $g[a, b]$. Então:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

onde $\frac{d}{dy}F(y) = f(y)$

Dem: Pela regra da cadeia $(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)$. Isto e o teorema fundamental do Cálculo termina a prova.

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x)|_a^b = F(y)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Ex: $\int_a^b \cos(x^2) 2x dx$

Neste caso $g(x) = x^2$; $g'(x) = 2x$; $f(y) = \cos(y)$; $F(y) = \sin(y)$

Assim

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(x^2) 2x dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} \cos(y) dy \\ &= \sin(y)|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \sin(x^2)|_a^b \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Prob: Calcule:

1. $\int_a^b \sin^3(x) \cos(x) dx$

2. $\int_a^b x\sqrt{1+x} dx$

3. $\int_a^b \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx$

4. $\int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2} dx$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Sol: $\int_a^b \sin^3(x) \cos(x)dx$

Escolhendo $g(x) = \sin(x)$ temos $g'(x) = \cos(x)$. Assim:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin^3(x) \cos(x)dx &= \int_a^b g(x)^3 g'(x)dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} (y)^3 dy \\ &= \frac{y^4}{4} \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \frac{(\sin(x))^4}{4} \Big|_a^b \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Sol: $\int_a^b x\sqrt{1+x}dx$

Escolha $g(x) = (1+x)$ Assim $g'(x) = 1$ e $x = g(x) - 1$.

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sqrt{1+x}dx &= \int_a^b (g(x) - 1)\sqrt{g(x)}g' dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} (y - 1)\sqrt{y}dy \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} (y^{3/2} - y^{1/2})dy \\ &= \left(\frac{2y^{5/2}}{5} - \frac{2y^{3/2}}{3} \right) \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \left(\frac{2(1+x)^{5/2}}{5} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3} \right) \Big|_a^b\end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Sol: $\int_a^b \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx$.

Escolha $g(x) = x^3 + x$. Então $g'(x) = 3x^2 + 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx &= \int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{dy}{y} \\ &= \ln |y| \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \ln |x^3 + x| \Big|_a^b \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Sol: $\int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2} dx$

Escolha $g(x) = (x + 1)$. Então $g'(x) = 1$ e $x = g(x) - 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{2x}{(x+1)^2} dx &= \int_a^b \frac{2(g(x) - 1)}{(g(x))^2} g'(x) dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{2(y - 1)}{(y)^2} dy \\ &= 2 \left(\ln |y| + y^{-1} \right) \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= 2 \left(\ln |x + 1| + (x + 1)^{-1} \right) \Big|_a^b \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(x) \Big|_a^b = F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Prob: Calcule:

1. $\int \cos^2(x)dx$

2. $\int \sin^2(x)dx$

3. $\int \cos^3(x)dx$

4. $\int \sin^3(x)dx$

5. $\int \tan(x)dx$

Integral por partes

Teorema 2 (Integração por partes)

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . Então

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Dem:

$$\begin{aligned} f(x)g(x)|_a^b &= \int_a^b \frac{d}{dx} f(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &+ \int_a^b f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ex: $\int_a^b x \exp(x) dx$.

Escolha: $g(x) = x$ e $f'(x) = \exp(x)$.

Assim $g'(x) = 1$ e $f(x) = \exp(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b x \exp(x) dx &= x \exp(x)|_a^b - \int_a^b \exp(x) 1 dx \\ &= x \exp(x)|_a^b - \exp(x)|_a^b\end{aligned}$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

1. $\int x^2 \sin(x)dx$

2. $\int \ln(x)dx$

3. $\int_a^b \exp(x) \cos(x)dx$

Int. por partes: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int x^2 \sin(x)dx$. Escolhemos: $g(x) = x^2$ e $f'(x) = \sin(x)$

$$\int x^2 \sin(x)dx = -\cos(x)x^2 + \int 2x \cos(x)dx$$

Para $\int 2x \cos(x)dx$ escolhemos: $g(x) = 2x$ e $f'(x) = \cos(x)$

$$\int 2x \cos(x)dx = 2x \sin(x) - \int 2 \sin(x)dx$$

Juntando temos:

$$\int x^2 \sin(x)dx = -\cos(x)x^2 + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int \ln(x)dx$. Escolhemos $g(x) = \ln(x)$ e $f'(x) = 1$

$$\int \ln(x)1dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x dx$$

Assim:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

Int. por partes: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Sol: $\int_a^b \exp(x) \cos(x)dx$ seja $g(x) = \cos(x)$ e $f'(x) = \exp(x)$

$$\underline{\int_a^b \exp(x)\cos(x)dx} = \cos(x)\exp(x)|_a^b + \int_a^b \sin(x)\exp(x)dx$$

Para $\int_a^b \sin(x) \exp(x)dx$ seja $g(x) = \sin(x)$ e $f'(x) = \exp(x)$

$$\int_a^b \sin(x)\exp(x)dx = \sin(x)\exp(x)|_a^b - \underline{\int_a^b \cos(x)\exp(x)dx}$$

Substituindo a segunda equação na primeira temos:

$$\underline{2 \int_a^b \exp(x) \cos(x)dx} = \cos(x) \exp(x)|_a^b + \sin(x) \exp(x)|_a^b$$