MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 3 : Derivada: L'Hospital e TVM

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

(1) L'Hospital

(2) Teorema do valor Médio (TVM)

(3) Comentários: Expansão de Taylor.

L'Hospital

Teorema 1

*Sejam f e g funções diferenciáveis em (a, b) onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Assuma que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$ e que o limite $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista (inclusive podendo ser $\pm\infty$). Suponha que **um dos seguintes casos** ocorra.*

1. $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ **e** $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$.
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ **e** $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$

Então:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: Resultado análogo vale para b^-.

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} lim_{x\to a} f(x) &= 0 &= \lim_{x\to a} g(x) \\ & \text{ou} & \\ \lim_{x\to a} f(x) &= \pm\infty &= \lim_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Ex:(limite fundamental trigonométrico) Note que $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin(x)}{\frac{d}{dx}x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Obs: Estamos apenas ilustrado L'H. A demonstração via trigonometria do limite fundamental (encontrada nos livros) é relevante, pois o limite fundamental é utilizado na demonstração das derivadas das funções trigonométricas

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} lim_{x\to a} f(x) & = & 0 & = & \lim_{x\to a} g(x) \\ & & \text{ou} & & \\ \lim_{x\to a} f(x) & = & \pm\infty & = & \lim_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Dem: Caso particular. Vamo supor que f e g são diferenciáveis em $x = a$ e que $f(a) = 0 = g(a)$. Temos por expansão de **Taylor de primeira ordem**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + R_2$$

onde $\lim_{x\to a}\frac{R_i}{(x-a)} = 0$. Visto que $f(a) = 0 = g(a)$ temos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + R_1}{g'(a)(x-a) + R_2}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+R_1}{g'(a)(x-a)+R_2}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(f'(a)+\frac{R_1}{(x-a)}\right)}{(x-a)\left(g'(a)+\frac{R_2}{(x-a)}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\left(f'(a)+\frac{R_1}{(x-a)}\right)}{\left(g'(a)+\frac{R_2}{(x-a)}\right)}\\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}
$$

pois $\lim_{x\to a}\frac{R_i}{(x-a)}=0$. $\square$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Prob: Calcule:

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$

(b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\exp(x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$

Observe que: $\lim_{x\to 1}\ln(x) = 0$ e $\lim_{x\to 1} x-1 = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} lim_{x\to a} f(x) & = & 0 & = & \lim_{x\to a} g(x) \\ & & \text{ou} & & \\ \lim_{x\to a} f(x) & = & \pm\infty & = & \lim_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^2}$.

Observe que: $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^2} & \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{2x} \\ & \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{2} \\ & = +\infty \end{aligned}$$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{se}\ \begin{cases} lim_{x\to a}f(x) & = & 0 & = & \lim_{x\to a}g(x)\\ & & \text{ou} & & \\ \lim_{x\to a}f(x) & = & \pm\infty & = & \lim_{x\to a}g(x)\end{cases}$$

Sol: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

Observe que: $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$. Assim

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}3x^{-1}x^{2/3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}3x^{-1/3}\\ &= 0\end{aligned}$$

Observação 2

Se $\lim_{x\to a} f = 0$ e $\lim_{x\to a} g = \pm\infty$ podemos usar L'hospital para calcular $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$. De fato:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(1/f)'(x)}$$

Ex:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-1x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-1)x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Prob: Calcule: $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Sol:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^x &= \lim_{x \to 0^+} \exp(x \ln(x)) \\
&= \exp(\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)) \\
&\overset{(*)}{=} \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

onde na igualdade (*) utilizamos Observação 2.

Teorema do valor Médio (TVM)

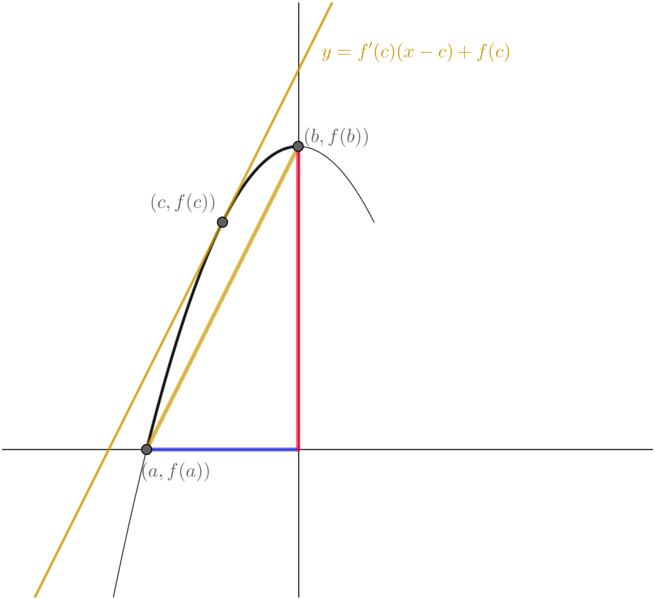
Teorema 3 (TVM)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em (a, b). Então existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{d}{dx} f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ex: $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = -x^2 + 4$. Note que $f'(x) = -2x$ e para $c = -1$ temos

$$\frac{d}{dx} f(-1) = 2 = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


$y = f'(c)(x - c) + f(c)$
$(b, f(b))$
$(c, f(c))$
$(a, f(a))$

Se $f(a) = 0 = f(b)$ e f não é identicamente nula, TVM significa que existe máximo ou mínimo no interior (o que já foi visto em aulas anteriores). O **TVM** é útil em várias demonstrações. Ele será usado na prova do **Teorema Fundamental do Cálculo**. Também permite redemonstrar resultados já vistos. A prova do L'Hospital (casos gerais) segue do **TVM generalizado** a seguir:

Teorema 4

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e diferenciáveis em (a, b). Então existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Comentários: Expansão de Taylor

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é suave e $p \in (a, b)$ então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) \\ &+ R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) \\ &+ \frac{1}{2} f''(p)(x-p)^2 + R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) \\ &+ \frac{1}{2!} f''(p)(x-p)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} f'''(p)(x-p)^3 + R_3 \end{aligned}$$

onde $\lim_{x\to p} \frac{R_n}{(x-p)^n} = 0$