

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 4 : Derivada: Máximos, mínimos e gráficos

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra <http://www.geogebra.org>

Objetivo: Por meio da compreensão de gráficos de funções, fixar conceitos e resultados fundamentais sobre máximos e mínimos, derivada primeira e derivada segunda.

- (▶ 1) Máximos e mínimos
- (▶ 2) Gráficos: derivada primeira
- (▶ 3) Gráficos: derivada segunda

Máximos e mínimos

Definição 1

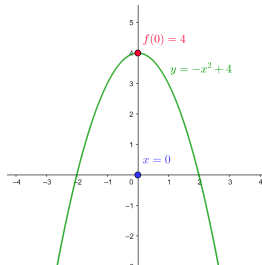
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de máximo absoluto (ou máximo global)** se:

$$f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in I$$

$f(p)$ é chamado **valor máximo**.

Exemplo 2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x^2 + 4$. Então $x = 0$ é ponto de máximo e $f(0) = 4$ é valor máximo absoluto.



Definição 3

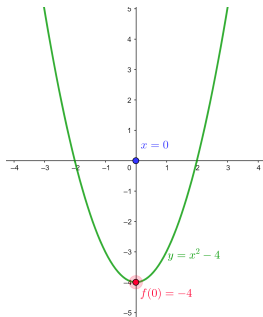
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de mínimo absoluto (ou mínimo global)** se:

$$f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in I$$

$f(p)$ é chamado **valor mínimo**.

Exemplo 4

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x^2 - 4$. Então $x = 0$ é ponto de mínimo e $f(0) = -4$ é valor mínimo.



Definição 5

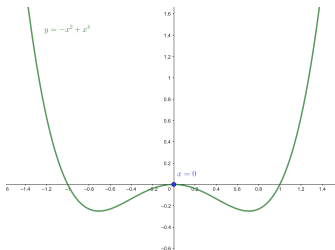
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de máximo local** se:

$$f(p) \geq f(x), \quad x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap I$$

ou seja para x **próximo** a p .

Exemplo 6

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x^2 + x^4$. Então $x = 0$ é ponto de máximo local.



Definição 7

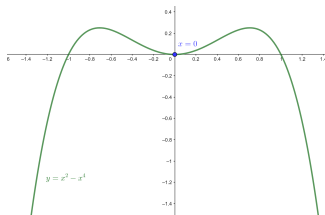
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de mínimo local** se:

$$f(p) \leq f(x), \quad x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap I$$

ou seja para x **próximo** a p .

Exemplo 8

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 - x^4$. Então $x = 0$ é ponto de mínimo local.



Teorema 9

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua** em um intervalo **fechado** $[a, b]$. Então existe (pelo menos) um ponto de **mínimo** e (pelo menos) um ponto de **máximo absolutos**.

Obs: Pontos de máximos e mínimos globais podem acontecer no **interior** (a, b) ou no **bordo** (i.e., $x = a$ ou $x = b$).

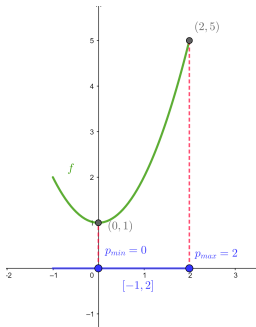


Figura: $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$

Proposição 10

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Suponha que:

- ▶ p é um ponto **no interior** (ou seja $p \in (a, b)$)
- ▶ p é um ponto de **máximo ou mínimo local**.

Então p é um ponto **crítico** ou seja

$$\frac{d}{dx}f(p) = 0.$$

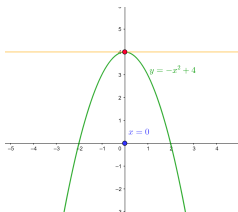


Figura: $f(x) = -x^2 + 4$, $\frac{df}{dx}(0) = 0$

Obs: A demonstração da Proposição 10 seguirá da Proposição 12.

Obs: Condição anterior é uma condição necessária mas não suficiente. **Um ponto p pode ser crítico e não ser nem máximo, nem mínimo.**

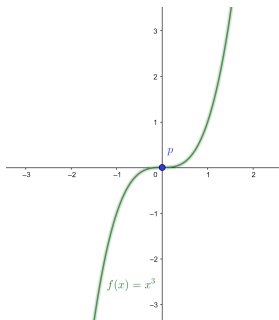


Figura: $f(x) = x^3$, $\frac{df}{dx}(0) = 0$ mas $p = 0$ não é nem máximo nem mínimo local.

Problema 11

Encontre os pontos e valores de máximos e mínimos globais da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ com domínio $I = [-\frac{1}{2}, 4]$.

Obs: Para resolver o problema iremos desenvolver um **algoritmo** baseado no Teorema 9 e na Proposição 10

Sol: Como o intervalo é fechado sabemos pelo Teorema 9 que existe máximo e mínimo absoluto.

Passo 1: Procuramos **candidatos** a máximo e mínimo absoluto **no interior**. Para isto resolvemos $f'(x) = 0$ e avaliamos os candidatos encontrados. $0 = f'(x) = x(3x - 6)$ temos $x = 0$ e $x = 2$. Assim $f(0) = 1$ e $f(2) = -3$.

Passo 2: Procuramos **candidatos** a máximo e mínimos absolutos **no bordo**. Para tanto avaliamos f nos extremos do intervalo.
 $f(-1/2) = 1/8$ e $f(4) = 17$

Passo 3 Comparamos aqui os valores obtidos no **Passo 1** e **Passo 2**
 $f(0) = 1$; $f(2) = -3$ (**mínimo absoluto**)
 $f(-1/2) = 1/8$; $f(4) = 17$ (**máximo absoluto**)

Resposta: Ponto(s) de mínimo(s) absoluto(s): $x = 2$, o valor mínimo absoluto é $y = -3$ Ponto(s) de máximo(s) absoluto(s): $x = 4$ o valor máximo absoluto é $y = 17$.

Gráficos: derivada primeira

Proposição 12

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^1(a, b)$ e $p \in (a, b)$;

- (a) Se $f'(p) > 0$ então f é estritamente **crescente** em $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ ou seja próximo a p .
- (b) Se $f'(p) < 0$ então f é estritamente **descrescente** em $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ ou seja próximo a p .

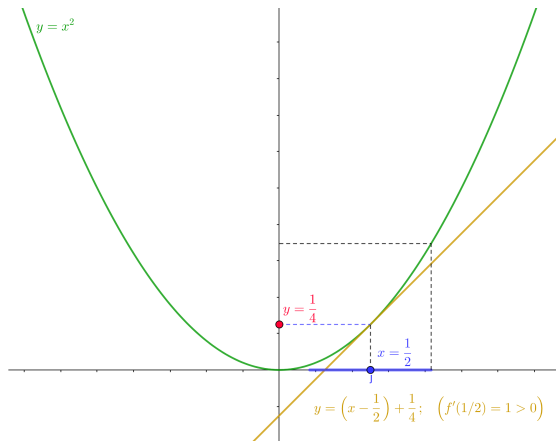


Figura: $f'(1/2) > 0$ implica que a função é crescente em uma vizinhança de $x = 1/2$.

Dem: do Teorema 12

Vamos supor que $f'(p) > 0$ (i.e, hipótese de (a)). Por continuidade temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x_0 \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ temos

$f'(x_0) > 0$ Temos pela **Expansão de Taylor de Ordem 1**

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R$ onde $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R}{x - x_0} = 0$. Assim

$$f(x) - f(x_0) = h(x)$$

onde $h(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R}{x - x_0} = 0$, concluímos que existe $\delta_{x_0} > 0$ tal que para $x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$ temos:

$$\frac{h(x)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{R}{x - x_0} > f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{2} > 0. \text{ Assim:}$$

$$f(x) - f(x_0) = h(x) > 0 \text{ para } x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$$

A arbitrariedade de x_0 implica que f é crescente em $(p - \epsilon, p + \epsilon)$.
A demonstração do item (b) é análoga.

Corolário 13

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função $C^1(a, b)$. Então

1. Se $f'(x) > 0$ então f é estritamente **crescente**.
2. Se $f'(x) < 0$ então f é estritamente **decrescente**.

Teorema 14 (Teorema da função inversa)

Sejam $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função $C^1(a, b)$ e $(c, d) = f(a, b)$ (imagem).
Suponha que $f'(x) \neq 0 \forall x$. Então f admite inversa C^1 ou seja,
existe uma função $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ de classe $C^1(c, d)$ tal que

$$\begin{aligned}f^{-1} \circ f(x) &= x \\f \circ f^{-1}(y) &= y.\end{aligned}$$

Além disto

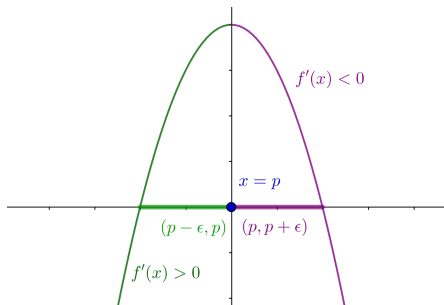
$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x_0)}$$

Proposição 15

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^1(a, b)$ e $p \in (a, b)$.

Suponha:

- (a) $f'(x) > 0$ para $x \in (p - \epsilon, p)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (p, p + \epsilon)$
então p é **ponto de máximo local**.

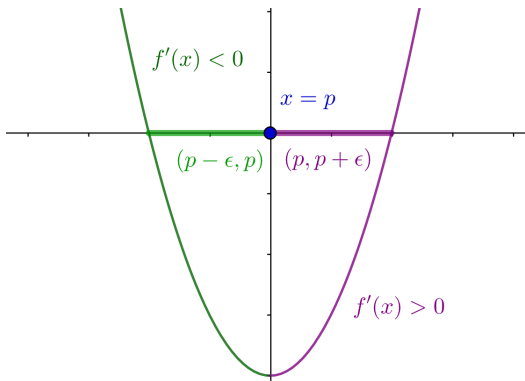


Proposição 16

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^1(a, b)$ e $p \in (a, b)$.

Suponha:

- (b) $f'(x) < 0$ para $x \in (p - \epsilon, p)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in (p, p + \epsilon)$
então p é **ponto de máximo local**.



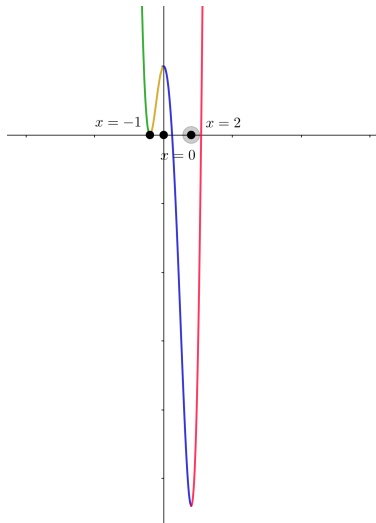
Prob: Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

- (a) Determine os pontos críticos ($f'(p) = 0$)
- (b) Determine intervalos onde f cresce e decresce.
- (c) Determine pontos de máximo e mínimos locais.
- (d) Esboce o gráfico de f .

$f'(x) = 12x(x - 2)(x + 1)$ Temos como pontos críticos: $-1, 0, 2$.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$12x$	(-)	(-)	(+)	(+)
$(x - 2)$	(-)	(-)	(-)	(+)
$(x + 1)$	(-)	(+)	(+)	(+)
$f'(x)$	(-)	(+)	(-)	(+)
$f(x)$	decresce	crece	decresce	crece

Em particular em $x = -1$ é um mínimo local, $x = 0$ é o máximo local, $x = 2$ é um mínimo local.



Gráficos: derivada segunda

Definição 17

Uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(a, b)$ é chamada

1. **côncava para cima** se o gráfico de f está sempre acima das retas tangentes.
2. **côncava para baixo** se o gráfico de f está sempre abaixo das retas tangentes.



Obs: Concavidade e (de)crescimento **não são** equivalentes!

Proposição 18

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^2(a, b)$.

- (a) Se $f''(x) > 0$ então f é **côncava para cima**.
- (b) Se $f''(x) < 0$ então f é **côncava para baixo**.

Obs: Prova seguirá ideias da prova da Proposição 19.

Proposição 19

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^2(a, b)$ e $p \in (a, b)$ um ponto crítico, ou seja $f'(p) = 0$ Então

- (a) Se $f''(p) > 0$ então p é **ponto de mínimo local**;
- (b) Se $f''(p) < 0$ então p é **ponto de máximo local**.

Ex: Seja $f(x) = -\cos(x) + x^4$. Temos que $f'(x) = \sin(x) + 4x^3$ e $f''(x) = \cos(x) + 12x^2$. Logo $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1 > 0$

Concluimos pela Proposição 19 que o ponto crítico $x = 0$ é mínimo local.

Dem Proposição 19: Pela Fórmula de Taylor de ordem 2

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x)$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{(x-p)^2} = 0$

Vamos supor que $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$ (i.e., hipótese de (a)).

Assim

$$f(x) - f(p) = h(x)$$

onde $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x)$. Visto que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{(x-p)^2} = 0$ podemos concluir que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ ($x \neq p$) temos:

$$\frac{h(x)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x)}{(x - p)^2} > \frac{1}{2}f''(p) - \frac{1}{4}f''(p) > 0$$

Assim

$$f(x) - f(p) = h(x) > 0$$

ou seja p é um ponto mínimo local. Demonstração (b) é análoga.

Prob: Seja $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- (a) Determine os pontos críticos ($f'(p) = 0$)
- (b) Determine intervalos onde f cresce e decresce.
- (c) Determine pontos de máximo e mínimos locais.
- (d) Determine os intervalos onde f é concava para cima e para baixo
- (e) Esboce o gráfico de f .

solução:

Iniciemos com os itens (a),(b), (c)

$f'(x) = x^2(4x - 12)$. Assim os pontos críticos são: 0, 3.

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
x^2	(+)	(+)	(+)
$(4x - 12)$	(-)	(-)	(+)
$f'(x)$	(-)	(-)	(+)
$f(x)$	decresce	decrece	crece

Assim $x = 3$ é um ponto de mínimo local.

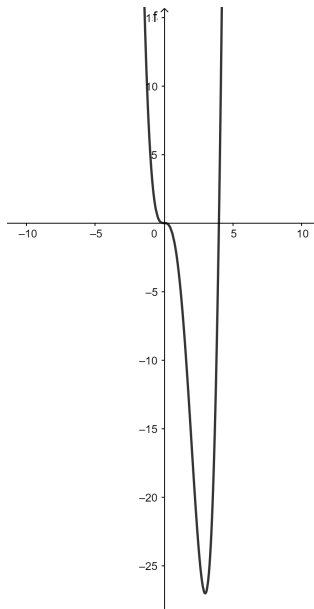
Para o item (d) observamos:

$f''(x) = 12x(x - 2)$. Assim soluções de $f''(x) = 0$ são: 0, 2.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$12x$	(-)	(+)	(+)
$(x - 2)$	(-)	(-)	(+)
$f''(x)$	(+)	(-)	(+)
$f(x)$	conc. cima	conc. baixo	conc. cima

Juntando as 2 tabelas podemos montar uma nova tabela, que contenha informações sobre crescimento/descrescimento e concavidades.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
crescimento	descresce	decrece	descresce	crece
concavidade	conc. cima	conc. baixo	conc. cima	conc. cima



Prob: Seja $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

- (a) Determine o domínio de definição.
- (b) Determine o domínio onde f cresce e decresce.
- (c) Determine pontos de máximos e ou mínimos locais.
- (d) Determine os intervalos de mudança de concavidade
- (e) Determine as assintotas horizontais e verticais
- (f) Esboce.

